現代数学基础丛书 123

拓扑空间论

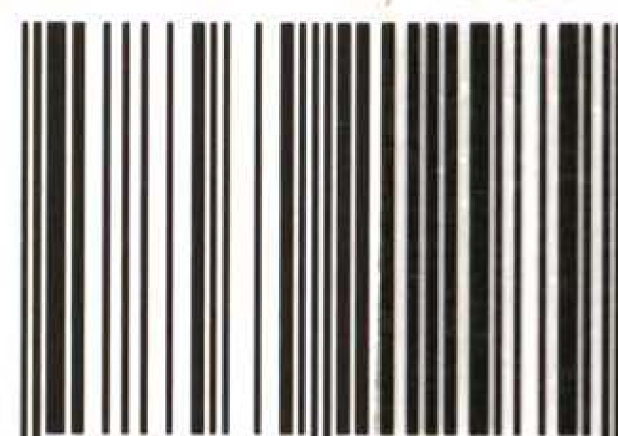
（第二版）

高国士　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3083.0101)


ISBN 978-7-03-021297-9

销售分类建议：高等数学

定　价：68.00 元

0189.11/8=2
2008

现代数学基础丛书 123

拓扑空间论

(第二版)

高国士 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者在一般拓扑学研究生教材的基础上修改和补充而成的，是拓扑空间理论方面的专著. 全书共八章，前四章是拓扑空间论的基础知识，后四章是对一般拓扑学两大课题“覆盖性质”与“广义度量空间”深入研究的成果，介绍了国内外，特别是我国学者在这方面的贡献. 为了使读者深入理解本书内容，在每章后安排了大量的习题. 作者的学生林寿主持了第二版的修订工作.

本书适合高等学校数学系高年级学生、研究生及研究工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑空间论(第二版) /高国士著. —2 版 —北京: 科学出版社, 2008
(现代数学基础丛书; 123)
ISBN 978-7-03-021297-9
I. 拓… II. 高… III. 拓扑空间 IV. O189.11
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 031065 号

责任编辑: 林 鹏 刘嘉善 张 扬 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000 年 7 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2008 年 4 月第 二 版 印张: 22 1/2
2008 年 4 月第一次印刷 字数: 419 000
印数: 1—3 000
定价: 68.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈长虹〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版序

2000 年前后, 一批对点集拓扑学发展做出过贡献的数学家相继去世, 如 R. Arens (1919—2000), A. Borel (1923—2003), J. J. Charatonik (1934—2004), B. Fitzpatrick (1931—1999), E. Hewitt (1920—1999), J. Isbell (1931—2005), F. B. Jones (1910—1999), M. Katětov (1918—1995), J. L. Kelley (1917—1999), K. Morita (1915—1995), J. Nagata (1925—2007), R. H. Sorgenfrey (1915—1996), A. H. Stone (1916—2000), M. H. Stone (1903—1998), J. W. Tukey (1915—2000), L. Vietoris (1891—2002), A. Weil (1906—1998) 等. 他们发展了 20 世纪初由 F. Hausdorff (1868—1942) 等开创的点集拓扑学, 描绘了第二次世界大战以来一般拓扑学的精彩画卷, 为风起云涌的 20 世纪增添了不可磨灭的壮丽篇章, 使之成为我们取之不尽的理论源泉, 在 C. E. Aull 和 R. Lowen [33, 34, 35] 主编的 *Handbook of the History of General Topology* 一书中对其历史功绩做了较好的评述.

我国开始进行较深入、扎实与规模化的点集拓扑学研究比德国、波兰、前苏联、美国等晚了半个世纪. 关于国内学者对点集拓扑学的阶段性贡献, 四川大学刘应明教授、蒋继光教授 [267, 268] 曾给出了简短的综述. 我国学者取得的拓扑学成果已载入 *Encyclopedia of General Topology* [180] 等专著, 提出的拓扑学问题被列入 *Open Problems in Topology* [292, 333] 等问题集, 解决了一些有影响的经典问题 [332], 这从一个侧面反映了我国一般拓扑学研究的影响力和所处的国际地位. 在中国已成功举办了 6 次国际一般拓扑学学术会议及一些专题会议. 这些会议已成为凝聚人心、展示形象、鼓舞士气、促进交流的重要平台. A. V. Arhangel'skiĭ 在《点可数覆盖与序列覆盖映射》 [259] 的序言中写道: "我想提一提该专著的另一个令人高兴的方面, 它的出现标志了一般拓扑学在中国长期发展的成功, 这个发展造就了一群极具创造力的中国数学工作者, 使他们做出了对一般拓扑学主流方面闪光的重要贡献." 我以为, Arhangel'skiĭ 所说的 "一般拓扑学在中国长期发展的成功" 应主要归功于蒲保明 (1910—1988)①、高国士 (1919—2003)②、刘应明③、王国俊④、王戍堂、方嘉琳、杨守廉、戴牧民、蒋继光、吴利生等前辈始于 20 世纪 70 年代的科研实践与研究生培养工作.

---

① 蒲保明. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第一卷). 南京: 江苏教育出版社, 1994, 199–205.
② 高国士. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第三卷). 南京: 江苏教育出版社, 1998, 287–297.
③ 刘应明. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第四卷). 南京: 江苏教育出版社, 2000, 560–577.
④ 王国俊. 见: 程民德主编. 中国现代数学家传 (第五卷). 南京: 江苏教育出版社, 2002, 569–582.

高国士老师出生于中国历史上极不平凡的 1919 年, 一生历尽坎坷, 见证了 20 世纪难以计数的人间百态, 以坚忍不拔的意志, 创造了骄人的业绩, 是覆盖性质与广义度量空间理论卓有成效的探索者, 特别是自 20 世纪 70 年代末以来在国内积极推崇由 P. S. Alexandroff (1896—1982) 开创 [5]、 A. V. Arhangel'skiĭ [21] 等继承的 "映射与空间相互分类" 的思想, 影响和带动了一批中青年数学工作者投身于该方向的研究, 为国内近 30 年来一般拓扑学的发展做出了奠基性的贡献.

提起点集拓扑学或拓扑空间理论, 在 F. Hausdorff 的划时代著作 *Grundzüge der Mengenlehre*[181] 出版之后, 不同年代的人们自然会想起 N. Bourbaki 的 *Topologie Générale*[57], K. Kuratowski 的 *Topologie*[239], J. L. Kelley 的 *General Topology*[232], 关肇直的《拓扑空间概论》[172], J. Dugundji 的 *Topology*[112], S. Willard 的 *General Topology*[411], 儿玉之宏、永见启应的《位相空间论》[233], J. Nagata 的 *Modern General Topology*[319], R. Engelking 的 *General Topology* [114], 蒋继光的《一般拓扑学专题选讲》[211] 等一批又一批各具风格的著作. 它们影响了一代又一代学子的拓扑学旅程. 本人在此向读者们, 尤其是年轻的数学工作者, 推荐高国士老师的《拓扑空间论》, 主要的理由是《拓扑空间论》集中代表了高国士老师从 20 世纪 60 年代起致力于一般拓扑学研究所取得的主要成果, 既反映了历史的脉络又具有鲜明的时代特色, 充分体现了高国士老师 "不回避难题以经受锻练、不无目的地引入新空间而致力于存在问题求解" [142] 的学术风格. 虽然在 "覆盖性质"、"广义度量空间" 等研究方向已有不少优秀的著作或教科书问世 [24, 69, 166, 309], 但该书在材料的处理上颇具特点, 它借鉴美国 "Moore 教学法" (R. L. Moore, 1882—1974) 的思想, 重视启发积极思维, 鼓励读者自己探索, 尽情展示 "映射" 在研究拓扑空间理论中的作用, 注重刻画我国拓扑学工作者的突出贡献, 引导读者快速地进入学科前沿.

高国士老师曾对该书做过校正, 希望能在再版中更正. 受高国士老师子女的委托, 本人主持该书的修订和再版事宜. 修订工作主要依据本人学习和在福建师范大学、宁德师范高等专科学校和漳州师范学院讲授该书的体会, 同时吸收了师兄、苏州大学恽自求教授、葛英教授, 广西大学陈海燕教授, 漳州师范学院李克典教授等多年来使用该书的经验和建议. 《拓扑空间论》第二版力求秉承原书的研究风格与学术思想, 在高国士老师校正的基础上对部分内容做了修饰, 核实了绝大多数概念、结果的文献出处, 补充了覆盖性质与广义度量空间理论的若干新进展. 在第二版中若存在不当之处, 均由本人负责.

今年恰逢高国士老师 90 岁诞辰, 谨以此书的再版表达我们对高国士老师的怀念. 高国士老师一再告诫: 科研工作, 除了 "才" 与 "学" 外, 更要强调 "识", "识" 具有战略意义. 高国士老师的教诲、精神与情操已融入苏州的小桥流水之中, 洒进了我们的心田, 其人格魅力将继续伴随、并永远激励我们不断努力工作.

本次的修订和出版工作得到国家自然科学基金项目 "覆盖方法及其在粗糙集

理论中的应用" (项目编号 10571151) 的资助. 在此对所有关心《拓扑空间论》第二版出版的同行们, 特别是高国士老师的子女及我在四川大学和漳州师范学院的研究生们给予的支持与帮助, 表示衷心的感谢.

林 寿①

2008 年 1 月

于漳州师范学院数学与信息科学系

① 通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城区蕉城南路宁德师范高等专科学校数学研究所.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

第一版序

本书是作者 1979 年开始招收一般拓扑学硕士研究生以来所用教材经过历年修改、补充而成, 是拓扑空间理论方面的专著.

本书前四章是拓扑空间论的基础知识, 自成体系. 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学系高年级学生及其他有关学科学生阅读. 后四章是一般拓扑学中两大课题 "覆盖性质" 与 "广义度量空间" 的深入研究, 希望能导向该课题的研究前沿, 可作为一般拓扑学的硕士、博士研究生的教材或参考书.

作者在 60 年代初致力于 "覆盖性质" 与 "广义度量空间" 的研究, 特别是 70 年代、80 年代间这方面的研究在国内外蓬勃开展, 作者身历其境, 有必要, 也有责任在介绍、评述国外学者成果时, 组织、纳入国内学者的成果以激励士气, 共攀科学高峰.

由各种不同背景产生的形形色色的拓扑空间呈分散、孤立的状态是很自然的. 通过适当的映射, 找出其间内在联系, 改变其呆滞状态使之出现生动活泼场面是行之有效的. 充分利用映射这一 "工具" 是本书的特点. 事实上本书是 Arhangel'skiĭ "映射与空间" 理论的发展和应用.

为了集中精力于上述两课题并由于作者知识有限, 一般拓扑学的其他课题如基数函数、箱拓扑、集论公理的引用等均未涉及. 与上述二课题有联系的可膨胀空间、Σ 积的正规性等问题有蒋继光的专著《一般拓扑学专题选讲》作专门研究, 本书也未涉及. 相应的有关论文均未录入参考文献.

在严谨的逻辑推导的同时, 适当照顾可接受性. 对书中久未引用的概念, 常以回忆方式提一下以便阅读.

习题是精心配置的. 有巩固教材的, 有补充、扩充教材的, 有些是定理证明要用到的简单结果, 有些是分散在教材各处的类似概念的汇集, 可资比较. 对教材中很少出现的概念 (如正则闭集、紧开拓扑), 配些简单练习让读者熟悉一下. 有少数较难的, 如证不出知道这结果也好 (有兴趣的读者可查所引论文).

作者才疏学浅, 耄耋著书. 希望能嘉惠后学而已. 脱漏、不足之处, 海内同行, 不吝指正.

陈必胜、葛英副教授及张建平、蔡伟元、杨晓华、蒋彤敏同志抄写、校对、复印全部稿件, 恽自求教授组织、安排整个出版事宜, 谨此致谢. 特别感谢苏州大学

数学系的资助. 不然, 本书是难以和读者见面的.

高国士

1999 年 6 月

于苏州大学数学科学学院

目　　录

预 备 知 识

0.1 集、关系和映射

两个**集** (set) A, B 的**并** (union)、**交** (intersection) 及**差** (difference) 分别表示为

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$
$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

这里 "$\in$"、"$\notin$" 分别表示 "**属于**"、"**不属于**". **空集** (empty set) 用 $\varnothing$ 表示, $A \cap B = \varnothing$ 表示集 A 与集 B 不交; $A - B = \varnothing$ 表示 $A \subset B$, 也就是 $x \in A \Rightarrow x \in B$. 符号 "$\Rightarrow$" 表示 "蕴含". 符号 "$\Leftrightarrow$" 表示 "当且仅当". $A \subset B$ 时称为 A 是 B 的**子集** (subset). 如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ 称为 A 是 B 的**真子集** (proper subset), 记作 $A \subsetneq B$. 空集是任何集的子集.

以集为元素的集成为**集族**, 或简称为**族** (family 或 collection), 用花体字母表示, 如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 等. 为了表示集族常利用**指标集** (index set), 如集族 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, 或写作 $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, 这里 Γ 是指标集. 由集组成的序列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$ 为集族的特例, 这时可表示为 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 或写作 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, 这里指标集是正整数集 $\mathbb{N}$, 或省去指标集记为 $\{A_n\}$ 或 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. 集族的并、交可表示为 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$、$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$; 在集的序列情况则为 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (或 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$)、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (或 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$). 本书不讨论空集族的交集, 当说到有限个集的交时也自动排除 0 个集的交集.

设 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是 X 的子集族, B 是 X 的子集, 则下列等式成立:

(i) $B \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma}(B \cup A_\gamma)$,

$B \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}(B \cap A_\gamma)$;

(ii) $X - (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma}(X - A_\gamma)$,

$X - (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}(X - A_\gamma)$.

(i) 称为**分配律** (distributive law), (ii) 称为 **de Morgan 公式** (de Morgan formula). 在通常讨论时, 所涉及的集都是某一给定集 X 的子集, 则对 $B \subset X$, 差集 $X - B$ 也称为 B 关于 X 的**补集** (complement). 从而上述 de Morgan 公式可叙述为: 并集的补集 = 补集的交集, 交集的补集 = 补集的并集.

给定集 X 与 Y, X 的元素 a 与 Y 的元素 b 形成的所有**有序对** (ordinal pair) (a, b) 组成的集称为 X 与 Y 的**积** (product), 记作

$$X \times Y = \{(a,b) : a \in X,\ b \in Y\}.$$

$X \times Y$ 的每一子集 R 称为**关系** (relation), 对每一个 $(a,b) \in R$, 记作 aRb. 关系 $f \subset X \times Y$ 称为 X 到 Y 内的**映射** (mapping), 如果对每一个 $x \in X$, 存在 $y \in Y$, 使 $(x,y) \in f$, 且 y 为 x 所惟一确定, 也就是 $(x,y) \in f$ 及 $(x,y') \in f \Rightarrow y = y'$. 以 $f : X \to Y$ 表示这一映射, 被 x 所确定的 y 记作 $f(x)$. 上述映射也可表示为 $f : x \mapsto f(x)$, $x \in X$, $f(x) \in Y$. 集 $A \subset X$ 在映射 f 下的**像** (image) 为集

$$f(A) = \{y : y = f(x),\ x \in A\}.$$

集 $B \subset Y$ 在映射 f 下的**逆像** (inverse image) 或**原像** (preimage) 为集

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

集 $X, f(X)$ 分别称为映射 f 的**定义域**、**值域**.

映射 $f : X \to Y$ 称为**单映射** (injective mapping), 如果 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$; 称为**满映射** (surjective mapping), 如果 $f(X) = Y$, 这时也称 f 是由 X **到** Y **上的** (onto) 映射. 如果既是单映射又是满映射, 则称为**一一对应映射** (bijective mapping), 这时可定义**逆映射** (inverse mapping) $f^{-1} : Y \to X$ 满足 $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

集在映射 f 下的像和逆像有下列关系式:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B, \qquad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

当 f 是满映射时, 有 $f(f^{-1}(B)) = B$; 当 f 是单映射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

设 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ 是一集族, 由指标集 $\varGamma$ 到 $\bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$ 的满足 $f(\gamma) \in A_\gamma$ $(\gamma \in \varGamma)$ 的映射 f 的全体表示为 $\prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$, 称为**集族** $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ **的积** (product of families). 对每一 $f \in \prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$, $f(\gamma) \in A_\gamma$ 称为 f 的第 γ 个**坐标** (coordinate), 记作 $f(\gamma) = x_\gamma$, 这样 $\prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$ 的元素 f 可以用所有的坐标 $x_\gamma(\gamma \in \varGamma)$ 表示, 记作 $\{x_\gamma\}$, 或 $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ (有必要注明指标集或避免引起混乱时). $\prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$ 到 A_γ 的映射 $\boldsymbol{p}_\gamma$ 使对每一 $\{x_\gamma\} \in \prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$, $p_\gamma(\{x_\gamma\}) = x_\gamma$, 这一映射称为 $\prod_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$ 到 A_γ 的**投影** (projection).

关系 $R \subset X \times X$ 称为 X 上的关系. X 上的关系称为**等价关系** (equivalence relation), 如果满足下列条件:

(i) 对每一 $x \in X, xRx$ (自反性);

(ii) 如果 xRy, 则 yRx (对称性);

(iii) 如果 xRy 及 yRz, 则 xRz (传递性).

设 $X = \bigcup_{\gamma \in \varGamma} A_\gamma$, 且 $\gamma \neq \gamma' \Rightarrow A_\gamma \cap A_{\gamma'} = \varnothing$, 则称 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \varGamma}$ 是 X 的一个**分解** (decomposition). X 上的等价关系 R 确定着 X 的一个分解: x, y 同属于 A_γ, 当且仅当 xRy; 相反, X 的一个分解确定着 X 上的等价关系 R: xRy 当且仅当对某一 $\gamma \in \varGamma$, $x, y \in A_\gamma$.

X 上的关系 $<$ 称为 X 上的**线性序** (linear order) 或**全序** (total order), 如果满足下列条件:

(i) 如果 $x \neq y$, 则 $x < y$ 或 $y < x$;

(ii) 如果 $x < y$, 则 $y < x$ 不能成立 (反对称性);

(iii) 如果 $x < y$, $y < z$, 则 $x < z$.

赋以线性序 (或全序) $<$ 的集 X 称为**线性序集** (linearly ordered set)、**全序集** (totally ordered set) 或**链** (chain), 有时记作 $(X, <)$. 点 $x_0 \in X$ 称为线性序集 X 的**最小元** (minimum element)(**最大元** (maximum element)), 如果对每一 $x \in X - \{x_0\}$, $x_0 < x$ $(x_0 > x)$.

线性序集 X 称为**良序集** (well-ordered set), 如果 X 的任何非空子集具有最小元.

线性序集 $(X, <)$ 到线性序集 $(Y, <')$ 上的一一对应映射称为**保序的** (order preserving), 如果对任意 $x, x' \in X$, $x < x' \Rightarrow f(x) <' f(x')$.

X 上的关系 $\leqslant$ 称为 X 上的一个**序** (order) 或**偏序** (partial order), 如果满足下列条件:

(i) 对每一 $x \in X, x \leqslant x$;

(ii) 如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant x$, 则 $x = y$;

(iii) 如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$.

赋以序或偏序 $\leqslant$ 的集称为**有序集** (order set) 或**偏序集** (partially ordered set), 有时记作 $(X, \leqslant)$.

设集 X 上具有线性序 $<$, 可对任意的 $x, y \in X$ 规定:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \quad \text{或} \quad x = y,$$

则得到 X 上的序 $\leqslant$. 所以每一线性序集可以作为有序集.

设集 X 上具有序 $\leqslant$, 如果对 X 的某子集 A 的任意两点 x, y 有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 可以规定:

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \quad \text{及} \quad x \neq y,$$

这样得到 A 上的线性序 $<$, 集 A 是有序 (偏序) 集 X 的线性序 (全序) 子集或链.

有序 (偏序) 集 X 的元素 μ 称为集 $A \subset X$ 的**上界** (upper bound), 如果对每一 $x \in A$, $x \leqslant \mu$; 称为集 A 的**上确界** (supremum), 如果 μ 是 A 的上界且对 A 的任一上界 ν 都有 $\mu \leqslant \nu$. **下界** (lower bound) 与**下确界** (infimum) 的定义是类似的. 上确界、下确界分别用 sup, inf 表示.

有序 (偏序) 集 X 的元素 m 称为 X 的**极大元** (maximal element), 如果 $m \leqslant x \in X \Rightarrow m = x$.

对线性序集 $(X, <)$ 及 $a, b \in X$, 分别称集合

$$\{x \in X : a < x < b\} \quad 与 \quad \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}$$

为以 a, b 为端点的**开区间** (open interval) 与**闭区间** (closed interval), 并且分别记为 (a,b) 与 $[a,b]$; 类似可以定义**半开区间** (half-open interval)、**半闭区间** (half-closed interval) $(a,b]$ 与 $[a,b)$. 对 $a \in X$, 记

$$(-\infty,a) = \{x \in X : x < a\}, \quad (a,+\infty) = \{x \in X : a < x\}$$

称为 X 的**开射线** (open ray); 类似可以定义**闭射线** (closed ray) $(-\infty,a]$ 与 $[a,+\infty)$. 如果 X 有最小元 a_0, 则 $(-\infty,a) = [a_0,a)$; 如果 X 有最大元 b_0, 则 $(a,+\infty) = (a,b_0]$.

0.2 基数与序数

集 X,Y 称为**等势的** (equipotent), 如果存在由 X 到 Y 上的一一对应映射. 对每一集 X 给以一个**基数** (cardinal number) $|X|$, 使 $|X| = |Y|$ 当且仅当 X,Y 是等势的. 有限集的基数定义为此集的元素的个数, 称为有限基数; 相反的情况称为无限基数. 所有正整数所成集 $\mathbb{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$, 即 $|\mathbb{N}| = \aleph_0$; 所有实数所组成集 $\mathbb{R}$ 的基数称为**连续统的势** (cardinal number of continuum), 记作 $\mathbf{c}$, 即 $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$. 一个集是**可数的** (countable), 当且仅当它是有限集或具有基数 $\aleph_0$.

关于基数的和与积规定如下: 两个基数 m, n **的和** (sum of cardinal numbers) $m+n$ 规定为集 $X \cup Y$ 的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$ 且 $X \cap Y = \varnothing$. m, n **的积** (product of cardinal numbers) mn 规定为集 $X \times Y$ 的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$. 对每一基数 m, 2^m 规定为集 X 的一切子集所成集族的基数, 这里 $|X| = m$. 可以证明 $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$. 更一般地, 可以规定 n^m 为所有 X 到 Y 内的映射所成集的基数, 这里 $|X| = m$, $|Y| = n$. 可以证明:

$$n^{m_1+m_2} = n^{m_1} \cdot n^{m_2},$$
$$(n_1 \cdot n_2)^m = n_1^m \cdot n_2^m,$$
$$(n^{m_1})^{m_2} = n^{m_1 \cdot m_2}.$$

关于两个基数大小规定如下: 设 m,n 是两个基数, $|X| = m$, $|Y| = n$, 规定 $m \leqslant n$ (或 $n \geqslant m$), 如果存在由 X 到 Y 内的单映射. 由 **Cantor-Bernstein 定理**: $m \leqslant n$ 及 $n \leqslant m \Rightarrow m = n$. $\aleph_0$ 是**最小的无限基数** (minimal infinite cardinal number). 两个基数, 如果至少有一个是无限基数, 则它们的和或积等于其中非较小的一个 (在积的情况这两个基数都异于零), 特别有

$$m + m = mm = m, \quad m \geqslant \aleph_0.$$

如果 $m \leqslant n$ 且 $m \neq n$, 则规定 $m < n$ (m 小于 n). 可以证明, 对每一个基数 m, 有 $m < 2^m$, 特别有 $\aleph_0 < \mathbf{c}$. **最小的不可数基数** (minimal uncountable cardinal

number) 记作 $\aleph_1$. 设有基数的任意集合 $\{m_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 且 $|\Lambda| < m$, 每一 $m_\alpha < m$, 如有 $\sum_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha < m$ 时, 则称基数 m 是**正则基数** (regular cardinal number). 例如, $\aleph_0$, $\aleph_1$ 都是正则基数.

显然, $\aleph_1 \leqslant \mathbf{c}$. 假设 $\aleph_1 = \mathbf{c}$ 称为**连续统假设** (continuum hypothesis), 简记为 CH.

线性序集 X, Y 称为**相似的** (similar), 如果存在由 X 到 Y 上的保序映射. 对每一线性序集给一个**序型** (order type) $o(X)$, 使 $o(X) = o(Y)$ 当且仅当 X, Y 是相似的. 良序集的序型称为**序数** (ordinal).

两个序数 α, β 的大小规定如下: 设 $o(X) = \alpha$, $o(Y) = \beta$, 如果存在 $y_0 \in Y$, 使 X 与集 $\{y : y \in Y,\ y < y_0\}$ 是相似的, 则称 α 小于 β 或 β 大于 α, 记作 $\alpha < \beta$ 或 $\beta > \alpha$. 可以证明序数所成集按关系 $<$ 是良序的.

规定空集 $\varnothing$ 的序数为 0, 这是最小的序数. 有限良序集的序数规定为此集的元素的个数, 称为**有限序数** (finite ordinal number); 相反的情况称为**无限序数** (infinite ordinal number). 正整数集 $\mathbb{N}$ 按自然顺序是良序的, 规定 $o(\mathbb{N}) = \omega$, 这是**最小的无限序数** (minimal infinite ordinal number).

对序数 α, 称序数 $\alpha + 1$ 为 α 的**后继者** (successor), 这时 α 称为 $\alpha + 1$ 的**前趋者** (predecessor). 0 以及存在前趋者的序数称为**孤立序数** (isolated ordinal), 其他序数称为**极限序数** (limit ordinal).

由于保序映射是一一对应映射, 所以 X, Y 相似蕴含 X, Y 等势, 即

$$o(X) = o(Y) \Rightarrow |X| = |Y|.$$

所以每一序数 α 有一个基数与之对应称为序数 α 的基数, 记作 $|\alpha|$. 当 $|\alpha| \leqslant \aleph_0$ 时, 称 α 是**可数序数** (countable ordinal number); 相反的情况称为**不可数序数** (uncountable ordinal number). ω 是最小的可数 (无限) 序数, $|\omega| = \aleph_0$; **最小的不可数序数** (minimal uncountable ordinal number) 记作 ω_1, $|\omega_1| = \aleph_1$.

设序数 $\alpha_i < \omega_1 (i = 1, 2, \cdots)$, 则可以证明 $\sup\{\alpha_i : i = 1, 2, \cdots\} < \omega_1$, 也就是存在序数 $\alpha < \omega_1$, 使 $\alpha_i < \alpha$ 对 $i = 1, 2, \cdots$ 成立.

序数的加法定义如下: 设 α, β 为序数, 取良序集 X, Y, 使 $o(X) = \alpha$, $o(Y) = \beta$ 并且 $X \cap Y = \varnothing$. 在集合 $X \cup Y$ 上定义良序如下: 任意 $x, y \in X \cup Y$, 如果 $x, y \in X$ 或者 $x, y \in Y$, 则 x, y 保持它们原来的大小; 如果 $x \in X$, $y \in Y$, 则规定 $x < y$. 定义 $\alpha + \beta = o(X \cup Y)$.

可以证明对任意序数 $\alpha > 0$, 区间 $[0, \alpha)$ 的序数是 α (习题 0.7). 因此我们往往对记号 α 与 $[0, \alpha)$ 不加区别, 特别是对任意序数 α, $\beta > 0$, $\alpha \times \beta$ 总是表示区间 $[0, \alpha)$ 与 $[0, \beta)$ 的乘积, 即

$$\alpha \times \beta = \{(x, y) : x \in [0, \alpha),\ y \in [0, \beta)\}.$$

0.3 超限归纳法与选择公理

超限归纳法 (transfinite induction). 设对每一序数 α, 给定命题 $P(\alpha)$. 如果下列论断成立, 则 $P(\alpha)$ 对所有序数 α 都正确: (1) 对 $\alpha = 0$, $P(0)$ 是正确的; (2) 对于 $\alpha < \alpha_0$ 的任意序数 α, 如果 $P(\alpha)$ 是正确的, 则 $P(\alpha_0)$ 是正确的.

以上的证明方法称为超限归纳法. 下面叙述一些常见的**选择公理** (axiom of choice), 它们等价性的证明可以参见文献 [114].

(i) **Zermelo 公理**. 对每一非空集的集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 存在着一个由 Γ 到 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的映射 f 使对每一 $\gamma \in \Gamma$, $f(\gamma) \in X_\gamma$.

(ii) **Zermelo 定理 (良序化定理)**. 任何集可按某个线性序使成为良序集.

(iii) **Zorn 引理**. 如果有序 (偏序) 集 X 的每一链都有上界, 则 X 具有极大元.

集族 $\mathscr{A}$ 称为具有**有限特征** (finite character) 的, 如果 A 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 A 的每一有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素.

(iv) **Tukey 引理**. 每一具有有限特征的集族有极大元 (关于关系 $\subset$), 即存在 $A_0 \in \mathscr{A}$, 使对任何 $A \in \mathscr{A}, A_0 \subset A \Rightarrow A_0 = A$.

习 题 0

0.1 设 $f : X \to Y$ 是映射, $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$. 下面的等式是否成立? 对 “=” 不成立的式子, 改 “=” 为 “$\subset$” 是否成立? 对怎样的映射等式一定成立?

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(iii) $f(A - B) = f(A) - f(B)$;

(iv) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

(v) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

(vi) $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$.

0.2 设映射 $f : X \to Y$. 若 $A \subset X$, $C \subset Y$, 证明:

(i) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$;

(ii) $f(A - f^{-1}(B)) = f(A) - B$.

0.3 设映射 $f : X \to Y$, 且 A, C 分别是 X, Y 的子集, 则 $f^{-1}(C) \subset A \Leftrightarrow C \subset Y - f(X - A)$.

0.4 证明全序集 A 是良序集当且仅当在 A 中不存在严格单调递减的序列, 并且由此证明任何一个无限序数都可以写出 $\alpha + n$ 的形式, 其中 α 是极限序数, n 是 0 或者正整数.

0.5 证明 $\omega + 1 > \omega$, 但是 $1 + \omega = \omega$, 由此可以看出序数的加法没有可交换性.

0.6 证明所有可数序数构成的良序集的序数是 ω_1.

0.7 用超限归纳法证明: 对任何序数 α, 区间 $[0, \alpha)$ 的序数是 α.

0.8 证明选择公理与下述命题等价: 对于任意非空集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\Gamma \neq \varnothing$, 积集 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \neq \varnothing$.

第 1 章　拓扑空间概念

分析学中广泛地引用着连续、极限的概念, 但这些概念的本质的探讨应属于**一般拓扑学**(General Topology). 一般拓扑学主要是研究拓扑空间的自身结构及其间的连续映射的学科.

G. Cantor 于 1895 年、1897 年的论文建立了集的理论, 这导致了 20 世纪早期 F. Hausdorff, M. Fréchet, C. Kuratowski 等数学家对拓扑空间概念的建立, 而一般拓扑学进一步发展的基础的奠定主要归功于 P. Urysohn, P. Alexandroff 及 A. Tychonoff 等. 1960 年, P. Alexandroff [4] 的综合论文详尽地介绍了一般拓扑学的历史概述及近代发展. 关于一般拓扑学的历史及拓扑学家的贡献可阅读 C. E. Aull 和 R. Lowen 主编的 *Handbook of the History of General Topology* [33, 34, 35].

分析学中的连续、极限概念通常用邻域、开集描述, 这里首先以开集概念定义拓扑空间, 然后导向邻域、闭集等概念.

1.1　拓扑的引入

定义 1.1.1　设有集 X, 设 $\mathscr{T}$ 是 X 的子集所成的集族满足:

(O1) $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;

(O2) 如 $U_i \in \mathscr{T}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathscr{T}$;

(O3) 如 $U_\gamma \in \mathscr{T}(\gamma \in \varGamma)$, 则 $\cup\{U_\gamma : \gamma \in \varGamma\} \in \mathscr{T}$,

这里指标集 $\varGamma$ 可以是无限集, 则称 $(X, \mathscr{T})$ 是**拓扑空间** (topological space). $\mathscr{T}$ 是此空间的**拓扑** (topology), $\mathscr{T}$ 的元素称为**开集** (open set). 在没有必要指出 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 时, 通常简单地用 X 表示拓扑空间.

定义 1.1.2　设 $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ 是集 X 上的两个拓扑, 且 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, 则称拓扑 $\mathscr{T}$ 比拓扑 $\mathscr{T}'$ **粗** (coarse) 或拓扑 $\mathscr{T}'$ 比拓扑 $\mathscr{T}$ **精** (fine).

数直线 $\mathbb{R}$ 上的开集 (可以表示为可数个开区间的并) 族形成 $\mathbb{R}$ 上的**通常拓扑** (usual topology).

n **维欧几里得空间** (Euclidean space) $\mathbb{R}^n$ 中两点, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 间的距离

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

置 $S_\varepsilon(x)=\{y:y\in\mathbb{R}^n,\ \rho(x,y)<\varepsilon\}$ (以 x 为中心、以 ε 为半径的开球), 则

$$\mathscr{T}=\{U:U\subset\mathbb{R}^n,\ \text{对每一 } x\in U \text{ 及某 } \varepsilon>0 \text{ 使 } S_\varepsilon(x)\subset U\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑, 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**通常拓扑** (usual topology) 或**欧几里得拓扑** (Euclidean topology).

以下称空间 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^n$ 时都是指通常拓扑而言.

设集 X 上的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 仅由空集 $\varnothing$ 及 X 组成, 则称这拓扑 $\mathscr{T}_1$ 为**平凡拓扑** (indiscrete 或 trivial topology), 是最粗的拓扑. 设 $\mathscr{T}_2$ 是由 X 的一切子集组成, 则称此拓扑 $\mathscr{T}_2$ 为**离散拓扑** (discrete topology), 是最精的拓扑. 具有离散拓扑的空间称为**离散空间** (discrete space).

定义 1.1.3　设 X 是拓扑空间, $x\in X$. 如果 X 的子集 U 包含着某一开集, 这开集包含着点 x, 则称 U 是 x 的**邻域** (neighborhood); 如果 U 是开集且 $x\in U$, 则称 U 是点 x 的**开邻域** (open neighborhood).

数直线 $\mathbb{R}$ 上的开区间是这区间内任一点的开邻域, 闭区间是除这区间的端点外的这区间内任一点的邻域. n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 $S_\varepsilon(x)$ 是点 x 的 (ε) 开邻域, 也是 $S_\varepsilon(x)$ 中每一点的开邻域. 任何包含着 $S_\varepsilon(x)$ 的集是 $S_\varepsilon(x)$ 中每一点的邻域.

定理 1.1.1　设 $\mathscr{U}(x)$ 是点 $x\in X$ 的所有邻域所成集族, 则满足:

(N1) $X\in\mathscr{U}(x)$;

(N2) 如 $U\in\mathscr{U}(x)$, 则 $x\in U$;

(N3) 如 $U\in\mathscr{U}(x), V\supset U$, 则 $V\in\mathscr{U}(x)$;

(N4) 如 $U,V\in\mathscr{U}(x)$, 则 $U\cap V\in\mathscr{U}(x)$;

(N5) 如 $U\in\mathscr{U}(x)$, 则存在集 V 使 $x\in V\subset U$ 及对任何 $x'\in V$, $V\in\mathscr{U}(x')$.

证明　条件 (N1)~(N3) 是定义 1.1.3 的直接结果, 条件 (N4) 可由定义 1.1.3 及 (O2) 导得. 下证条件 (N5). 设 $U\in\mathscr{U}(x)$, 由邻域的定义 (定义 1.1.3), 存在开集 V 使 $x\in V\subset U$, 开集 V 是它的任意点 x' 的邻域, 这就是 $V\in\mathscr{U}(x')$ $(x'\in V)$. 证完.

定理 1.1.2　拓扑空间 X 中的子集 U 是开集当且仅当 U 是它的每一点的邻域.

证明　必要性是显然的. 相反, 对每一 $x\in U$, 由邻域的定义 1.1.3, 存在开集 $V(x)$, 使 $x\in V(x)\subset U$, 从而 $U=\cup\{V(x):x\in U\}$, 这说明 U 可以表示为某些开集的并, 由拓扑空间的定义 1.1.1 的 (O3) 知 U 是开集. 证完.

以上的定义 1.1.1 是以开集为原始概念定义拓扑空间, 下面我们用邻域为原始概念定义拓扑空间.

设对集 X 的每一点 x 确定了一个子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件 (N1)~(N5), 我们称 $\mathscr{U}(x)$ 的元素为点 x 的邻域, 然后利用定理 1.1.2 定义开集, 由 (N1), (N4) 及 (N3)

所定义的开集族满足拓扑空间的定义 1.1.1 的 (O1), (O2) 及 (O3), 从而 X 形成拓扑空间. 这里是以邻域作为原始概念, 由此出发定义拓扑空间.

下面我们导向闭集概念.

定义 1.1.4 拓扑空间 X 的子集 F 称为**闭集** (closed set), 如果 $X-F$ 是开集.

定理 1.1.3 拓扑空间 X 的所有闭子集 F 形成的集族 $\mathscr{F}$ 满足下列条件:

(F1) $\varnothing\in\mathscr{F}$, $X\in\mathscr{F}$;

(F2) 如 $F_i\in\mathscr{F}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\bigcup_{i=1}^n F_i\in\mathscr{F}$;

(F3) 如 $F_\gamma\in\mathscr{F}$ $(\gamma\in\Gamma)$, 则 $\cap\{F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\in\mathscr{F}$,

这里指标集 Γ 可以是无限集.

证明 这里只证明 (F3), 其他类似. 由 de Morgan 公式

$$X-\cap\{F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}=\cup\{X-F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

因为 F_γ 是闭集, 所以 $X-F_\gamma$ 是开集, 由定义 1.1.1, 上式右端是开集, 从而左端是开集. 由定义 1.1.4, $\cap\{F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 是闭集. 证完.

由上述定理, 我们可以用满足 (F1)~(F3) 的子集族确定 X 上的拓扑. 下面定理的证明留给读者.

定理 1.1.4 设 $\mathscr{F}$ 是集 X 的子集族满足条件 (F1)~(F3), 则 $\mathscr{F}$ 正好是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中所有闭集形成的集族, 这里 $\mathscr{T}=\{X-F:F\in\mathscr{F}\}$.

拓扑空间 X 的子集 A 称为 $\boldsymbol{G_\delta}$ **集** ($\boldsymbol{F_\sigma}$ **集**), 如果 A 是可数个开 (闭) 集的交 (并) 集.

1.2 开基与邻域基

定义 1.2.1 拓扑空间 X 中的开集族 $\mathscr{U}$ 称为这空间的**开基** (或简称为**基**, base), 如果每一开集可以表示为 $\mathscr{U}$ 中某些元素的并; 开集族 $\mathscr{V}$ 称为这空间的**次开基** (或简称为**次基**, subbase), 如果 $\mathscr{V}$ 中元素的有限交全体形成这空间的基.

定理 1.2.1 开集族 $\mathscr{U}$ 是开基当且仅当对每一开集 V 及每一点 $x\in V$, 存在 $U\in\mathscr{U}$, 使 $x\in U\subset V$.

证明留给读者.

关于空间 $\mathbb{R}$, 可以取所有开区间 (a,b) 所成集族为开基, 这里 a,b 是实数 $(a<b)$, 特别可取 a,b 都是有理数的情况; 可以取所有形如 $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ 的区间所成的集族为次开基, 这里 a,b 是实数, 当然也都可以是有理数.

定理 1.2.2 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的开基, 则 $\mathscr{U}$ 满足:

(B1) 如 $U_1,U_2\in\mathscr{U}$ 及 $x\in U_1\cap U_2$, 则存在 $U_3\in\mathscr{U}$, 使 $x\in U_3\subset U_1\cap U_2$;

(B2) $\cup\{U : U \in \mathscr{U}\} = X$.
相反, 设 X 是一集, $\mathscr{U}$ 是 X 的子集所成集族满足 (B1) 和 (B2), 置

$$\mathscr{T} = \{\cup\mathscr{V} : \mathscr{V} \subset \mathscr{U}\},$$

则 $\mathscr{T}$ 满足 (O1)~(O3), 从而 X 是拓扑空间以 $\mathscr{U}$ 为开基.

证明　由定义 1.2.1, 这定理的前半部分是明显的, 现证明后半部分.

由于空集族之并集是 $\varnothing$, 再由 (B2) 得 (O1). 由 $\mathscr{T}$ 的定义, 显然满足 (O3). 现证 $\mathscr{T}$ 满足 (O2), 由 (B1) (引用 $n-1$ 次), 可得.

设 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathscr{U}$ 且 $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, 则存在 $U \in \mathscr{U}$, 使

$$x \in U \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i. \tag{1.2.1}$$

现在设 $V_1, V_2, \cdots, V_n \in \mathscr{T}$ 且 $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$, 则 $x \in V_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由于每一 V_i 是 $\mathscr{U}$ 中集的并, 所以存在 $U_i \in \mathscr{U}$ 使 $x \in U_i \subset V_i$. 结合 (1.2.1) 式, 知存在 $U \in \mathscr{U}$, 使 $x \in U \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$. 这说明 $\bigcap_{i=1}^n V_i$ 可以表示为 $\mathscr{U}$ 中元素的并, 所以 $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathscr{T}$. 这证明了 $\mathscr{T}$ 满足 (O2). 此外, 显然 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的开基. 证完.

注记　设 $\mathscr{V}$ 是拓扑空间 X 的次开基, 则 $\mathscr{V}$ 满足上面的 (B2); 相反, 设 X 是一集, $\mathscr{V}$ 是 X 的子集所成集族满足 (B2), 置 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{V}$ 中集的有限交的全体所形成的集族, 则 $\mathscr{U}$ 满足 (B1) 和 (B2), 从而 $\mathscr{V}$ 是 X 上某一拓扑的次开基, 即若让 $\mathscr{T}$ 为 $\mathscr{U}$ 中集的并集全体所形成的集族, 则 X 是拓扑空间以 $\mathscr{V}$ 为次开基.

定义 1.2.2　设 x 是拓扑空间 X 中的一点, 点 x 的邻域所成的集族 $\mathscr{B}(x)$ 称为点 x 的**邻域基** (neighborhood base), 如果对 x 的每一个邻域 U, 存在 $V \in \mathscr{B}(x)$, 使 $x \in V \subset U$.

定理 1.2.3　设 $\mathscr{B}(x)$ 是拓扑空间 X 中点 x 的邻域基, 则满足下列条件:

(NB1) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$;

(NB2) 如 $U \in \mathscr{B}(x)$, 则 $x \in U$;

(NB3) 如 $U \in \mathscr{B}(x)$ 及 $V \in \mathscr{B}(x)$, 则存在 $W \in \mathscr{B}(x)$, 使 $W \subset U \cap V$;

(NB4) 如 $U \in \mathscr{B}(x)$, 则存在集 V 使 $x \in V \subset U$, 且对每一 $x' \in V$, 存在 $W \in \mathscr{B}(x')$ 满足 $W \subset V$.

证明留给读者.

在定义拓扑空间时, 可以用邻域基代替整个邻域族.

定理 1.2.4　设 X 是一集, 对每一 $x \in X$ 确定一由 X 的子集所成的集族 $\mathscr{B}(x)$ 满足条件 (NB1)~(NB4), 置

$$\mathscr{U}(x) = \{U : U \supset V, \text{ 对某些 } V \in \mathscr{B}(x)\},$$

则 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件 (N1)~(N5). 这样 X 是拓扑空间以 $\mathscr{U}(x)$ 为点 x 的所有邻域的族, 以 $\mathscr{B}(x)$ 为点 x 的邻域基.

证明留给读者.

在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$, 点 x 的 ε 邻域 $S_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon > 0)$ 全体形成点 x 的邻域基 $\mathscr{B}(x)$, $\mathscr{B}(x)$ 的子族 $\mathscr{B}'(x) = \{S_{1/n}(x) : n = 1, 2, \cdots\}$ 也形成点 x 的邻域基. 易知 $\cup\{\mathscr{B}(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 及 $\cup\{\mathscr{B}'(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的开基. 一般地说, 生成同一拓扑的两个邻域基 (开基) 称为**等价的** (equivalent neighborhood base).

例 1.2.1 (Smirnov 删除序列拓扑 [372]) 在集 $\mathbb{R}^+ = [0, \infty) = \{x : 0 \leqslant x < +\infty\}$ 上给以下述拓扑, 置

$$\mathscr{B}(x) = \begin{cases} \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{R}^+ : \varepsilon > 0\}, & x \neq 0, \\ \{[0, \varepsilon) - \{1, 1/2, 1/3, \cdots\} : \varepsilon > 0\}, & x = 0, \end{cases}$$

则 $\mathscr{B}(x)$ 满足定理 1.2.3 的条件 (NB1)~(NB4), $\mathbb{R}^+$ 成为拓扑空间. 此拓扑不同于数直线 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑, 称为 **Smirnov 删除序列拓扑** (Smirnov's deleted sequence topology).

例 1.2.2 (Niemytzki 半平面 [372]) 取集 $\mathbb{R}'$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的上半平面并包含 x 轴, 即 $\mathbb{R}' = \{(x, y) : y \geqslant 0,\ -\infty < x < +\infty\}$, 置

$$\mathscr{B}(x, y) = \begin{cases} \{S_\varepsilon((x, y)) \cap \mathbb{R}' : \varepsilon > 0\}, & y \neq 0, \\ \{S_\varepsilon((x, \varepsilon)) \cup \{(x, 0)\} : \varepsilon > 0\}, & y = 0, \end{cases}$$

这里 x 轴上的点的邻域是切于此点的开圆连同此点. 则 $\mathscr{B}(x, y)$ 满足条件 (NB1)~(NB4), $\mathbb{R}'$ 成为拓扑空间. 这拓扑不同于 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑, 称为 **Niemytzki 半平面拓扑** (Niemytzki's half-plane topology) 或 **Niemytzki 切圆盘拓扑** (Niemytzki's tangent disc topology).

以上两例是以邻域基定义的拓扑空间.

例 1.2.3 (线性序拓扑 [372]) 设 X 是至少含有两个点的线性序集, 开射线的全体

$$\mathscr{V} = \{(a, +\infty) : a \in X\} \cup \{(-\infty, b) : b \in X\}$$

是 X 上某一拓扑的次开基 (见定理 1.2.2 的注记), 以 $\mathscr{V}$ 为次开基的拓扑称为 X 上的**线性序拓扑** (linearly ordered topology), X 称为**线性序空间** (linearly ordered space). 从而每一开区间 $(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b)$ $(a, b \in X)$ 是开集.

X 的下述类型的子集组成的集族是线性序拓扑的一个开基:

(i) X 的所有开区间 (a, b), $a, b \in X$;

(ii) 如果 X 有最小元 a_0, 所有半开区间 $[a_0, b)$, $b \in X$;

(iii) 如果 X 有最大元 b_0, 所有半开区间 $(a, b_0]$, $a \in X$.

$\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑是线性序空间. 常用的线性序拓扑有良序集上的线性序拓扑, 简称为**序拓扑** (ordered topology), 其拓扑空间简称为**序空间** (ordered space).

对良序集 $[0, \omega_1)$, 如果 $\alpha, \beta < \omega_1$, 则

$$(\beta, \alpha] = (\beta, +\infty) \cap (-\infty, \alpha + 1).$$

所以在序空间 $[0, \omega_1)$ 中, $\{\{0\}\} \cup \{(\beta, \alpha] : 0 \leqslant \beta < \alpha < \omega_1\}$ 是一个开基,

$$\mathscr{B}(\alpha) = \begin{cases} \{\{0\}\}, & \alpha = 0, \\ \{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha\}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

是点 $\alpha \in [0, \omega_1)$ 的一个邻域基. 置

$$\mathscr{T} = \{U \subset [0, \omega_1) : \text{对每一 } \alpha \in U, \alpha > 0 \text{ 及某 } \beta < \alpha, \text{ 使 } (\beta, \alpha] \subset U\};$$

则 $\mathscr{T}$ 是序空间 $[0, \omega_1)$ 的拓扑. 以下称拓扑空间 $[0, \omega_1)$ 时是指序拓扑而言.

1.3　闭包与内核

定义 1.3.1　设 A 是拓扑空间 X 的子集, 所有包含集 A 的闭集的交称为集 A 的**闭包** (closure), 也就是包含集 A 的最小的闭集, 记作 $\overline{A}$, A^- 或 $\mathrm{Cl}A$. 集 $\overline{A}$ 的每一点称为集 A 的**接触点** (contact point).

由定义 1.3.1 立知, 拓扑空间 X 的子集 A 是闭集, 当且仅当 $\overline{A} = A$; 子集 U 是开集, 当且仅当 $\overline{X - U} = X - U$.

定理 1.3.1　闭包满足如下条件:

(C1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

(C2) $\overline{A} \supset A$;

(C3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(C4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(C1)~(C4) 称为 **Kuratowski 闭包公理** (Kuratowski's closure axioms).

证明　(C1), (C2) 由定义 1.3.1 立得. 现证 (C3), 由定义 1.3.1, $A \cup B \supset A \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A}$. 同理, $\overline{A \cup B} \supset \overline{B}$, 故有 $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. 另一方面, 因 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 是包含 $A \cup B$ 的闭集, 而由定义 1.3.1, $\overline{A \cup B}$ 是包含 $A \cup B$ 的最小的闭集, 故有 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. 下证 (C4), 因 $\overline{\overline{A}}$ 是包含 $\overline{A}$ 的最小的闭集, 而 $\overline{A}$ 是闭集, 故得证. 证完.

定理 1.3.2　点 $x \in \overline{A}$ 当且仅当点 x 的每一邻域与 A 相交.

证明　设点 x 的邻域 U 与 A 不交, 不妨设 U 是开集, 从而 $X - U$ 是包含 A 的闭集, 故有 $X - U \supset \overline{A}$, 从而 $x \notin \overline{A}$. 相反, 如 $x \notin \overline{A}$, 则 $X - \overline{A}$ 是点 x 的邻域与 A 不交. 证完.

定理 1.3.3 集 U 是点 x 的邻域当且仅当 $x \notin \overline{X-U}$.

证明 设 U 是点 x 的邻域, 由于 $U \cap (X-U) = \varnothing$, 由定理 1.3.2 知 $x \notin \overline{X-U}$. 相反, 设 $x \notin \overline{X-U}$, 则由定理 1.3.2, 存在点 x 的邻域 V 使 $V \cap (X-U) = \varnothing$, 从而 $V \subset U$, 所以 U 也是 x 的邻域. 证完.

在离散空间 X, X 的任何子集 A 的闭包就是 A, 也就是 $\overline{A} = A$, 所以离散空间的任何子集都是闭集, 也同时都是开集. 在平凡拓扑空间 X, 任何非空子集 A 的闭包是空间 X, 也就是 $\overline{A} = X$ $(A \neq \varnothing)$, $\overline{A} = \varnothing$ $(A = \varnothing)$.

定理 1.3.4 设 X 是一集, 对 X 的每一子集 A, 规定一集 $\overline{A}$ 使满足 (C1)~(C4), 定义 X 的子集 U 为开集当且仅当满足条件:

$$\overline{X-U} = X-U, \tag{1.3.1}$$

则如上定义的开集族满足拓扑空间的定义 (O1)~(O3), 从而 X 成为拓扑空间.

证明 由 (C2), 有 $\overline{X-\varnothing} = \overline{X} = X = X-\varnothing$, 由 (1.3.1) 式, $\varnothing$ 是开集. 由 (C1), 有 $\overline{X-X} = \overline{\varnothing} = \varnothing = X-X$, 由 (1.3.1) 式, X 是开集. 设 U_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是开集, 由 (1.3.1) 式, $\overline{X-U_i} = X-U_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 并有限次地引用 (C3), 有

$$\begin{aligned}\overline{X-\bigcap_{i=1}^{n}U_i} &= \overline{\bigcup_{i=1}^{n}(X-U_i)} = \bigcup_{i=1}^{n}\overline{X-U_i}\\ &= \bigcup_{i=1}^{n}(X-U_i) = X-\bigcap_{i=1}^{n}U_i.\end{aligned}$$

由 (1.3.1) 式, $\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ 是开集. 余下的是要证明满足拓扑空间定义的 (O3). 设 U_γ $(\gamma \in \Gamma)$ 是开集, 由 (1.3.1) 式,

$$\overline{X-U_\gamma} = X-U_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma.$$

此外, 由 (C3) 可以导得

$$C \subset D \Rightarrow \overline{C} \subset \overline{D}.$$

从而由 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma) \subset X-U_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ 可以证得

$$\overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{X-U_\gamma}.$$

故有

$$\begin{aligned}\overline{X-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma} &= \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{X-U_\gamma}\\ &= \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma) = X-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma.\end{aligned}$$

相反的包含式可由 (C2) 得到, 故有

$$\overline{X - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma} = X - \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma.$$

由 (1.3.1) 式, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ 是开集. 证完.

下面的例是以闭包定义拓扑空间.

例 1.3.1　取数直线 $\mathbb{R}$ 以及不属于 $\mathbb{R}$ 的点 x^* 形成的集 $\mathbb{R}^*$, 即 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{x^*\}$. 对 $\mathbb{R}^*$ 的每一子集 A, 规定 $\overline{A}$ 如下:

$$\overline{A} = \begin{cases} (A - \{x^*\} \text{ 关于 } \mathbb{R} \text{ 的闭包}) \cup \{x^*\}, & \text{当 } A \text{ 是无限集}, \\ A, & \text{当 } A \text{ 是有限集}. \end{cases}$$

容易验证, $\overline{A}$ 满足闭包公理, 从而由定理 1.3.4, $\mathbb{R}^*$ 成为拓扑空间.

相对于闭包概念, 下面引进内核概念.

定义 1.3.2　设 A 是拓扑空间 X 的子集, 一切包含在 A 内的开集的并称为集 A 的**内核** (interior), 也就是包含在 A 内的最大开集, 记作 A° 或 Int$A$.

由定义 1.3.2 立知, 拓扑空间 X 的子集 A 是开集, 当且仅当 $A^\circ = A$.

设 A 是拓扑空间 X 的子集, 点 x 称为集 A 的**内点** (inner point), 如果 A 是点 x 的邻域, 也就是存在点 x 的一个开邻域 $U(x) \subset A$; 集 A 的一切内点所成集显然是开集 (读者自证), 从而就是集 A 的内核.

关于内核与闭包间的关系有下述定理.

定理 1.3.5　设 A 是拓扑空间 X 的任一子集, 则有 $A^\circ = X - \overline{X - A}$.

证明　因为 $\overline{X - A}$ 是包含 $X - A$ 的最小闭集, 从而 $X - \overline{X - A}$ 是含于 $X - (X - A) = A$ 的最大开集, 所以由 A° 的定义, 得 $A^\circ = X - \overline{X - A}$. 证完.

由定理 1.3.1、定理 1.3.5 及 de Morgan 公式可以证明下述定理. 证明留给读者.

定理 1.3.6　内核满足如下条件:

(I1) $X^\circ = X$;

(I2) $A^\circ \subset A$;

(I3) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(I4) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

类似于定理 1.3.5, 有下述定理, 证明留给读者.

定理 1.3.7　设 A 是拓扑空间 X 的任一子集, 则有 $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$.

如果以 “ ′ ” 记作补集的运算, 则定理 1.3.5 及定理 1.3.7 可分别记作

$$A^{\circ\prime} = A^{\prime -} \quad \text{及} \quad A^{-\prime} = A^{\prime\circ}.$$

定义 1.3.3　点 x 称为集 A 的**聚点** (accumulation point) 或**极限点** (limit point), 如果 $x \in \overline{A - \{x\}}$; 集 A 的所有聚点所成集称为集 A 的**导集** (derived set), 记作 A^d; 集 $A - A^d$ 的点称为集 A 的**孤立点** (isolated point).

显然, 点 x 是空间 X 的孤立点当且仅当 $\{x\}$ 是一开集. 容易验证, 空间 X 是离散空间当且仅当每个 $x \in X$ 都是孤立点. 而在序空间 $[0,\omega_1)$ 中 (例 1.2.3), 对每个后继序数 $\alpha = \beta + 1$, 区间 $(\beta, \alpha] = \{\alpha\}$, 这说明在序空间 $[0,\omega_1)$ 中, 每个后继序数都是孤立点.

定理 1.3.8 点 x 属于 A^d 当且仅当点 x 的每一个邻域包含集 A 的异于 x 的一个点.

证明 由定义 1.3.3, $x \in \overline{A - \{x\}}$. 由定理 1.3.2, $x \in \overline{A - \{x\}}$ 当且仅当 x 的每一个邻域与 $A - \{x\}$ 相交, 即 x 的每一个邻域包含集 A 的异于 x 的一个点. 证完.

定理 1.3.9 导集满足如下条件:

(D1) $\overline{A} = A \cup A^d$;

(D2) 如 $A \subset B$, 则 $A^d \subset B^d$;

(D3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(D4) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^d \subset (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^d$.

证明留给读者.

定义 1.3.4 集 A 称为**稠密** (dense) 于空间 X, 如果 $\overline{A} = X$; 称为**无处稠密** (或**疏**, nowhere dense) 于 X, 如果 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$; 称为**第一纲的** (或**第一范畴的**, first category), 如果 A 是可数个无处稠密集的并; 称为**第二纲的** (或**第二范畴的**, second category), 如果 A 不是第一纲的.

由无处稠密的定义可以推得: 集 A 无处稠密于 X 当且仅当每一不空开集 U 包含某不空开集 V 使 $V \cap A = \varnothing$ (习题 1.15).

例 1.3.2 数直线 $\mathbb{R}$ 上的自然数集、整数集无处稠密于 $\mathbb{R}$, 有理数集、无理数集稠密于 $\mathbb{R}$. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是第一纲的, 因为它是可数集, 而每一单点集是无处稠密于 $\mathbb{R}$ 的; 无理数集 $\mathbb{I}$ 是第二纲的. 用反证法证明于下. 设无理数集 $\mathbb{I}$ 是第一纲的, 则 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ 也是第一纲的. 置

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \tag{1.3.2}$$

每一 A_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 无处稠密于 $\mathbb{R}$. 取开区间 $I_1 = (0, 1)$, 因 A_1 是无处稠密的, 存在不空开集 $V_1 \subset I_1$, 使 $V_1 \cap A_1 = \varnothing$. 由于 $\mathbb{R}$ 中的开集可以表示为 (可数个) 开区间的并, 而每一开区间总包含着某一闭区间, 所以不失一般性可把 V_1 取作某开区间而使

$$V_1 \subset I_1, \quad \overline{V}_1 \cap A_1 = \varnothing.$$

继续这方法可得开区间: V_1, $V_2, \cdots$, 使

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots; \tag{1.3.3}$$

$$\overline{V}_i \cap A_i = \varnothing \quad (i = 1, 2, \cdots); \tag{1.3.4}$$

$$V_i \text{ 的长度 } \leqslant 1/i. \tag{1.3.5}$$

由 (1.3.3) 及 (1.3.5), 序列 $\{\overline{V}_i\}$ 形成退缩闭区间套, 存在点 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i$, 故 $x \in \mathbb{R}$, 但由 (1.3.4), $x \notin A_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 这一矛盾说明 (1.3.2) 式不能成立. 所以无理数集 $\mathbb{I}$ 必须是第二纲的.

定义 1.3.5　设 A 是拓扑空间 X 的子集, 集 $\overline{A} \cap \overline{X - A}$ 称为集 A 的**边缘** (boundary 或 frontier), 记作 $\mathrm{Fr}A$ 或 ∂A; 点 $x \in \overline{A} \cap \overline{X - A}$ 称为集 A 的**边缘点** (boundary point 或 frontier point).

由定义 1.3.5, $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \cap (X - A^\circ) = \overline{A} - A^\circ$, 从而易知 x 是集 A 的边缘点当且仅当 x 既不是集 A 的内点, 又不是集 $X - A$ 的内点.

定理 1.3.10　关于集 A 的边缘, 有下列关系:

(i) $A^\circ = A - \mathrm{Fr}A$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}A$;

(iii) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B$;

(iv) $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B$;

(v) A 是开集, 当且仅当 $\mathrm{Fr}A = \overline{A} - A$, 当且仅当 $A \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$;

(vi) A 是闭集, 当且仅当 $\mathrm{Fr}A = A - A^\circ$, 当且仅当 $\mathrm{Fr}A \subset A$;

(vii) A 是既开且闭的当且仅当 $\mathrm{Fr}A = \varnothing$.

证明　这里证明 (i) 及 (iii), 其他类似.

$$\begin{aligned} A - \mathrm{Fr}A &= A - (\overline{A} \cap \overline{X - A}) = (A - \overline{A}) \cup (A - \overline{X - A}) \\ &= A - \overline{X - A} = A \cap A^\circ = A^\circ. \\ \mathrm{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{X - (A \cup B)} \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{(X - A) \cap (X - B)} \\ &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{X - A} \cap \overline{X - B}) \\ &\subset (\overline{A} \cap \overline{X - A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X - B}) \\ &= \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Fr}B. \end{aligned}$$

所以 (i), (iii) 得证. 证完.

1.4　滤子和网

在本节中我们叙述拓扑空间中的收敛概念. 分析学中的收敛概念最简单的是

序列的极限, 级数的收敛就是用它部分和序列的极限去描述的. 函数的极限或连续的 ε- δ 定义实际上是用邻域描述的, 即 $f(x)$ 在点 x_0 的连续: 对 $y_0=f(x_0)$ 的任何 ε 邻域 $S_\varepsilon(y_0)$, 存在 x_0 的 δ 邻域 $S_\delta(x_0)$, 使 $f(S_\delta(x_0))\subset S_\varepsilon(y_0)$. 网的概念是序列概念的直接推广, 滤子概念是邻域族概念的直接推广. 前者在统一阐述分析学中的极限概念时很有实用价值; 后者在论证一般拓扑学的有关理论时比较便利. 所以本书除了在本节中叙述网的概念外, 此后都用滤子阐述.

定义 1.4.1 设 $\mathscr{F}$ 是集合 X 的不空子集族, 满足下面条件:

(Fl1) $\varnothing\notin\mathscr{F}$;

(Fl2) 如 $A\in\mathscr{F}$ 及 $B\supset A$, 则 $B\in\mathscr{F}$;

(Fl3) 如 $A\in\mathscr{F}$ 及 $B\in\mathscr{F}$, 则 $A\cap B\in\mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 是一**滤子** (filter). 如果不存在包含 $\mathscr{F}$ 的滤子以 $\mathscr{F}$ 作为它的真子族, 则滤子 $\mathscr{F}$ 称为**极大滤子** (maximal filter) 或**超滤子** (ultrafilter).

集族 $\mathscr{U}$ 称为具有**有限交性质** (finite intersection property), 如果 $\mathscr{U}$ 中任何有限个元素的交不空.

定理 1.4.1 设集族 $\mathscr{F}'$ 具有有限交性质, 则存在极大滤子 $\mathscr{F}$ 包含 $\mathscr{F}'$.

证明 设 $\Phi=\{\mathscr{F}:\mathscr{F}$是包含着 $\mathscr{F}'$ 的具有有限交性质的集族$\}$, 以包含关系 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$ 定义 Φ 中元素 $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ 的次序, 则 Φ 是一偏序集. 显然, Φ 的每一全序子集 (链) 具有上界. 由 Zorn 引理, Φ 中存在极大元 $\mathscr{F}$, 下面证明 $\mathscr{F}$ 是一滤子. 显然 $\mathscr{F}$ 满足 (Fl1). 设 $A,B\in\mathscr{F}$, 因 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质, $A\cap B\neq\varnothing$, 且集族 $\mathscr{F}''=\{A\cap B\}\cup\mathscr{F}$ 也具有有限交性质, 从而 $\mathscr{F}''\in\Phi$; 由于 $\mathscr{F}$ 是 Φ 的极大元, 所以 $A\cap B\in\mathscr{F}$, 满足 (Fl3). 为了证明满足 (Fl2), 设 $B\supset A$, $A\in\mathscr{F}$, 则集族 $\{B\}\cup\mathscr{F}\in\Phi$, 由极大性, $B\in\mathscr{F}$. 证完.

定理 1.4.2 滤子 $\mathscr{F}$ 是极大滤子当且仅当每一个与 $\mathscr{F}$ 中每一元素相交的集是 $\mathscr{F}$ 的元素.

证明 设 $\mathscr{F}$ 是极大滤子, 设集 A 与 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素相交, 置

$$\mathscr{F}'=\{C:C\supset A\cap B,\ B\in\mathscr{F}\},$$

容易验证 $\mathscr{F}'$ 是一滤子且包含着 $\mathscr{F}$, 以 A 作为它的元素. 由于 $\mathscr{F}$ 是极大滤子, $\mathscr{F}=\mathscr{F}'$, 从而 $A\in\mathscr{F}$.

相反, 设 $\mathscr{F}$ 是一滤子满足定理 1.4.2 的条件, 设 $\mathscr{F}'$ 是任一滤子包含着 $\mathscr{F}$, 即 $\mathscr{F}'\supset\mathscr{F}$. 下面证明相反的包含关系, 从而定理得证. 设 $A\in\mathscr{F}'$, 由 (Fl3) 及 (Fl1), A 与 $\mathscr{F}'$ 中每个元素相交, 从而与 $\mathscr{F}$ 中每个元素相交, 由假设条件, $A\in\mathscr{F}$, 所以 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$. 证完.

定义 1.4.2 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 中的滤子, $x\in X$. 如果 x 的每一邻域属于 $\mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ **收敛于** (converge to) x, 记作 $\mathscr{F}\to x$.

由定义 1.4.1 的 (Fl2) 可知：$\mathscr{F} \to x$ 当且仅当对 x 的每一个邻域 U, 存在 $A \in \mathscr{F}$ 使 $A \subset U$.

定义 1.4.3　如果对每一集 $A \in \mathscr{F}$, 点 $x \in \overline{A}$, 则称 x 是 $\mathscr{F}$ 的**聚点** (cluster point of filter).

定理 1.4.3　设滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于 x, 则 x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点; 相反, 如 $\mathscr{F}$ 是极大滤子, x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点, 则 $\mathscr{F}$ 收敛于 x.

证明　设 $\mathscr{F} \to x$ 及 $A \in \mathscr{F}$, 由定义 1.4.2, x 的每一个邻域 $U \in \mathscr{F}$, 由 (Fl3) 及 (Fl1), $A \cap U \neq \varnothing$, 由定理 1.3.2, $x \in \overline{A}$, 由定义 1.4.3, x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点.

反之, 设 x 是极大滤子 $\mathscr{F}$ 的聚点, 则由定义 1.4.3, x 的每一邻域 U 与 $\mathscr{F}$ 的每一元素相交, 由定理 1.4.2, $U \in \mathscr{F}$, 由定义 1.4.2, $\mathscr{F} \to x$. 证完.

我们考虑减弱定义 1.4.1 的条件, 设 $\mathscr{F}'$ 是滤子 $\mathscr{F}$ 的子族使对每一 $F \in \mathscr{F}$, 存在 $F' \in \mathscr{F}'$ 使 $F' \subset F$, 则称 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的**滤子基** (filter base), $\mathscr{F}'$ 满足：

(FB1) $\varnothing \notin \mathscr{F}'$;

(FB2) 如 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}'$, 则存在 $F_3 \in \mathscr{F}'$, 使 $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

反之, 给定了某族 $\mathscr{F}'$ 满足 (FB1) 和 (FB2). 置

$$\mathscr{F} = \{F : F \supset F',\ F' \in \mathscr{F}'\},$$

可得到滤子 $\mathscr{F}$ 以 $\mathscr{F}'$ 为滤子基. 我们称 $\mathscr{F}'$ **生成** (generate) $\mathscr{F}$. 现在考察滤子基 $\mathscr{F}'$ 及点 x, 如果对于点 x 的每一个邻域 U, 存在 $F' \in \mathscr{F}'$, 使 $F' \subset U$, 则称 $\mathscr{F}'$ **收敛于** x, 记作 $\mathscr{F}' \to x$. 设 $\mathscr{F}'$ 生成滤子 $\mathscr{F}$, 则易知 $\mathscr{F}' \to x$ 当且仅当 $\mathscr{F} \to x$.

点 x 的邻域族 $\mathscr{U}(x)$ 满足 (Fl1)~(Fl3), 所以是一滤子, 由定义 1.4.2, $\mathscr{U}(x)$ 收敛于 x, 所以滤子是邻域族的推广.

所有包含点 x 的集所成的集族 $\mathscr{F}(x)$ 显然满足定义 1.4.1, 是一滤子, 而且是一极大滤子, 证明于下. 设 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{F}(x)$ 的滤子, 对 $\mathscr{F}$ 中任一元素 B 必有 $x \in B$, 这是因为 B 及 $\{x\}$ 都是 $\mathscr{F}$ 的元素, 它们的交不空. 从而 $B \in \mathscr{F}(x)$, 故有 $\mathscr{F} = \mathscr{F}(x)$, 这说明 $\mathscr{F}(x)$ 是一极大滤子. 这种极大滤子称为**主超滤** (principle ultrafilter). 如果对极大滤子 $\mathscr{F}$, $\cap\mathscr{F} = \varnothing$, 这种极大滤子称为**自由超滤** (free ultrafilter). 容易验证, 极大滤子一定是主超滤或者自由超滤.

设 $H_i = (i, +\infty)$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 置 $\mathscr{F}' = \{H_i : i = 1, 2, \cdots\}$, 则 $\mathscr{F}'$ 满足 (Fl1) 及 (Fl3), 不满足 (Fl2). 置

$$\mathscr{F} = \{A : A \supset H_i,\ i = 1, 2, \cdots\},$$

得到滤子 $\mathscr{F}$, 从而 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的滤子基, 容易看出, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ 都不收敛.

设 x, y 是平面上不同的两点, 所有包含这两点的集所成的集族 $\mathscr{F}$ 是一滤子, 容易看出, x, y 都是 $\mathscr{F}$ 的聚点, 但 $\mathscr{F}$ 不收敛.

定义 1.4.4 设 D 是一集, 对 D 的某些元素规定了次序 $>$ 满足:

(i) $a > b,\ b > c$, 则 $a > c$;

(ii) 对 D 的每两个元素 $a, b \in D$, 存在 $c \in D$, 使 $c > a$ 及 $c > b$,

则称 D 是一**定向集** (direct set).

定义 1.4.5 设 Δ 是一不空的定向集, X 是一拓扑空间, 由定向集 Δ 到 X 内的映射 $\varphi(\delta)$ $(\delta \in \Delta)$, 称为 Δ 上的一个**网** (net), 或简称网, 记作 $\varphi(\Delta; >)$, 这里 $>$ 是定向集 Δ 上的次序. 网可以理解为空间 X 的点集 $\{\varphi(\delta) : \delta \in \Delta\}$ 而按指标集 Δ 定向. 下面以 $\varphi(\delta)$ 记网 $\varphi(\Delta; >)$ 中的元素.

定义 1.4.6 设 $\varphi(\Delta; >)$ 是拓扑空间 X 中的网, $A \subset X$, 如果存在 $\delta_0 \in \Delta$ 使 $\delta > \delta_0 \Rightarrow \varphi(\delta) \in A$, 则称网 $\varphi(\Delta; >)$ **终留于** (eventually in) A; 如果对每一子集 $A \subset X$, $\varphi(\Delta; >)$ 终留于 A 或 $X - A$, 则称网 $\varphi(\Delta; >)$ 是一**极大网** (maximal net) 或**超网** (ultra net); 如果对每一 $\delta_0 \in \Delta$, 存在 $\delta \in \Delta, \delta > \delta_0$, 使 $\varphi(\delta) \in A$, 则称网 $\varphi(\Delta; >)$ **共尾于** (cofinal in) A.

定义 1.4.7 设网 $\varphi(\Delta; >)$ 终留于点 x 的每一个邻域, 则称这网**收敛于** x, 记作 $\varphi(\Delta; >) \to x$; 如果网 $\varphi(\Delta; >)$ 共尾于点 x 的每一邻域, 则称点 x 是这网的**聚点** (cluster point of net).

设 $\mathscr{F} = \{A_\delta : \delta \in \Delta\}$ 是一滤子, 我们可以把指标集 Δ 作如下定向: $\delta > \delta'$ 当且仅当 $A_\delta \subset A_{\delta'}$ (可以假设 $\delta \neq \delta' \Rightarrow A_\delta \neq A_{\delta'}$); 这样可以得到一个定向集 Δ 上的网 $\varphi(\Delta; >)$ 满足对每一 $\delta \in \Delta$, $\varphi(\delta) \in A_\delta$, 这网称为滤子 $\mathscr{F}$ 的**导出网** (derived net).

相反, 给定网 $\varphi(\Delta; >)$, 置

$$\mathscr{F} = \{A : \varphi(\Delta; >) \text{ 终留于 } A\}.$$

我们得到滤子 $\mathscr{F}$, 这滤子 $\mathscr{F}$ 称为网 $\varphi(\Delta; >)$ 的**导出滤子** (derived filter).

定理 1.4.4 滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于点 x 当且仅当 $\mathscr{F}$ 的每一个导出网收敛于点 x.

证明 设 $\mathscr{F} \to x$, $\mathscr{F} = \{A_\delta : \delta \in \Delta\}$, 设 $\varphi(\Delta; >)$ 是 $\mathscr{F}$ 的某一导出网, 也就是 $\varphi(\delta) \in A_\delta$, $\delta \in \Delta$. 设 U 是点 x 的任一邻域, 由定义 1.4.2, $U \in \mathscr{F}$, 设 $U = A_{\delta_0}$ $(\delta_0 \in \Delta)$, 如果 $\delta > \delta_0$, 则 $A_\delta \subset A_{\delta_0} = U$, 从而 $\varphi(\delta) \in U$, 由定义 1.4.7, 网 $\varphi(\Delta; >) \to x$.

相反, 设 $\mathscr{F}$ 不收敛于 x, 由定义 1.4.2, 存在点 x 的邻域 $U \notin \mathscr{F}$, 从而对每一 $\delta \in \Delta$, $A_\delta \not\subset U$ (不然, 由滤子的定义 1.4.1 的 (Fl2), $U \in \mathscr{F}$). 取点 $\varphi(\delta) \in A_\delta - U$, $\delta \in \Delta$, 则得到 $\mathscr{F}$ 的导出网 $\varphi(\Delta; >)$, 它不收敛于 x. 证完.

定理 1.4.5 网 $\varphi(\Delta; >)$ 收敛于点 x 当且仅当这网的导出滤子收敛于点 x.

证明 设 $\mathscr{F}$ 是网 $\varphi(\Delta; >)$ 的导出滤子, 即

$$\mathscr{F} = \{A : \varphi(\delta; >) \text{ 终留于 } A\}.$$

设 $\varphi(\Delta;>) \to x$, 则对 x 的任何邻域 U, $\varphi(\Delta;>)$ 终留于 U, 所以 $U \in \mathscr{F}$, 从而 $\mathscr{F} \to x$.

相反, 设 $\mathscr{F} \to x$, 则对 x 的任何邻域 U, 有 $U \in \mathscr{F}$, 由 $\mathscr{F}$ 的定义, $\varphi(\Delta;>)$ 终留于 U, 所以 $\varphi(\Delta;>) \to x$. 证完.

例 1.4.1 分析学中的极限概念可用网 $\varphi(\Delta;>)$ 的收敛作统一阐述.

在序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的情况, 可取 Δ 为正整数集 $\mathbb{N}$, 次序 $>$ 为正整数的大小次序, $\varphi(n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, 所以网是序列的推广.

在函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$ 的情况, 可取 $\Delta = U(x_0) - \{x_0\}$, 这里 $U(x_0)$ 是 x_0 的某一足够小的开邻域, 次序 $>$ 可规定为 $x' > x$, 当 $\rho(x', x_0) < \rho(x, x_0)$ (这里 $\rho(x, y)$ 表示点 x, y 间的距离).

在作为黎曼 (Riemann) 和的极限的定积分情况比较复杂, 因为这不是函数的极限. 在一般分析教科书上都不予阐明. 下面就一元函数情况叙述. 按定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义, 对区间 $[a, b]$ 作分划 T:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

记作如下的数组:

$$T = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n).$$

加入所取的点 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 后得

$$T_\xi = (x_0, \xi_0, x_1, \xi_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \xi_{n-1}, x_n).$$

取 Δ 为所有数组 T_ξ 所成的集, 次序 $>$ 规定为 $T'_\xi > T_\xi$, 当 $\lambda(T') < \lambda(T)$, 这里 $\lambda(T) = \max\limits_i\{x_{i+1} - x_i\}$. 取

$$\varphi(T_\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad T_\xi \in \Delta.$$

例 1.4.2 网是序列的推广, 但并不具有某些相应于序列的良好性质.

设 $\Delta = \{(n, m) : n, m = 1, 2, \cdots\}$, 规定 $(n, m) > (n', m')$, 当 $n > n'$, $m \geqslant m'$, 则 Δ 成为定向集. 在 Δ 上定义一平面 $\mathbb{R}^2$ 上的网 $\varphi(\Delta;>)$ 为

$$\varphi((n, m)) = (1/n, 1/m).$$

显然, 网 $\varphi(\Delta;>) \to (0, 0)$. 置 $\Delta' = \{(n, 1) : n = 1, 2, \cdots\}$, Δ' 是 Δ 的无限的定向子集, 但相应的 "子网" φ $(\Delta';>)$ 不收敛于 $(0, 0)$, 也不以 $(0, 0)$ 为聚点, 这与序列和它的子序列的情况不同.

为了免除上述不良情况, 考虑到关于所谓 "子网" 的限制. 定向集 Δ 的子集 Δ' 称为**共尾于** Δ, 如果对每一 $\delta \in \Delta$, 存在 $\delta' \in \Delta'$ 使 $\delta' > \delta$. 对 Δ 的共尾子集 Δ', 我

们可以有 $\varphi(\Delta;>) \to x \Rightarrow \varphi(\Delta';>) \to x$, 但是即使加上上述限制, 还是有些性质不同于序列, 子序列情况. 设 Δ 是一切可数序数按自然顺序的定向集. 对每一个序数 $\delta \in \Delta$ 可以惟一地确定有限个序数使

$$\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n = \delta,$$

这里 δ_1 是极限序数, 每一个 δ_{i+1} 是大于 δ_i 的第一个序数. 例如, 当 $\delta = \omega, 2\omega, \omega^2$ 时, 分别取 δ_1 为 $\omega, 2\omega, \omega^2$; 当 $\delta = \omega + 3$ 时, 取 $\delta_1 = \omega, \delta_2 = \omega + 1, \cdots, \delta_4 = \omega + 3$. 这样每一个序数 $\delta \in \Delta$ 对应着一个正整数 n ($\omega, 2\omega, \omega^2$ 都对应着 $1, \omega + 3$ 对应着 4), 在 Δ 上定义一数直线 $\mathbb{R}$ 上的网 $\varphi(\Delta;>)$ 为

$$\varphi(\delta) = 1/n, \quad \delta \in \Delta,$$

这里 n 是对应着 δ 的那个正整数. 容易看出 0 是网 $\varphi(\Delta;>)$ 的聚点, 但是不存在 Δ 的共尾子集 Δ' 使 $\varphi(\Delta';>) \to 0$.

1.5 映　射

定义 1.5.1　拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 称为**连续的** (continuous), 如果 Y 中开集 V 的逆像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集.

在证明下列定理前, 复习一下集在映射 $f: X \to Y$ 下的像和逆像的关系:

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

当 f 是到上的, 即满映射时, 后式为 $f(f^{-1}(B)) = B$. 此外, 易验证 (习题 0.3),

$$f^{-1}(B) \subset A \quad \text{当且仅当} \quad B \subset Y - f(X - A). \tag{1.5.1}$$

定理 1.5.1　下列论断是等价的:

(i) X 到 Y 内的映射 f 是连续的;

(ii) Y 中闭集 F 的逆像 $f^{-1}(F)$ 是闭集;

(iii) 对每一 $B \subset Y$, $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$;

(iv) 对每一 $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(v) 对每一 $x \in X$ 及 $f(x)$ 的每一邻域 V, 存在 x 的邻域 U, 使 $f(U) \subset V$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 F 是 Y 中闭集, 由 (i), $f^{-1}(Y - F)$ 是 X 中开集, 从而 $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(Y - F)$ 是 X 中闭集.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 证法与上类似.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 由 $f^{-1}(\overline{B})$ 是包含 $f^{-1}(B)$ 的闭集而 $\overline{f^{-1}(B)}$ 是包含 $f^{-1}(B)$ 的最小闭集立得.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 由 (iii), $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supset \overline{f^{-1}(f(A))} \supset \overline{A}$, 从而有

$$\overline{f(A)} \supset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \supset f(\overline{A}).$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii). 设 F 是 Y 中闭集, 由 (iv), $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$, 从而 $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$, 这说明 $f^{-1}(F)$ 是闭集 (定义 1.3.1).

(i) $\Rightarrow$ (v). 设 $x \in X$, V 是 $f(x)$ 的一邻域, 存在开集 G, 使 $f(x) \in G \subset V$, 由 (i), $f^{-1}(G)$ 是开集. 置 $U = f^{-1}(G)$, U 是 x 的开邻域, 且 $f(U) \subset G \subset V$.

(v) $\Rightarrow$ (i). 设 G 是 Y 中开集, $x \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(x) \in G$. G 是 $f(x)$ 的邻域. 由 (v), 存在 x 的邻域 U 使 $f(U) \subset G$, 从而 $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(G)$, 该式对所有 $x \in f^{-1}(G)$ 成立, 所以 $f^{-1}(G)$ 是开集 (定理 1.1.2).

定义 1.5.2　设拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续映射 f 是一一对应的, 且逆映射是 Y 到 X 上的连续映射, 则称 f 是**同胚映射** (homeomorphism) 或**拓扑映射** (topological mapping). 在此情况下, 空间 X 与空间 Y 称为**同胚的** (homeomorphic). 为同胚映射所保持的性质称为**拓扑性质** (topological property) 或**拓扑不变量** (topological invariant).

一般拓扑学的最基本问题之一是寻求并研究自然的拓扑不变量.

数直线 $\mathbb{R}$ 与它的任何开区间同胚. 例如, 开区间 $(0,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 间的同胚映射 f 可表示为 $x \mapsto (2x-1)/x(1-x)$; 刺破了一点的球面与平面同胚, 它们间的同胚映射就是通常复变函数中的球极映射. 在拓扑学中, 同胚的空间看作等同的, 没有区别的.

定义 1.5.3　拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 称为**闭映射** (closed mapping), 如果 X 中每一闭集 F 的像 $f(F)$ 是 Y 中的闭集; 称为**开映射** (open mapping), 如果 X 中每一开集 U 的像 $f(U)$ 是 Y 中的开集.

例 1.5.1　$\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ (数直线) 上的投影映射 $f : (x,y) \mapsto x$ 是连续的, 但不是闭映射, 因为

$$F = \{(x,y) : y = 1/x,\ x \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集 (双曲线), 而 $f(F) = \mathbb{R} - \{0\}$ (双曲线在 x 轴上的投影) 在 $\mathbb{R}$ 上不是闭的. 下面还可看到, 投影映射 f 是开映射 (例 2.1.3).

设 X 是数直线上的闭区间 $[0,2]$, Y 是闭区间 $[0,1]$, X, Y 上的拓扑都是数直线上的通常拓扑. 定义映射

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ x-1, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

显然, f 是连续映射. 设 F 是 $X = [0,2]$ 中的任一闭集, 置 $F_1 = F \cap [0,1]$, $F_2 = F \cap [1,2]$, 则 F_1, F_2 都是 X 中的闭集, $F = F_1 \cup F_2$, $f(F_1) = \{0\}$ 是 $Y = [0,1]$ 中的闭

集, 且 $f(F_2)=\{x-1:x\in F_2\}$ 是 Y 中的闭集, 所以 $f(F)=f(F_1)\cup f(F_2)$ 是 Y 中闭集, 从而 f 是闭映射. 但 f 不是开映射, 因为 X 中开集 $(0,1)$ 的像 $f((0,1))=\{0\}$, 不是 Y 中的开集.

设 X 是数直线 $\mathbb{R}$ (通常拓扑), Y 是在实数集 $\mathbb{R}$ 上赋以离散拓扑, 则在空间 Y 中 $\mathbb{R}$ 的任何子集都是开集, 也就是闭集. f 是空间 X 到空间 Y 上的恒等映射 $(x\mapsto x,\ x\in\mathbb{R})$. 显然, f 是开映射, 也同时是闭映射, 但不是连续映射.

容易看到, f 是同胚映射当且仅当 f 是一一对应的连续闭 (开) 映射.

定理 1.5.2 下列论断是等价的:

(i) X 到 Y 内的映射 f 是开映射;

(ii) 对 X 的每一子集 A, $f(A^\circ)\subset(f(A))^\circ$;

(iii) 对 Y 的每一子集 B, $f^{-1}(\overline{B})\subset\overline{f^{-1}(B)}$;

(iv) 每一点 $x\in X$ 的任一邻域 U 的像 $f(U)$ 是 $f(x)$ 的一邻域.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 因为 $f(A^\circ)\subset f(A)$, 由 (i), $f(A^\circ)$ 是开集, 所以 $f(A^\circ)\subset(f(A))^\circ$ (定义 1.3.2).

(ii) $\Rightarrow$ (iv). 设 U 是点 $x\in X$ 的邻域, 那么 $x\in U^\circ$, 由 (ii), $f(x)\in(f(U))^\circ$, 所以 $f(U)$ 是 x 的邻域.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). 设 $x\in f^{-1}(\overline{B})$, 则 $f(x)\in\overline{B}$, 设 U 是 x 的任一邻域, 由 (iv), $f(U)$ 是 $f(x)$ 的邻域, 于是 $f(U)\cap B\neq\varnothing$, 从而存在 $x'\in U$, 使 $f(x')\in B$, 所以 $x'\in f^{-1}(B)$, 即 $U\cap f^{-1}(B)\neq\varnothing$, 所以 $x\in\overline{f^{-1}(B)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). $A^\circ\subset A\subset f^{-1}(f(A))$, A° 开, 故有

$$A^\circ\subset[f^{-1}(f(A))]^\circ. \tag{1.5.2}$$

由于 $M^\circ=X-\overline{X-M}$ (定理 1.3.5),

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ=X-\overline{X-f^{-1}(f(A))}. \tag{1.5.3}$$

而 $X-f^{-1}(f(A))=f^{-1}(Y-f(A))$, 由 (1.5.3) 式得

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ=X-\overline{f^{-1}(Y-f(A))}. \tag{1.5.4}$$

由 (iii) 及 (1.5.4) 式得

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ\subset X-f^{-1}(\overline{Y-f(A)}). \tag{1.5.5}$$

由 (1.5.2) 式, (1.5.5) 式及 $N^\circ=Y-\overline{Y-N}$ (定理 1.3.5), 有

$$\begin{aligned}f(A^\circ)&\subset f(X-f^{-1}(\overline{Y-f(A)}))=f(f^{-1}(Y-\overline{Y-f(A)}))\\&\subset Y-\overline{Y-f(A)}=(f(A))^\circ.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 A 是开集, 所以 $A = A^\circ$, 由 (ii), $f(A) = f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$, 这说明 $f(A)$ 是开集 (定义 1.3.2), 所以 f 是开映射. 证完.

定理 1.5.3　下列论断等价:

(i) X 到 Y 内的映射 f 是闭映射;

(ii) 对 X 的每一子集 A, $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). $f(\overline{A}) \supset f(A)$, 由 (i), $f(\overline{A})$ 是闭集, 故有 $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 A 是空间 X 的闭集, 由 (ii), $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$ 及 $\overline{A} = A$, 有 $f(A) \supset \overline{f(A)}$, 这说明 $f(A)$ 是闭集. 证完.

下面的定理在论述连续闭映射保持某些拓扑性质时很有用处.

定理 1.5.4　设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射, 则 f 是闭映射当且仅当对每一 $y \in Y$ 及 X 中的开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 存在 Y 中开集 W 使 $y \in W$ 且 $f^{-1}(W) \subset U$.

证明　设 f 是闭映射, 对每一 $y \in Y$ 及 X 中的开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 置 $W = Y - f(X - U)$, 则 W 是 Y 中开集, 且由定理 1.5.1 前的 (1.5.1) 式有, $y \in W$, $f^{-1}(W) \subset U$. 反之, 设 F 是 X 中闭集, 任取 $y \in Y - f(F)$, 那么 $f^{-1}(y) \subset X - F$, 由假设条件, 存在 Y 中开集 W 使 $y \in W$ 且 $f^{-1}(W) \subset X - F$, 所以 W 是包含点 y 的开集且再由 (1.5.1) 式有, $W \cap f(F) = \varnothing$, 从而 $f(F)$ 是 Y 中闭集. 证完.

当映射是 "到上" 的, 也就是满映射时 (不同于本节前面定理的情况), 有下述推论.

推论 1.5.1　设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续映射, 则下列论断等价:

(i) f 是闭映射;

(ii) 对每一子集 $E \subset Y$ 及 X 中的开集 $U \supset f^{-1}(E)$, 存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(E) \subset V \subset U$ 及 $V = f^{-1}(f(V))$, $f(V)$ 是 Y 中开集;

(iii) 对每一 $y \in Y$ 及 X 中的开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(y) \subset V \subset U$ 及 $V = f^{-1}(f(V))$, $f(V)$ 是 Y 中开集.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 X 中开集 $U \supset f^{-1}(E)$, 对每一 $y \in E$, $f^{-1}(y) \subset U$, 由定理 1.5.4, 存在 Y 中开集 W_y 使 $y \in W_y$ 且 $f^{-1}(W_y) \subset U$. 置 $V = \bigcup_{y \in E} f^{-1}(W_y)$, 则 $f(V) = \bigcup_{y \in E} W_y$ (f 是满映射). 易验证 V 即所要求的.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 显然.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 对每一 $y \in Y$ 及 X 中的开集 $U \supset f^{-1}(y)$, 由 (iii), 存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(y) \subset V \subset U$ 及 $V = f^{-1}(f(V))$, $f(V)$ 是 Y 中开集. 取 $W = f(V)$, 则 W 是 Y 中的开集, $y \in W$ 且 $f^{-1}(W) \subset U$. 由定理 1.5.4, f 是闭映射. 证完.

推论 1.5.1 中 f 是满映射的条件是重要的. 如取 X 是任一拓扑空间, 取 Y 是 **Sierpiński 空间** (Sierpiński space [372]), 即集 $Y = \{0, 1\}$ 赋予拓扑 $\{\varnothing, \{0\}, Y\}$, 并

定义 $f: X \to Y$ 为 $f(X) = \{0\}$. 则 f 是连续映射, 满足推论 1.5.1 的 (ii) 及 (iii), 但不是闭映射.

习 题 1

1.1 由开集出发按公理 (O1)~(O3) 定义拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$, 由开集定义邻域, 由邻域族定义拓扑空间 $(X, \mathscr{T}')$, 则 $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

1.2 由邻域族 $\mathscr{U}(x)$ $(x \in X)$ 出发按公理 (N1)~(N5) 定义拓扑空间. 由定理 1.1.2 导出开集, 再由开集导出邻域族 $\mathscr{U}'(x)$. 以此定义拓扑空间, 则前后得到的拓扑是一致的.

1.3 由开集出发按公理 (O1)~(O3) 定义拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$, 由定义 1.3.1 定义闭包, 然后从定理 1.3.4 中的 (1.3.1) 式定义新的开集, 由此导出拓扑空间 $(X, \mathscr{T}')$, 则 $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

1.4 由闭包 $\overline{A}$ 出发按公理 (C1)~(C4) 定义拓扑空间, 以定理 1.3.4 中的 (1.3.1) 式定义开集, 再由定义 1.3.1 定义新的闭包 $\widetilde{A}$, 则 $\overline{A} = \widetilde{A}$ 对每一子集 $A \subset X$ 成立.

1.5 X 上任何拓扑的交是 X 上的拓扑, X 上的两个拓扑的并未必是 X 上的拓扑 (除非 X 至多包含两点).

1.6 考察 Smirnov 删除序列拓扑空间 (例 1.2.1) 的点 0 的邻域族及序列 $\{1/n\}$ 的收敛情况.

1.7 考察 Niemytzki 半平面 (例 1.2.2) 的 x 轴上的无理数点集及有理数点集, 它们是否都是闭集?

1.8 考察例 1.3.1 中空间 $\mathbb{R}^*$ 的点 x^* 的邻域及任一实数 $x \in \mathbb{R}$ 的邻域.

1.9 拓扑空间的子集是闭的当且仅当它包含它的所有聚点.

1.10 拓扑空间的任一子集 A 及 B 有 $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ 及 $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$, 上述关系式能否用等式代替? 试以反例说明.

1.11 对拓扑空间 X, 任何集序列 $A_1, A_2, \cdots$, 有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} A_{i+j}}\right).$$

作一例说明上式右端第二项不能去掉.

1.12 对拓扑空间 X 的子集 A, 利用补集及闭包至多构成 14 种不同的集, 试对数直线 $\mathbb{R}$ (通常拓扑) 的子集用补集及闭包构成 14 种不同的集.

1.13 设实直线 $\mathbb{R}$ 的子集 E 是具有形式 $1/2^m + 1/3^n + 1/5^l$ (m, n, l 取遍自然数集) 的集, 试求 E^d, $(E^d)^d$, $((E^d)^d)^d$, 能否有 $(E^d)^d = E^d$?

1.14 任一集 E 的导集 E^d 是否总是闭集? 考察实直线 $\mathbb{R}$ (通常拓扑) 情况; 构造一空间, 其中某些子集的导集不是闭的.

1.15 拓扑空间 X 的子集 A 无处稠密于 X 当且仅当每一不空开集 U 包含某不空开集 V 使 $V \cap A = \varnothing$.

1.16 构造一例使集 D 稠密于 X, 但对 X 的某子集 A, $D \cap A$ 不稠密于 A.

1.17 试证如果 A 稠密于 $B \subset X$, 则 A 稠密于 $\overline{B}$.

1.18 设 A 稠密于 X, 开集 $U \subset X$, 则 $\overline{U} = \overline{A \cap U}$.

1.19 滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于 x 当且仅当 x 是每一包含 $\mathscr{F}$ 的滤子的聚点.

1.20 滤子 $\mathscr{F}$ 是极大的当且仅当对每一集 $A \subset X$, $A \in \mathscr{F}$ 或 $X - A \in \mathscr{F}$.

1.21 极大滤子的导出网是极大的.

1.22 极大网的导出滤子是极大的.

1.23 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射, $\mathscr{F}$ 是 X 中的滤子, 则 $f(\mathscr{F}) = \{f(F) : F \in \mathscr{F}\}$ 是 Y 中的滤子基.

1.24 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射, 则 f 是连续的当且仅当对 X 中每一收敛于 x 的网 $\varphi(\Delta; >)$ 有 $f \circ \varphi(\Delta; >)$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

1.25 点 x 是集 $A \subset X$ 的聚点当且仅当存在着 $A - \{x\}$ 中的网收敛于 x.

1.26 设 $\varphi(\Delta; >)$ 是一网. 对每一 $\delta \in \Delta$, 置 $A_\delta = \{\varphi(\delta') : \delta' \in \Delta,\ \delta' > \delta\}$, 则 x 是这网的聚点当且仅当 x 是每一集 A_δ $(\delta \in \Delta)$ 的聚点.

1.27 设 X 是可数集, 规定它的拓扑是空集及有限集的补集, 这空间的怎样的序列收敛于怎样的点?

1.28 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的映射. 如 X 上的拓扑是离散的, 或 Y 上的拓扑是平凡的, 则 f 连续; 如 Y 上的拓扑是离散的, 则 f 是既开且闭的.

1.29 关于集 A 的边缘 $\mathrm{Fr}A$ 有下列关系:

(i) $\mathrm{Fr}\overline{A} \subset \mathrm{Fr}A$;

(ii) $\mathrm{Fr}A^\circ \subset \mathrm{Fr}A$;

(iii) $X = A^\circ \cup \mathrm{Fr}A \cup (X - A)^\circ$.

1.30 证明数直线上的无理数集不能表示为 F_σ 集.

第 2 章　导出拓扑的方法、分离公理、可数公理、连通空间

在给出各种拓扑空间之前, 先介绍一些由给定拓扑空间构造新的拓扑空间的方法.

2.1　导出拓扑的方法

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间, $X'\subset X$, 对 X 中每一开集 $U\in\mathscr{T}$, 置 $U'=U\cap X'$, 易证 X' 的这些子集 U' 所成的集族 $\mathscr{T}'$ 满足 (O1)~(O3), 所以

$$\mathscr{T}'=\{U':U'=U\cap X',\ U\in\mathscr{T}\}$$

形成 X' 上的拓扑, 称为关于 $\mathscr{T}$ 的**相对拓扑** (relative topology), 拓扑空间 $(X',\ \mathscr{T}')$ 称为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的**子空间** (subspace); 若 X' 还是 X 的开 (闭) 子集, $(X',\mathscr{T}')$ 称为 $(X,\mathscr{T})$ 的**开子空间** (open subspace) (**闭子空间** (closed subspace)).

定理 2.1.1　设 $F'\subset X'\subset X$, 则 F' 是子空间 X' 的闭集当且仅当存在 X 中的闭集 F 使 $F'=F\cap X'$, 从而 $A\subset X'$ 关于 X' 的闭包 $\widetilde{A}=\overline{A}\cap X'$.

证明　设 F' 是子空间 X' 的闭集, 则 $X'-F'$ 开于 X', 存在 U 开于 X, 使 $X'-F'=U\cap X'$, 于是 $F'=X'-(U\cap X')=X'\cap(X-U)$, $X-U$ 闭于 X. 相反, 设 $A\subset X'$, $A=X'\cap F$, F 闭于 X, 则 $X'-A=X'-(X'\cap F)=X'\cap(X-F)$. 由于 $X-F$ 开于 X, 故 $X'-A$ 开于 X', 从而 A 是子空间 X' 的闭集.

下面证明: $\widetilde{A}=\overline{A}\cap X'$. 因为 $\overline{A}$ 是 X 中的闭集, 所以 $\overline{A}\cap X'$ 是 X' 中含 A 的闭集, 于是 $\widetilde{A}\subset\overline{A}\cap X'$. 另一方面, 由于 $\widetilde{A}$ 是 X' 的闭集, 存在 X 中的闭集 F 使 $\widetilde{A}=F\cap X'$, 于是 $A\subset\widetilde{A}\subset F$, 从而 $\overline{A}\subset F$, 因此 $\overline{A}\cap X'\subset F\cap X'=\widetilde{A}$. 故 $\widetilde{A}=\overline{A}\cap X'$. 证完.

引入两个记号. 对 $A\subset X'\subset X$, 集 A 关于子空间 X' 的闭包记为 $\mathrm{Cl}_{X'}(A)$, 所以定理 2.1.1 表明: $\mathrm{Cl}_{X'}(A)=\mathrm{Cl}(A)\cap X'$. 对 $Y\subset X$, 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族, 记 $\mathscr{U}|Y=\{U\cap Y:U\in\mathscr{U}\}$, 所以如果 $\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑, 则子空间 $X'\subset X$ 的拓扑是 $\mathscr{T}|X'$.

在分析学中考察函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续、可导时, 对端点 a 或 b 分别考察它的右半或左半邻域, 也就是点 a 或点 b 在数直线上的开邻域与闭区间 $[a,b]$

的交, 实际上已是相对拓扑概念, 即 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子空间.

下面介绍另一种方法.

对给定的两个拓扑空间 X, Y, 可以定义 X 到 Y 的连续映射 (定义 1.5.1), 现在的问题是: 给定了拓扑空间 $(X,\mathscr{U})$, 集 Y 及集 X 到集 Y 上的映射 f, 要求给 Y 以使 f 成为连续映射的最精拓扑. 如果不提 "最精", 则平凡拓扑就满足要求, 而且满足要求的拓扑不是惟一的. 根据连续映射的定义, 我们规定集 V 是 Y 中的开集当且仅当 V 的逆像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集, 容易验证这些 V 所成的集族满足 (O1)~(O3), 所以

$$\mathscr{V} = \{V : f^{-1}(V) \in \mathscr{U}\} \tag{2.1.1}$$

形成 Y 上的拓扑, $(Y,\mathscr{V})$ 是一拓扑空间, 显然 $\mathscr{V}$ 是使 f 连续的 Y 上的最精拓扑.

设集合 X 的某些不空子集所成的集族 $\mathscr{D}$, 满足下列两条件, 则称 $\mathscr{D}$ 是 X 的一个分解 (见 0.1 节):

(i) $\bigcup_{D\in\mathscr{D}} D = X$;

(ii) $\mathscr{D}$ 中不同的元是不相交的.

对从 X 到 Y 上的映射 f, $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ 形成 X 的一个分解.

设 R 是 X 上的等价关系 (即满足 xRx, $xRx' \Rightarrow x'Rx$, xRx' 及 $x'Rx'' \Rightarrow xRx''$ 的关系 R), 熟知 R 把集 X 分解许多等价类, 这些类所成集 X/R 满足上述两条件, 也就是形成 X 的一个分解. 当 X 是拓扑空间 $(X,\mathscr{U})$ 时, 由 X 到等价类所成集 X/R 上规定一映射 f, 使 X 中的每一点 x 对应着它所属的等价类, 从而在 X/R 上给以 (2.1.1) 式所示的拓扑, 这拓扑就是前面问题中所要求的最精拓扑 (由问题中的 f 可以确定等价关系 $R : f(x) = f(x') \Leftrightarrow xRx'$, 从而 $Y = X/R$), 称为**商拓扑** (quotient topology), Y $(= X/R)$ 称为**商空间** (quotient space), f 称为**商映射** (quotient mapping). 如果着眼于 X 的分解 $\mathscr{D}$, 则称 Y $(= X(\mathscr{D}))$ 为**分解空间** (decomposition space), 称 f 为**自然映射** (natural mapping) 或**自然商映射** (natural quotient mapping).

商映射总是连续的满映射.

例 2.1.1 取例 1.2.1 中的 Smirnov 删除序列拓扑空间 $\mathbb{R}^+$, 把集 $\{1/n : n = 1,2\cdots\}$ 中的点算作一类, 其他的点每一点算作一类, 在类所成的集上给以商拓扑 (2.1.1), 得到商空间 Y.

一般地说, 对拓扑空间 X 及其子空间 A, 引入 X 上的等价关系 R: 把 A 中的点算作一类, $X - A$ 中的每一点算作一类, 在类集 X/R 上给以商拓扑 (2.1.1), 得到的商空间常记为 X/A. 易验证, 当 A 是 X 的闭子空间时, 自然映射 $f : X \to X/A$ 是闭映射 (习题 2.1). 在例 2.1.1 中, 若记 $F = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, 则商空间 Y 记为 $\mathbb{R}^+/F$, 商映射 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+/F$ 是闭映射.

例 2.1.2 取例 1.2.2 中的 Niemytzki 半平面 $\mathbb{R}'$, 把 x 轴上有理点算作一类, 无理点算作一类, 其他的点每一点算作一类, 在类所成的集上给以商拓扑 (2.1.1), 得商空间 Y.

下面考察另一问题, 设给定了集 X, 拓扑空间 $(Y,\mathscr{V})$ 及集 X 到集 Y 上的映射 f, 要求给 X 以使 f 成为连续映射的最粗拓扑. 如果不提 "最粗", 则离散拓扑总是满足要求的, 而且满足要求的拓扑不是惟一的. 根据连续函数的定义, 我们规定集 U 是 X 中的开集当且仅当它是 Y 中某一开集 V 的逆像, 容易验证这些 U 所成的集族满足 (O1)~(O3), 所以

$$\mathscr{U}=\{U:U=f^{-1}(V),\ V\in\mathscr{V}\} \tag{2.1.2}$$

形成 X 上的拓扑, $(X,\mathscr{U})$ 是一拓扑空间, 显然 $\mathscr{U}$ 是使 f 连续的 X 上的最粗拓扑.

以上引进的构造新的拓扑空间的方法对下面定义积空间是很有用的.

在通常的平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 以开圆族 $\{S_\varepsilon((x,y)):\varepsilon>0\}$ 作为点 (x,y) 的开邻域基, 我们也可以取包含点 (x,y) 的开矩形族作为 $\mathbb{R}^2$ 的点 (x,y) 的开邻域基, 这是因为每一个开圆总包含某一个开矩形, 而每一个开矩形总包含某一个开圆, 这种开矩形可以表示为点 x, 点 y 在数直线上的开区间的积. 一般地说, 设有两个拓扑空间 $(X,\mathscr{U})$, $(Y,\mathscr{V})$, 作直积集 $Z=X\times Y$, 可以给直积集 $Z=X\times Y$ 以如下的拓扑 $\mathscr{W}$, 这拓扑 $\mathscr{W}$ 以集族

$$\{U\times V:U\in\mathscr{U},\ V\in\mathscr{V}\}$$

为它的开基, 这样得到的拓扑空间 $(Z,\mathscr{W})$ 称为拓扑空间 $(X,\mathscr{U})$ 与 $(Y,\mathscr{V})$ 的积空间. 这一方法可以推广到任意有限个拓扑空间的积空间情况.

设有拓扑空间 $(X_i,\mathscr{T}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 作直积集 $X=\prod_{i=1}^n X_i$, 给 X 以如下的拓扑 $\mathscr{W}$, 这拓扑 $\mathscr{W}$ 以集族

$$\left\{\prod_{i=1}^n V_i:V_i\in\mathscr{T}_i,\ i=1,2,\cdots,n\right\} \tag{2.1.3}$$

为开基 (容易验证满足 (B1) 和 (B2)).

对无限个拓扑空间情况, 似乎也可作如上处理, 可是结果太不理想, 不便于应用, 为此做如下处理.

设有一族拓扑空间 $\{(X_\gamma,\mathscr{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\varGamma}$, $\varGamma$ 是无限集, 作直积集 $X=\prod_{\gamma\in\varGamma}X_\gamma$, 设 p_γ 是 X 到 X_γ $(\gamma\in\varGamma)$ 上的投影映射. 我们要求给 X 以使每个投影映射 p_γ 都成为连续映射的最粗拓扑, 为此我们可以把类似于 (2.1.2) 式给出的集族

$$\{W:W=p_\gamma^{-1}(V_\gamma),\ V_\gamma\in\mathscr{T}_\gamma,\ \gamma\in\varGamma\}$$

作为 X 上拓扑 $\mathscr{W}$ 的次开基, 也就是这集族的元素的有限交的全体形成 $\mathscr{W}$ 的开基, 因此这开基是如下集族:

$$\left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma : V_\gamma \in \mathscr{T}_\gamma,\ \gamma\in\Gamma,\ \text{且除有限个 } \gamma \text{ 外 } V_\gamma = X_\gamma\right\} \tag{2.1.4}$$

(满足 (B1) 和 (B2)). 容易验证, $\mathscr{W}$ 是使投影映射 p_γ $(\gamma\in\Gamma)$ 都连续的 X 上的最粗拓扑, 这拓扑 $\mathscr{W}$ 称为**积拓扑** (product topology), 这是 A. Tychonoff [400] 引进的, 也称为 **Tychonoff 拓扑**. 空间 $(X,\mathscr{W})$ 称为空间族 $\{(X_\gamma,\mathscr{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的**积空间** (product space).

我们以后将看到这一似乎不太自然的处理结果有很大的应用. 如把集族

$$\left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma : V_\gamma \in \mathscr{T}_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\right\}$$

作为 X 上拓扑的开基, 则称此拓扑为**箱拓扑** (box topology), 它远没有 Tychonoff 拓扑所具有的良好性质. 本书不讨论箱拓扑, 积空间总是赋予 Tychonoff 拓扑.

比较 (2.1.3), (2.1.4), 可看到在有限个拓扑空间的情况, 两式是一致的, 也就是说用两种处理方法得到的积空间是一致的.

例 2.1.3 (希尔伯特立方体)　通常的 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 是 n 个数直线 $\mathbb{R}$ 的积空间.

$$I^\omega = \{(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots) : 0\leqslant x_i\leqslant 1/i,\ i=1,2\cdots\}$$

是闭区间 $[0,1/i]$ $(i=1,2,\cdots)$ 的积空间. I^ω 称为 **希尔伯特立方体** (Hilbert cube), 它是希尔伯特空间 (例 4.1.1) 的子集.

设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族离散空间, 指标集 Γ 是无限集, 每一空间 X_γ $(\gamma\in\Gamma)$ 至少包含两点, 则积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 不是离散空间. 因为由 (2.1.4) 式, 此积空间的单点集不可能是此空间的开集.

由 (2.1.4) 式, 容易看到积空间到它的坐标空间内的投影是开映射.

定理 2.1.2　拓扑空间 X 到积空间 $Y=\prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ 内的映射 f 是连续的, 当且仅当对积空间 Y 的每一个投影 p_γ $(\gamma\in\Gamma)$, 映射 $p_\gamma\circ f$ 是连续的.

证明　设 f 连续, 容易验证连续映射的复合映射是连续的, 所以 $p_\gamma\circ f$ $(\gamma\in\Gamma)$ 是连续的.

相反, 设 $p_\gamma\circ f$ $(\gamma\in\Gamma)$ 是连续的, 设 U_γ 是 Y_γ 中的开集, 则 $(p_\gamma\circ f)^{-1}(U_\gamma) = f^{-1}(p_\gamma^{-1}(U_\gamma))$ 是开集, 这里 $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ 是积空间 Y 的次开基的元素. 设 U 是 Y 中开集, 不妨取作 Y 的开基中的元素, 从而 U 是次开基中元素 $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ 的有限交, 由于

有限交的逆像 $(f^{-1}(U))$ 等于逆像 $(f^{-1}(p_\gamma^{-1}(U_\gamma)))$ 的有限交, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集. 证完.

定理 2.1.3 设 f 是拓扑空间 X 到它的商空间 Y 上的商映射, φ 是 Y 到拓扑空间 Z 上的映射, 则 φ 是连续的当且仅当 $\varphi\circ f$ 是连续的.

证明 设 φ 是连续的, 显然复合映射 $\varphi\circ f$ 是连续的. 相反, 设 $\varphi\circ f$ 是连续的, 设 U 是 Z 中的开集, 所以 $(\varphi\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ 是 X 中的开集, 由商拓扑的定义, $\varphi^{-1}(U)$ 应是 Y 中的开集, 所以 φ 是连续映射. 证完.

在 1.4 节, 用滤子和网刻画拓扑空间的收敛概念. 积空间上的收敛概念可以通过坐标空间上的收敛概念用滤子 (定理 2.1.4) 或网刻画, 下面的引理相当于分析学中用极限刻画连续性.

引理 2.1.1 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 是连续的, 当且仅当对任一 $x\in X$ 及 X 中的任一收敛于点 x 的滤子基 $\mathscr{F}$, 滤子基 $f(\mathscr{F})=\{f(A):A\in\mathscr{F}\}$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

证明 设 f 是连续的, 即对每一 $x\in X$ 及 $f(x)$ 的每一邻域 V, 存在 x 的邻域 U 使 $f(U)\subset V$ (定理 1.5.1 的 (v)), 设滤子基 $\mathscr{F}$ 收敛于 x, 即对 x 的任何邻域 U, 存在 $F\in\mathscr{F}$, 使 $F\subset U$. 显然, $f(\mathscr{F})$ 是滤子基, $f(\mathscr{F})$ 中的元素 $f(F)\subset f(U)\subset V$, 所以 $f(\mathscr{F})$ 收敛于点 $f(x)$. 相反, 设 $x\in X$, V 是 $f(x)$ 的任一邻域, 取点 x 的所有邻域形成的滤子 $\mathscr{U}(x)$, 则 $\mathscr{U}(x)$ 收敛于 x, 由假设滤子基 $f(\mathscr{U}(x))$ 收敛于 $f(x)$ (作为滤子的像应是滤子基), 于是存在 $F\in f(\mathscr{U}(x))$ 使 $F\subset V$, 这就是存在 $U\in\mathscr{U}(x)$, 使 $f(U)\subset V$, 所以 f 连续. 证完.

这引理相应于网 $\varphi(\Delta;>)$ 的论述, 其证明留给读者 (见习题 2.31).

定理 2.1.4 积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于点 $x=\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 当且仅当 $\mathscr{F}$ 在坐标空间 X_γ $(\gamma\in\Gamma)$ 上的投影 $p_\gamma(\mathscr{F})$ 收敛于 X_γ 中的点 x_γ.

证明 设 $\mathscr{F}\to x$, 由于投影 p_γ 是连续的, 由引理 2.1.1 得证. 相反, 设 U 是 X 中含点 x 的开集, 不妨设 U 可以表示为 $U=\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, 这里 Γ' 是 Γ 的有限子集. 对 $\gamma\in\Gamma'$, 由于滤子基 $p_\gamma(\mathscr{F})\to x_\gamma$, 存在 $p_\gamma(\mathscr{F})$ 中元素包含在 U_γ 内, 也就是存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $p_\gamma(F)\subset U_\gamma$. 由于 $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\supset F$, 由滤子的定义 (定义 1.4.1 的 (Fl2)), $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\in\mathscr{F}$, 从而对 $\gamma\in\Gamma'$, $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ 的有限交属于 $\mathscr{F}$ (由定义 1.4.1 的 (Fl3)). 这有限交就是 U, 所以 $U\in\mathscr{F}$, 到此证明了 $\mathscr{F}\to x$. 证完.

这定理相应于网 $\varphi(\Delta;>)$ 的论述, 其证明留给读者 (见习题 2.32).

由定理 2.1.4, 积拓扑的收敛可称为**按坐标收敛** (coordinatewise convergence) 或**按点收敛** (pointwise convergence). 后一术语更常用于所有坐标空间是相同的空间情况, 即对每一 $\gamma\in\Gamma$, $X_\gamma=X$, 这时相应的积空间记作 X^Γ. 当 Γ 是可数无限集时, 也记 X^Γ 为 X^ω. 由此, 单位闭区间 $I=[0,1]$ 的可数次积空间记为 I^ω, 由于每一 $[0,1/i]$ 同胚于 I $(i\in\mathbb{N})$, 易验证积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}[0,1/i]$ 同胚于积空间 I^ω, 即 Hilbert

立方体 (例 2.1.3) 同胚于 I^ω. 从而可以用 I^ω 表示 Hilbert 立方体.

定义 2.1.1 拓扑空间 X 的分解 $\mathscr{D}$ 称为**上半连续的** (upper semicontinuous), 如果对每一 $D \in \mathscr{D}$ 及每一开集 $U \supset D$, 存在开集 V, 使 $D \subset V \subset U$, 且 V 是 $\mathscr{D}$ 中某些元素的并.

定理 2.1.5 拓扑空间 X 到它的分解空间 $X(\mathscr{D})$ 上的自然映射 f 是闭映射, 当且仅当分解 $\mathscr{D}$ 是上半连续的.

这定理实际上是推论 1.5.1 (iii) 的特殊情况. 证明留给读者.

2.2 分离公理

拓扑空间的定义是很一般的, 很少的定理能建立在这样的情况下, 必须加以各种限制. 本节所讲的限制是关于点与点、点与闭集、闭集与闭集的各种分离情况, 通常称为**分离公理** (axioms of separation).

定义 2.2.1 (T_0 分离公理) 对拓扑空间 X 的不同两点 x_1, x_2, 存在其中一点的邻域不包含另外一点 (例如, x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2 \notin U(x_1)$). 以上叙述称为 **$\mathbf{T_0}$分离公理** (T_0-axiom of separation), 满足 T_0 分离公理的拓扑空间称为 **$\mathbf{T_0}$空间** (T_0-space).

至少含有两个点的平凡拓扑空间不是 T_0 空间, 不是 T_0 空间的拓扑空间很少有用处.

定理 2.2.1 下列论断等价:

(i) X 是 T_0 空间;

(ii) 对 X 的不同的两点 x_1, x_2, 或者 $x_1 \notin \overline{\{x_2\}}$, 或者 $x_2 \notin \overline{\{x_1\}}$;

(iii) 对 X 的不同的两点 x_1 与 x_2 具有不同的闭包 $\overline{\{x_1\}}$ 与 $\overline{\{x_2\}}$.

证明 (i)$\Rightarrow$ (ii). 设 $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$ 及 $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$ 同时成立, 则 x_1 的任何邻域包含 x_2, x_2 的任何邻域包含 x_1, 不满足 (i).

(ii)$\Rightarrow$ (i). 设 $x_1 \notin \overline{\{x_2\}}$, 则存在 x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2 \notin U(x_1)$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii). 显然.

(iii)$\Rightarrow$ (ii). 设 $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$, $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$ 同时成立, 亦即 $\{x_1\} \subset \overline{\{x_2\}}$, $\{x_2\} \subset \overline{\{x_1\}}$, 从而有 $\overline{\{x_1\}} \subset \overline{\overline{\{x_2\}}} = \overline{\{x_2\}}$, 同理 $\overline{\{x_2\}} \subset \overline{\{x_1\}}$, 故有 $\overline{\{x_1\}} = \overline{\{x_2\}}$, 不满足 (iii). 证完.

定义 2.2.2 (T_1 分离公理) 对拓扑空间 X 的不同两点 x_1, x_2, 存在点 x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2 \notin U(x_1)$, 点 x_2 的邻域 $U(x_2)$ 使 $x_1 \notin U(x_2)$. 以上叙述称为 **$\mathbf{T_1}$分离公理** (T_1-axiom of separation), 满足 T_1 分离公理的拓扑空间称为 **$\mathbf{T_1}$空间** (T_1-space).

设 X 是 Sierpiński 空间 (见推论 1.5.1 后), 即集 $X=\{0,1\}$ 赋予拓扑 $\{\varnothing,\{0\},X\}$. 存在点 0 的邻域 $\{0\}$ 不包含点 1, 但不存在点 1 的邻域不包含点 0, 所以这空间是 T_0 空间, 但不是 T_1 空间.

下述两定理的证明, 读者可以自己完成.

定理 2.2.2 拓扑空间 X 是 T_1 空间当且仅当每一个单点集 $\{x\}$ $(x\in X)$ 是闭集.

定理 2.2.3 设 X 是 T_1 空间, A 是 X 的无限子集, 则点 x 是集 A 的聚点当且仅当 x 的任一邻域包含集 A 的无限个点.

定义 2.2.3 (T_2 分离公理) 对拓扑空间 X 的不同两点 x_1,x_2, 存在点 x_1 的邻域 $U(x_1)$, 点 x_2 的邻域 $U(x_2)$, 使 $U(x_1)\cap U(x_2)=\varnothing$. 以上叙述称为 **$\mathrm{T}_2$分离公理** ($\mathrm{T}_2$-axiom of separation) 或 **Hausdorff 分离公理** (Hausdorff axiom of separation), 满足这公理的空间称为 **T_2空间** (T_2-space) 或 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space).

例 2.2.1 (不是 T_2 空间的 T_1 空间) 取例 1.3.1 的空间 $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{x^*\}$, 原来数直线 $\mathbb{R}$ 上的开集都是这空间 $\mathbb{R}^*$ 的开集, 另外数直线上有限集的补集与 $\{x^*\}$ 的并也是 $\mathbb{R}^*$ 的开集. 这些开集中含点 x^* 的集之全体形成点 x^* 的邻域基. 容易验证 $\mathbb{R}^*$ 是 T_1 空间, 对任一点 $x\in\mathbb{R}$ 及 x^* 不存在不相交的邻域, 所以 $\mathbb{R}^*$ 不是 T_2 空间.

由定义, 显然 $\mathrm{T}_2\Rightarrow\mathrm{T}_1\Rightarrow\mathrm{T}_0$, 由上面这些反例, 知相反的蕴含关系都不能成立.

T_2 空间具有良好的特征, 就是分析学上所谓 “极限的惟一性”, 现表述为如下定理.

定理 2.2.4 拓扑空间 X 是 T_2 空间当且仅当每一个滤子收敛于至多一点.

证明 设 X 是 T_2 空间, 滤子 $\mathscr{F}\to x$, 设 $x'\neq x$, 由定义 2.2.3, 存在点 x 的邻域 $U(x)$ 及点 x' 的邻域 $V(x')$, 使 $U(x)\cap V(x')=\varnothing$. 因为 $\mathscr{F}\to x$, $U(x)\in\mathscr{F}$, 由于 $U(x)\cap V(x')=\varnothing$, $V(x')\notin\mathscr{F}$, 所以 $\mathscr{F}$ 不能收敛于 x'. 相反 (用反证法), 设 X 不是 T_2 空间, 存在不同的点 x,x' 使其邻域 U, V 都相交, 对这些相交的邻域对 (U,V), 置

$$\mathscr{F}=\{M: M\supset U\cap V,\ U \text{ 是 } x \text{ 的邻域},\ V \text{ 是 } x' \text{ 的邻域}\}.$$

$\mathscr{F}$ 是一滤子, 由于 x 的每一邻域及 x' 的每一邻域都属于 $\mathscr{F}$, 所以有 $\mathscr{F}\to x$ 及 $\mathscr{F}\to x'$. 证完.

定义 2.2.4 (T_3 分离公理) 对拓扑空间 X 的闭集 F 及不属于 F 的点 x, 存在开集 U 及 V, 使 $U\supset F$, $x\in V$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 以上叙述称为 **T_3分离公理** (T_3-axiom of separation), 满足 T_3 分离公理的拓扑空间称为 **T_3空间** (T_3-space), 满足 T_1 及 T_3 分离公理的拓扑空间称为**正则空间** (regular space).

显然, $\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_3\Rightarrow\mathrm{T}_2$, 即正则 $\Rightarrow$ Hausdorff, 相反的蕴含关系不成立, 见例 2.2.2.

例 2.2.2 (Smirnov 删除序列拓扑 [372], 不是正则的 T_2 空间) 取例 1.2.1 中的 Smirnov 删除序列拓扑空间 $\mathbb{R}^+$, 容易验证这空间是 T_2 空间. 取 $F=\{1/n:n=1,2,\cdots\}$, F 是一闭集, 点 $0\notin F$, 不存在分别包含 F 及点 0 的开集 U 及 V 使 $U\cap V=\varnothing$.

定理 2.2.5 拓扑空间 X 是 T_3 空间当且仅当对每一 $x\in X$ 及每一包含 x 的开集 U, 存在开集 V 使 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$.

读者可以自己证明上述定理. 注意, 上述定理中的 U 可以取作基或次基的元素. 由定理 2.2.5 知 T_3 空间的每一点具有由闭集组成的邻域基, 称为**闭邻域基** (closed neighborhood base).

定义 2.2.5 (T_4 分离公理) 对拓扑空间 X 的不相交的闭集 F_1 及 F_2, 存在开集 U_1 及 U_2, 使 $U_1\supset F_1$, $U_2\supset F_2$ 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$. 以上叙述称为 **T_4分离公理** (T_4-axiom of separation), 满足 T_4 分离公理的拓扑空间称为 **T_4空间** (T_4-space), 满足 T_1 及 T_4 分离公理的拓扑空间称为**正规空间** (normal space).

显然, $T_1 + T_4 \Rightarrow T_1 + T_3$, 即正规 $\Rightarrow$ 正则, 相反的蕴含关系不成立, 见例 2.2.3.

例 2.2.3 (Niemytzki 半平面 [372], 不是正规的正则空间) 取例 1.2.2 中的 Niemytzki 半平面 $\mathbb{R}'$. 容易验证, 这空间是正则空间. 下面证明 $\mathbb{R}'$ 不是正规空间, 把 x 轴上有理点 γ 所成集记为 $\mathbb{Q}$, 无理点 η 所成集记作 $\mathbb{I}$, 在空间 $\mathbb{R}'$ 中, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ 是不相交的闭集. 用反证法, 姑设存在开集 U 及 V, $U\supset\mathbb{Q}$, $V\supset\mathbb{I}$, $U\cap V=\varnothing$. 把切于 x 轴上点 x 处的直径为 ε 的圆的内部记作 $S'_\varepsilon(x)$. 对每一 $\gamma\in\mathbb{Q}$, 存在 $S'_{d_\gamma}(\gamma)\subset U$, 对集 $\mathbb{I}$, 置

$$I_n=\{\eta:\eta\in\mathbb{I},S'_{1/n}(\eta)\subset V\},\quad n\in\mathbb{N},\tag{2.2.1}$$

得

$$\mathbb{I}=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n.\tag{2.2.2}$$

由于 $U\cap V=\varnothing$, 任一 $S'_{d_\gamma}(\gamma)$ 与任一 $S'_{1/n}(\eta)$ 不相交, 从而

$$(\gamma-\eta)^2\geqslant d_\gamma/n.\tag{2.2.3}$$

对每一 $\gamma\in\mathbb{Q}$, 取 $\varepsilon_\gamma>0$, $n\varepsilon_\gamma^2=d_\gamma$, 由 (2.2.3) 及 (2.2.1) 知开区间 $(\gamma-\varepsilon_\gamma,\gamma+\varepsilon_\gamma)$ 与 I_n 不相交 (从此以下, 把 x 轴作为数直线 $\mathbb{R}$ (通常拓扑)), 从而 $\gamma\notin\overline{I}_n$, 故有 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}-\overline{I}_n$, 由于 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ 及 $\overline{\mathbb{Q}}\subset\overline{\mathbb{R}-\overline{I}_n}$, 得

$$\mathbb{R}=\overline{\mathbb{R}-\overline{I}_n}=\mathbb{R}-(\overline{I}_n)^\circ,$$

所以 $(\overline{I}_n)^\circ=\varnothing$, 即 I_n 无处稠密于 $\mathbb{R}$. 由 (2.2.2) 式, 得无理数集 $\mathbb{I}$ 是第一纲的, 这

是矛盾的 (我们已证明无理数集是第二纲的, 见例 1.3.2), 这说明反证法的假设不能成立, $\mathbb{R}'$ 不是正规空间.

上述用 $\mathbb{R}$ 的第二纲性质导出 $\mathbb{R}'$ 不是正规空间的方法是很典型的证法, 常称此法为**纲方法** (或**范畴方法**, category method).

定理 2.2.6 拓扑空间 X 是 T_4 空间当且仅当对每一闭集 F 及每一包含 F 的开集 U, 存在开集 V 使 $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

读者自证.

满足 T_0, T_1, T_2, T_3 分离公理的空间的子空间分别满足 T_0, T_1, T_2, T_3 分离公理 (读者自证). 当然, 正则空间的子空间是正则空间, 可是 T_4 空间的子空间未必是 T_4 空间, 正规空间的子空间未必是正规空间.

例 2.2.4 (Tychonoff "板" [372], 正规空间的子空间不是正规的) 设 $[0,\omega_1]$ 是不大于第一个不可数序数 ω_1 的序数所成集, $[0,\omega]$ 是不大于第一个无限序数 ω 的序数所成集, 分别给以序拓扑. 由第 3 章定理 3.2.1 和推论 3.1.4 知积空间 $[0,\omega_1]\times[0,\omega]$ (称为 **Tychonoff "板"** (Tychonoff plank), 以 $[0,\omega_1]$ 为 "底", 以 $[0,\omega]$ 为 "高") 是正规空间. 考察它的子空间 $[0,\omega_1]\times[0,\omega]-\{(\omega_1,\omega)\}$ (去掉这 "板" 的右上角的点), 称为**删除 Tychonoff "板"** (deleted Tychonoff plank).

设 $A=\{(\omega_1,y):y<\omega\}$ ("板" 的右边), $B=\{(x,\omega):x<\omega_1\}$ ("板" 的上边). A, B 是不相交的闭集 (关于这子空间, 因为去掉了 "板" 的右上角的点). 下面证明不存在分别包含它们的不相交的开集. 设开集 $U\supset A$, 对每一 $y<\omega$, 取 $\varphi(y)$ 为第一个满足 $x>\varphi(y)\Rightarrow(x,y)\in U$ 的序数. $\varphi(y)<\omega_1$, 这可数个 $\varphi(y)$ 都小于 ω_1, 从而 $\sup\{\varphi(y)\}<\omega_1$, 所以存在可数序数 x^* 大于所有的 $\varphi(y)$, $(x^*,\omega)\in B$, 因此 (x^*,ω) 的任何邻域与 U 相交.

定义 2.2.6 (T_5 分离公理) 对拓扑空间 X 的满足 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$ 的集 A 及 B (满足该条件的集 A 及 B 也称为**可分离的或隔离的** (separated)), 存在开集 U 及 V 使 $U\supset A$, $V\supset B$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 以上叙述称为 **T_5分离公理** (T_5-axiom of separation), 满足 T_5 分离公理的拓扑空间称为 **T_5空间** (T_5-space), 满足 T_1 及 T_5 分离公理的拓扑空间称为**完全正规空间** (completely normal space).

显然 $T_5\Rightarrow T_4$, 完全正规 $\Rightarrow$ 正规. 由下面定理及例 2.2.4 知相反的蕴含关系不成立.

定理 2.2.7 拓扑空间 X 是完全正规空间当且仅当它的每一子空间是正规空间.

证明 只要证明空间 X 满足 T_5 分离公理当且仅当它的每一子空间满足 T_4 分离公理.

设 X 满足 T_5 分离公理, A 是 X 的子空间, F_1,F_2 是 A 中不相交的闭集. 由相对拓扑性 (定理 2.1.1), $F_1=\overline{F}_1\cap A$, $F_2=\overline{F}_2\cap A$, 这里 $\overline{F}_1,\overline{F}_2$ 是 F_1,F_2 关于空

间 X 的闭包. 因为

$$\overline{F}_1 \cap F_2 = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap A, \quad F_1 \cap \overline{F}_2 = \overline{F}_1 \cap A \cap \overline{F}_2,$$

而 $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap A = F_1 \cap F_2 = \varnothing$, 故有

$$\overline{F}_1 \cap F_2 = F_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing.$$

由 T_5 分离公理, 存在开集 U, V, 使 $U \supset F_1$, $V \supset F_2$ 且 $U \cap V = \varnothing$, 所以在子空间 A 中有 $U \cap A \supset F_1$, $V \cap A \supset F_2$. 而 $U \cap A$, $V \cap A$ 是 A 中不相交的开集, 所以子空间 A 满足 T_4 分离公理.

相反, 设空间 X 的每一子空间满足 T_4 分离公理, A, B 是 X 的子集满足 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. 置 $G = X - (\overline{A} \cap \overline{B})$, 则 $G \cap \overline{A}$, $G \cap \overline{B}$ 是子空间 G 中的不相交的闭集. 由假设, 存在 G 中的开集 U 及 V 使 $U \supset G \cap \overline{A}$, $V \supset G \cap \overline{B}$, 且 $U \cap V = \varnothing$. 由于 G 是 X 的开子空间, 所以 U, V 是 X 中的开集. 由于

$$G = X - (\overline{A} \cap \overline{B}) = (X - \overline{A}) \cup (X - \overline{B}),$$

故有

$$U \supset G \cap \overline{A} = (X - \overline{B}) \cap \overline{A} \supset A \cap \overline{A} = A.$$

同理 $V \supset B$, 所以 X 满足 T_5 分离公理. 证完.

由上述定理, 完全正规空间也称为**遗传正规空间** (hereditarily normal space). 所谓一个拓扑性质 $\mathscr{P}$ 是**遗传性** (hereditary property) 指任一具有 $\mathscr{P}$ 的空间的每一子空间都具有 $\mathscr{P}$. 容易验证 $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ 及正则性都具有遗传性. 例 2.2.4 说明 T_4 空间及正规性不具遗传性. 上述定理的证明中也证明了如下事实: "设空间 X 的每一开子空间是正规的, 则 X 的每一子空间是正规的." 任意个 T_0 (T_1, T_2, T_3, 正则) 空间的积空间是 T_0 (T_1, T_2, T_3, 正则) 空间 (读者可以自己证明, 如习题 2.9 和习题 2.10, 可利用次基的元素). 但是两个正规空间的积未必是正规空间 (见例 2.3.4).

提醒读者注意, 在不同的拓扑学书籍中, 关于 T_3, T_4, T_5 分离公理或正则、正规、完全正规空间等的叙述可能有所不同, 如把本书中的 T_3 空间, 正则空间分别定义为正则空间, T_3 空间.

2.3 可数公理

定义 2.3.1 拓扑空间 X 的基的最小势 (cardinal number) 称为此空间的**拓扑势** (weight), 表示为 $w(X)$. 拓扑势不大于 $\aleph_0$ 的空间称为满足**第二可数公理** (second

axiom of countability)或**第二可数空间** (second countable space), 也就是具有可数基的空间. 拓扑空间 X 的点 x 的邻域基的最小势称为这点在 X 中的**特征** (character), 表示为 $\chi(x, X)$; 拓扑空间 X 的特征定义为此空间每一点的特征的上确界, 表示为 $\chi(X)$. 特征不大于 $\aleph_0$ 的空间称为满足**第一可数公理** (first axiom of countability)或**第一可数空间** (first countable space), 即此空间的每一点具有一个邻域基至多由可数个开集组成.

拓扑空间 X 的集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 称为空间 X 的**覆盖** (covering), 如 $\cup\{U_\alpha : \alpha \in A\} = X$. 如果 $\mathscr{U}$ 中的元素都是开集 (闭集), 则称为开 (闭) 覆盖; 当指标集 A 是有限 (可数) 集时, 则称有限 (可数) 覆盖; 如果 $\mathscr{U}$ 的子集族 $\mathscr{U}'$ ($\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$) 仍是覆盖, 则称 $\mathscr{U}'$ 是 $\mathscr{U}$ 的**子覆盖** (subcovering). 如果拓扑空间 X 的任一开覆盖具有可数子覆盖, 则称 X 是 **Lindelöf 空间**. 如果拓扑空间 X 具有可数稠密子集, 则称 X 是**可分空间** (separable space).

定理 2.3.1 设拓扑空间 X 满足第一可数公理, 则

(i) 设点 x 是集 $A \subset X$ 的聚点, 则存在 $A - \{x\}$ 中的序列收敛于 x;

(ii) 集 A 是开集当且仅当收敛于 A 中某一点的序列都终留于 A;

(iii) 如果 x 是序列 $\{x_n\}$ 的聚点, 则存在 $\{x_n\}$ 的子序列收敛于 x.

证明 (i) 读者自证, 并比较习题 1.25.

(ii) 设 A 不是开的, 则 $X - A$ 不是闭的, 故存在 $X - A$ 的聚点 x 不属于 $X - A$, 从而 $x \in A$, 由 (i), 存在 $(X - A) - \{x\} = X - A$ 中的收敛于 x 的序列, 这一收敛序列显然不能终留于 A.

(iii) 是显然的. 证完.

注记 满足定理 2.3.1 的 (i), (ii) 的空间分别称为 **Fréchet 空间** [125] (Fréchet space), **序列型空间** [125] (sequential space). 从而满足第一可数公理 $\Rightarrow$ Fréchet 空间 $\Rightarrow$ 序列型空间.

满足第二可数公理的拓扑空间当然满足第一可数公理. 此外, 有下述两定理.

定理 2.3.2 满足第二可数公理的拓扑空间是可分的.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的可数基, 对每一 $U \in \mathscr{U}$, 任取点 $x(U) \in U$, 则集 $A = \{x(U) : U \in \mathscr{U}\}$ 是可数集. 下证集 A 稠密于空间 X, $X - \overline{A}$ 是一开集, 不能包含基 $\mathscr{U}$ 中的任何非空元素, 故是空集. 证完.

定理 2.3.3 满足第二可数公理的拓扑空间是 Lindelöf 空间.

证明 设 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是空间 X 的任一开覆盖, $\mathscr{U}$ 是 X 的可数基. 因为每一 V_α ($\alpha \in A$) 是某些 $U \in \mathscr{U}$ 的并, 所以存在 $\mathscr{U}$ 的子族 $\mathscr{U}'$ ($\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$) 覆盖 X. 对每一 $U \in \mathscr{U}'$, 选取 $\alpha(U) \in A$ 使 $U \subset V_{\alpha(U)}$, 这样得到的子覆盖 $\mathscr{V}' = \{V_{\alpha(U)} : U \in \mathscr{U}'\}$ 是可数的. 证完.

数直线 $\mathbb{R}$ 可以取所有开区间 (a,b) 作为基, 这里 a,b 是有理数, 由于有理数是可数的, 知数直线 $\mathbb{R}$ 具有可数基, 从而 $\mathbb{R}$ 是可分空间、Lindelöf 空间.

例 2.3.1 (有限补空间 [372], 不满足第二可数公理的可分空间)　设 X 是不可数集, 规定空集及有限集的补集是开集, 易验证这是 X 上的拓扑, 称为**有限补拓扑** (finite complement topology). 从而每个无限集 (包括可数无限集) 与每一个非空开集相交, 故每个无限集都稠密于 X. 下证此空间没有可数基. 设具有可数基 $\mathscr{B}$, 由于此空间是 T_1 的, 所以 $\mathscr{B}$ 中所有包含点 x 的元素的交 (可数交) 是 $\{x\}$. 用 de Morgan 公式于这可数交的补集 $(X-\{x\})$, 得到 $X-\{x\}$ 是可数个有限集的并, 从而 $X-\{x\}$ 是一可数集, 这是矛盾的.

例 2.3.2 (序空间 [372], 不满足第一可数公理的 Lindelöf 空间)　取例 2.2.4 中的空间 $[0,\omega_1]$, 点 ω_1 的邻域基为 $\mathscr{B}(\omega_1)=\{(\beta,\omega_1]:\beta<\omega_1\}$ 不是可数的, 所以空间 $[0,\omega_1]$ 不满足第一可数公理. 下面证明空间 $[0,\omega_1]$ 的任何开覆盖具有有限子覆盖.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 $[0,\omega_1]$ 的任一开覆盖, 设 $\omega_1\in$ 某 $U_1\in\mathscr{U}$, 令 $\beta_1=\min\{\beta:(\beta,\omega_1]\subset U_1\}$, 则 $\beta_1\notin U_1$, 因此 $\beta_1\in$ 某 $U_2\in\mathscr{U}$; 令 $\beta_2=\min\{\beta:(\beta,\beta_1]\subset U_2\}$, 则 $\beta_2\notin U_2$, 因此 $\beta_2\in$ 某 $U_3\in\mathscr{U}$. 依次可得:

$$V(\omega_1)=(\beta_1,\omega_1],\quad V(\beta_1)=(\beta_2,\beta_1],\quad V(\beta_2)=(\beta_3,\beta_2],\cdots.$$

$\mathscr{V}=\{V(\omega_1)\}\cup\{V(\beta_n):n\in\mathbb{N}\}\cup\{\{0\}\}$ 是 $[0,\omega_1]$ 的开覆盖, 这里 $\cdots<\beta_3<\beta_2<\beta_1$. 这样的过程如无限继续下去, 则集 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots\}$ 没有最小元, 这与 $[0,\omega_1]$ 是良序集矛盾, 所以这过程经有限次而终止, $\mathscr{U}$ 中包含此有限个 $\mathscr{V}$ 的元素形成 $\mathscr{U}$ 的有限子覆盖.

附带地考察空间 $[0,\omega_1)$, 此空间满足第一可数公理, 但不是 Lindelöf 空间. 对每一 $\alpha\in[0,\omega_1)$, $\alpha\neq 0$, 取 $\beta(\alpha)<\alpha$, 则开覆盖

$$\mathscr{V}=\{\{0\}\}\cup\{(\beta(\alpha),\ \alpha]:0<\alpha<\omega_1\}$$

没有可数子覆盖.

容易看到, 空间 $[0,\omega_1)$, $[0,\omega_1]$ 都不是可分的. 另外, 例 1.3.1 的空间 $\mathbb{R}^*$, 易知不满足第一可数公理, 这空间的有理点集形成可数稠密子集, 从而 $\mathbb{R}^*$ 是可分的. 可分而不是 Lindelöf 的空间见例 2.3.4.

定理 2.3.4 (Tychonoff 定理 [399])　正则 Lindelöf 空间是正规空间.

证明　设 A, B 是正则 Lindelöf 空间 X 的不相交闭集. 由正则性, 对每一 $x\in A$, 存在开集 $U(x)$, 使 $\overline{U(x)}\cap B=\varnothing$, $\mathscr{U}=\{U(x):\ x\in A\}$ 覆盖 A; 同理, 对每一 $y\in B$, 存在开集 $V(y)$, 使 $\overline{V(y)}\cap A=\varnothing$, $\mathscr{V}=\{V(x):x\in B\}$ 覆盖 B. 从而 $\mathscr{U}\cup\mathscr{V}\cup\{X-(A\cup B)\}$ 是 X 的开覆盖, 因 X 是 Lindelöf 空间, 存在可数子覆盖, 从而得到 A 及 B 的可数开覆盖 $\{U_n\}$ 及 $\{V_n\}$. 置

$$U_n'=U_n-\cup\{\overline{V}_k:k\leqslant n\},\quad V_n'=V_n-\cup\{\overline{U}_k:k\leqslant n\},$$

则得

$$U_n' \cap V_m' = \varnothing, \quad V_n' \cap U_m' = \varnothing \quad (m \leqslant n),$$

即任一 U_n' 与任一 V_m' 不交, 从而

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n', \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n'$$

是不相交的开集, 它们分别包含着 A, B. 证完.

推论 2.3.1 具有可数基的正则空间是正规空间.

证明 由定理 2.3.3 及 2.3.4 即得. 证完.

满足第一 (第二) 可数公理的空间的任何子空间满足第一 (第二) 可数公理. 比较例 2.3.2 中的空间 $[0,\omega_1]$ 与 $[0,\omega_1)$, 知 Lindelöf 空间的子空间可以不是 Lindelöf 空间. 可分空间的子空间也未必是可分空间 (见例 2.3.3 及例 2.3.4).

不超过可数个满足第一 (第二) 可数公理的空间的积空间满足第一 (第二) 可数公理 (习题 2.17). Pondiczery [334], Hewitt [192] 和 Marczewski [276] 独立地证明了不超过 **c** (连续统的势) 个可分空间的积空间是可分的空间. K. A. Ross 及 A. H. Stone [343], W. W. Comfort [96] 曾先后给出此定理的简化证明. 两个 Lindelöf 空间的积空间未必是 Lindelöf 空间 (见例 2.3.3 及例 2.3.4).

例 2.3.3 (半开区间拓扑, Sorgenfrey 直线 [371, 372]) 取实数集 X, 规定所有半开区间 $[a,b)$ (这里 a,b 是实数) 的集族 $\mathscr{B}$ 作为开基, 这样得到的拓扑称为**半开区间拓扑** (half-open interval topology), 赋以半开区间拓扑的数直线通常称为 **Sorgenfrey 直线** (Sorgenfrey line). $\mathscr{B}$ 中的元素是既开且闭的集. 形如 (a,b), $(a,+\infty)$ 的集也是开集, 因为 $(a,b) = \cup\{[\alpha,b):\ a<\alpha<b\}$. 这拓扑不同于数直线 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑, 显然此空间是 T_2 的.

此空间满足第一可数公理, 因为对每一点 $x \in X$, 可取 $\{[x,a_i) : a_i$ 是有理数 $\}$ 作为点 x 的可数邻域基.

此空间是可分空间, 因为有理点集稠密于此空间.

此空间不满足第二可数公理, 设 $\{[a_n,b_n)\}$ 是开基 $\mathscr{B}$ 中任意可数个元素所成集族, 取 $c \in X$ 使 $c \neq a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 任取 $c' > c$, 则不存在任何 $[a_n,\ b_n)$, 使 $c \in [a_n,\ b_n) \subset [c,\ c')$.

此空间是 Lindelöf 空间. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的任一开覆盖, 以 U_α° 记在数直线 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑下 U_α 的内核, 由于数直线 $\mathbb{R}$ 的任何子空间是 Lindelöf 的, 作为 $U=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha^\circ$ 的开覆盖 $\{U_\alpha^\circ\}_{\alpha\in A}$ 具有可数子覆盖 $\{U_{\alpha_i}^\circ\}$. 置 $F = X - U$, 下面证明 F 是可数集, 从而可被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中可数个覆盖. 对每一点 $a \in F$, a 必是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中某半开区间的左端点, 所以存在 $x_a > a$ 使 $(a,x_a)\cap F=\varnothing$, 这样的开

区间族 $\{(a,\ x_a)\}_{a\in F}$ 是两两互不交的 (不然与 F 的定义矛盾), 所以必须是可数的 (习题 2.21), 从而 F 是可数集.

此空间是遗传正规的. 取满足 $\overline{F}\cap H=F\cap\overline{H}=\varnothing$ 的集 F, H, 因 $F\subset X-\overline{H}$, $H\subset X-\overline{F}$, 对点 $x\in F$, 点 $y\in H$, 分别存在 $\varepsilon(x)>0$, $\varepsilon(y)>0$, 使

$$[x,\ x+\varepsilon(x))\cap\overline{H}=\varnothing,\quad [y,\ y+\varepsilon(y))\cap\overline{F}=\varnothing,$$

则 $[x,\ x+\varepsilon(x))\cap[y,\ y+\varepsilon(y))=\varnothing$. 令

$$U=\cup\{[x,\ x+\varepsilon(x)):x\in F\},\quad V=\cup\{[y,\ y+\varepsilon(y)):y\in H\},$$

这是分别含 F, H 的开集, 且 $U\cap V=\varnothing$. 由定理 2.2.7, 知 X 是遗传正规空间. 证完.

例 2.3.4 (半开矩形拓扑, Sorgenfrey 平面 [371, 372])　取例 2.3.3 中空间 X 与它自身的积空间 $Y=X\times X$, 这积拓扑称为**半开矩形拓扑** (half-open square topology), 积空间称为 **Sorgenfrey 平面** (Sorgenfrey plane). 它作为两个可分空间的积是可分空间.

考察 Y 的闭子空间 $E=\{(x,y):\ x+y=1\}$, 此空间的单点集都是开集, 是离散空间, 所以 E 既不是可分空间, 也不是 Lindelöf 空间. 此外, 可以证明 Lindelöf 空间的任何闭子空间是 Lindelöf 空间 (习题 2.18), 由此可推得空间 Y 不是 Lindelöf 空间.

这里说明可分空间的子空间未必可分, Lindelöf 空间的积空间未必是 Lindelöf 空间.

空间 $Y=X\times X$ 不是正规空间. 仍考察它的闭子空间 E, 在直线 $x+y=1$ 上取所有第一坐标是有理数的点所成集为 Q, 所有第一坐标是无理数的点所成集为 I, $Q\cup I=E$, Q, I 是闭于子空间 E 的, 也是空间 Y 的不相交的闭集. 用例 2.2.3 中相同的方法 (纲方法, 这里 E 中点的邻域呈半开矩形, 例 2.2.3 中 Niemytzki 半平面的 x 轴上的点的邻域是切于这一点的开圆连同这一点, 二者有某些共同性), 可以证明不存在分别包含 Q, I 的不相交的开集.

这里看到两个正规空间的积空间未必是正规的. 这两个例非常重要, 以后还要引用.

例 2.3.5 (不满足第一可数公理的可数空间 [114])　一个具有可数个点的空间 (简称可数空间) X, 它的每一点的邻域基的势都不是可数的.

设 $\mathbb{R}$ 是数直线, 每一 D_t $(t\in\mathbb{R})$ 同胚于离散空间 $D=\{0,1\}$, 则 $|\mathbb{R}|=\mathbf{c}$, 且 D_t 是可分空间. 由于 $\mathbf{c}$ 个可分空间的积是可分空间 (见推论 2.3.1 后的叙述), 置 $D'=\prod_{t\in\mathbb{R}}D_t$, 则存在可数子集 X 稠密于 D'. 下面证明这可数空间 X 的每一点的邻域基的势都不是可数的. 为此, 只要证对任一 $x\in X$, x 的任一可数邻域族

$\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 存在 x 的邻域 U 使对每一 $i\in\mathbb{N}$ 有

$$V_i\cap(X-U)\neq\varnothing. \tag{2.3.1}$$

设 $x=\{x_t\}_{t\in\mathbb{R}}\in X$, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域族, 由积拓扑的定义, 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在有限集 $R_i\subset\mathbb{R}$ 使

$$x\in X\cap\left(\prod_{t\in\mathbb{R}}W_t^i\right)\subset V_i, \tag{2.3.2}$$

这里, 当 $t\in R_i$ 时, W_t^i 是坐标空间 D_t 中包含 x_t 的开集 (可以取作单点集 $\{x_t\}$, 因 D_t 离散); 当 $t\in\mathbb{R}-R_i$ 时, $W_t^i=D_t$.

因 $\mathbb{R}$ 不可数, 存在 $t_0\in\mathbb{R}-\bigcup_{i\in\mathbb{N}}R_i$, 开集 $U=p_{t_0}^{-1}(x_{t_0})$ 是点 x 在 D' 中的邻域, 因 D_{t_0} 中的单点集是闭的, U 又是 D' 中的闭集, 从而

$$\prod_{t\in\mathbb{R}}W_t^i-U\quad(i\in\mathbb{N})$$

是 D' 中的开集. 易知这开集不空, 因 X 稠密于空间 D', 所以这开集与 X 的交不空, 即

$$\prod_{t\in\mathbb{R}}W_t^i\cap(X-U)\neq\varnothing\quad\left(\text{因}\prod_{t\in\mathbb{R}}W_t^i-U=\prod_{t\in\mathbb{R}}W_t^i\cap(D'-U)\right).$$

由 (2.3.2) 式, 即得 (2.3.1), 证完.

2.4 函数分离性与完全正则空间

2.2 节的分离公理笼统地说是把点与点、点与闭集、闭集与闭集用不相交的开集把它们分离, 通常称为**邻域分离性** (neighborhood separation property). 这里引进**实值函数** (拓扑空间到数直线的映射) 这一工具分离点与闭集、闭集与闭集, 通常称相应的性质为**函数分离性** (functional separation property).

定理 2.4.1 (Urysohn 引理 [403]) 设 A, B 是 T_4 空间 X 的两个不相交闭集, 则存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0,x\in A$; $f(x)=1,x\in B$.

证明 因 A, B 是不相交的闭集, $X-B$ 是包含 A 的开集, 由 T_4 分离公理, 存在开集 $U_{1/2}$ 使

$$A\subset U_{1/2}\subset\overline{U}_{1/2}\subset X-B.$$

再由 T_4 分离性, 存在开集 $U_{1/4}$ 及 $U_{3/4}$ 使

$$A\subset U_{1/4}\subset\overline{U}_{1/4}\subset U_{1/2}\subset\overline{U}_{1/2}\subset U_{3/4}\subset\overline{U}_{3/4}\subset X-B.$$

这样下去, 可以得到一族开集, 它的足标是 $k/2^n$ 型的真分数, 用 Γ 记一切 $k/2^n$ 型的真分数所成集, 记这开集族 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. 显然, 集 Γ 稠密于 $[0,1]$, 且对 $\gamma<\gamma'$ 有

$$A\subset U_\gamma\subset\overline{U}_\gamma\subset U_{\gamma'}\subset\overline{U}_{\gamma'}\subset X-B.$$

定义映射 $f:X\to[0,1]$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{\gamma:x\in U_\gamma\}, & x\in\text{某些 }U_\gamma,\\ 1, & x\notin\text{任何 }U_\gamma.\end{cases}$$

显然, $x\in B$ 时, $f(x)=1$; $x\in A$ 时, $x\in$ 所有 U_γ $(\gamma\in\Gamma)$, $f(x)=0$.

现在证 f 的连续性. 设 $x_0\in X, f(x_0)\in(0,1)$ (当 $f(x_0)=0$ 或 1 时, 证法类似). 取 $\varepsilon>0$ 使

$$0<f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon<1$$

(也就是取点 $f(x_0)$ 的 ε 邻域使这邻域包含在 (0,1) 内). 存在 $\gamma',\gamma''\in\Gamma$, 使

$$0<f(x_0)-\varepsilon<\gamma'<f(x_0)<\gamma''<f(x_0)+\varepsilon<1.$$

由定义 $f(x)=\inf\{\gamma:x\in U_\gamma\}$, 知 $x_0\in U_{\gamma''}$, $x_0\notin\overline{U}_{\gamma'}$ (不然 $f(x_0)\leqslant\gamma'$). 从而 $U_{\gamma''}-\overline{U}_{\gamma'}$ 是点 x_0 的开邻域, 记作 $U(x_0)$, 则有

$$f(U(x_0))\subset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon).$$

证完.

如把定理 2.4.1 所证明的内容: "对不相交的闭集 A, B, 存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0,x\in A$; $f(x)=1,x\in B$" (通常称为不相交闭集的函数分离性), 记作 **F_4或 F_4函数分离性**, 则定理 2.4.1 可简写为 $T_4\Rightarrow F_4$. 其逆也成立, 只要对满足 F_4 的上述函数 f, 置 $U=f^{-1}([0,1/2))$, $V=f^{-1}((1/2,1])$, 则 $U\supset A$, $V\supset B$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 所以, 对不相交的闭集说邻域分离性等价于函数分离性, 从而正规空间的定义也可写作 T_1+F_4, 也就是:

"T_1 空间 X 称为正规空间, 如果对不相交的闭集 A, B, 存在连续函数 $f:X\to[0,1]$, 使 $f(x)=0,x\in A$; $f(x)=1,x\in B$."

设 f 是空间 X 的子空间 X' 到空间 Y 的连续映射, 如果存在 X 到 Y 的连续映射 g, 使 $g(x)=f(x)$, $x\in X'$, 则称 g 是 f 到 X 上的 (连续) **扩张** (extension); 也称 f 是 g 在 X' 的**限制** (restriction). 例如, 设 $X=[0,1]$, $X'=(0,1]$, 则定义在 $(0,1]$ 上的函数 $f(x)=1/x$ 不能扩张到 $[0,1]$ 上; 而定义在 $(0,1]$ 上的函数 $\varphi(x)=x\cdot\sin(1/x)$ 可以扩张到 $[0,1]$ 上, 只要置 $g(0)=0$, $g(x)=\varphi(x)$, $x\in(0,1]$.

设 A, B 是空间 X 上的任意两个不相交闭集, 定义函数 $f:A\cup B\to[0,1]$, 使 $f(x)=0,x\in A$; $f(x)=1,x\in B$, f 在闭子空间 $A\cup B$ 上是连续的, 因为 A, B

是关于子空间 $A \cup B$ 的既开且闭集. 如果存在 f 到 X 上的 (连续) 扩张 g, 可置 $U = g^{-1}([0,1/2))$, $V = g^{-1}((1/2,1])$, 则 U, V 是分别包含 A, B 的不相交开集, 故 X 是 T_4 空间. 相反, 有下述定理.

定理 2.4.2 (Tietze 扩张定理 [403]) 设 X 是 T_4 空间, F 是闭子集, f 是 F 到 $\mathbb{R}$ 内的有界连续函数, 则存在 f 到 X 上的连续扩张 g, 使

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in F\}.$$

证明 设 $\mu = \sup\{|f(x)| : x \in F\}$, 置

$$F_1 = f^{-1}([\mu/3, \infty)), \quad F_2 = f^{-1}((-\infty, -\mu/3]).$$

由 Urysohn 引理, 可得连续函数 $g_0 : X \to \mathbb{R}$ 且

$$g_0(x) = \begin{cases} \mu/3, & x \in F_1, \\ -\mu/3, & x \in F_2. \end{cases}$$

$\sup\{|g_0(x)| : x \in X\} = \mu/3$, 置

$$f_1(x) = f(x) - g_0(x), \quad x \in F,$$

则 $\sup\{|f_1(x)| : x \in F\} = \mu_1 \leqslant 2\mu/3$. 这样继续下去, 可得实值函数 g_n, f_n 满足:

(i) g_n 在 X 上连续, f_n 在 F 上连续;

(ii) $f_0(x) = f(x), x \in F; f_n(x) = f_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)$;

(iii) $\sup\{|f_n(x)| : x \in F\} = \mu_n \leqslant (2/3)^n\mu,\ \mu_0 = \mu$;

(iv) $\sup\{|g_n(x)| : x \in X\} = \mu_n/3$.

置

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x), \quad x \in X. \tag{2.4.1}$$

由 (iii) 及 (iv), $|g_n(x)| \leqslant \mu_n/3 \leqslant (2/3)^n \cdot \mu/3$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n \cdot \mu/3 = \mu$, 所以 (2.4.1) 式右端连续函数 (由 (i)) 项级数一致收敛, 故 g 在 X 上连续. 此外, 由 (ii)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = g(x), \quad x \in F.$$

故 g 是 f 到 X 上的扩张且 $\sup\{|g(x)| : x \in X\} = \mu$. 证完.

上述一般形式是 P. Urysohn 于 1925 年得到的. 1915 年, H. Tietze 对度量空间 (定义 4.1.1) 证明了上述定理 [114].

定义 2.4.1 T_1 空间 X 称为**完全正则空间** (completely regular space) 或 **Tychonoff 空间** (Tychonoff space), 如果对空间 X 的每一闭集 F 及每一点 $x \notin F$, 存在连续函数 $f : X \to [0,1]$, 使 $f(x) = 0;\ f(x') = 1, x' \in F$.

如把上述定义中的条件记作 F_3 或 **F_3函数分离性**, 则上述定义可改写为: 满足 F_3 函数分离性的 T_1 空间称为完全正则空间.

显然, 完全正则性蕴含正则性 ($F_3 \Rightarrow T_3$), 读者可自证 (同前面的 $F_4 \Rightarrow T_4$), 但其逆不真. Tychonoff [400] 曾给出正则而不是完全正则的空间, 这例比较复杂, 下述相对简单的例子属于 A. Mysior [311].

例 2.4.1 (不是完全正则的正则空间) 让 $M_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$, $z_0 = (0,-1)$ 且 $M = M_0 \cup \{z_0\}$, 记 $L = \mathbb{R} \times \{0\}$, $L_i = [i, i+1] \times \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$. 对 $z = (x,0) \in L$, 记

$$A_1(z) = \{(x,y) \in M_0 : 0 \leqslant y \leqslant 2\}, \quad A_2(z) = \{(x+y,y) \in M_0 : 0 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

在 M 上定义如下拓扑:

(i) $M_0 - L$ 中的点是孤立点;

(ii) $z = (x,0) \in L$ 的邻域基元形如 $(A_1(z) \cup A_2(z)) - B$, 其中 B 是不含有点 z 的有限集;

(iii) z_0 的邻域基元形如 $U_i(z_0) = \{z_0\} \cup \{(x,y) \in M_0 : x \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{N}$,

则 M 是 T_2 空间.

M 是正则空间. 易见, 对 $z \in M_0$, 上述定义的点 z 的邻域基元是 M 的既开且闭的子集, 因而只需对 M 的闭集 F 及 $z_0 \notin F$ 验证正则性. 这时存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使 $F \cap U_{i_0}(z_0) = \varnothing$, 令

$$U_1 = U_{i_0+2}(z_0), \quad U_2 = M - (U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1}),$$

则 U_1, U_2 是不相交的开集且分别含 z_0, F.

M 不是完全正则空间. 否则, 存在连续映射 $f : X \to [0,1]$ 使 $f(z_0) = 1$ 且 $f(L_1) = \{0\}$. 对 $i \in \mathbb{N}$, 令 $K_i = \{z \in L_i : f(z) = 0\}$. 用归纳法证明每一 K_i 是无限集. 设 K_n 是无限的, 存在可数无限集 $C_n \subset K_n$, 对每一 $z \in C_n$ 及 $j \in \mathbb{N}$, 令 $F(z,j) = A_2(z) - f^{-1}([0,1/j])$, 则 $F(z,j)$ 是不含点 z 的闭集, 于是 $F(z,j)$ 是有限集, 令 $A_0(z) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F(z,j)$, 则 $A_0(z)$ 是 $A_2(z)$ 的可数子集且 $A_0(z) = A_2(z) - f^{-1}(0)$, 即 $f(A_2(z) - A_0(z)) = \{0\}$. 令 A 是 $\cup\{A_0(z) : z \in C_n\}$ 在 L 的投影, 则 A 是可数的. 下证 $L_{n+1} - A \subset K_{n+1}$ 以完成归纳证明. 设 $t \in L_{n+1} - A$, 对每一 $z \in C_n$ 有 $A_1(t) \cap (A_2(z) - A_0(z)) \neq \varnothing$, 于是有 $A_1(t)$ 中无限序列 $\{t_m\}$ 使 $f(t_m) = 0$, $m \in \mathbb{N}$. 由 f 的连续性知 $f(t) = 0$, 即 $t \in K_{n+1}$. 现在, 取定 $z_i \in K_i$, 那么 $z_i \to z_0$, 于是 $f(z_0) = 0$, 矛盾. 证完.

在 T_1 空间, 显然 $F_4 \Rightarrow F_3$, 也就是正规 $\Rightarrow$ 完全正则, 但其逆不真. 例 2.2.3 的 Niemytzki 半平面 $\mathbb{R}'$ 不是正规空间, 是正则空间, 实际上还是完全正则空间, 验证于下.

现在就 x 轴上的点 $p(x,0)$ 及任一闭集 $F \not\ni p$ 验证 (其他情况类似). 存在点 p 的开邻域 $U_\varepsilon(p)$ 使 $U_\varepsilon(p) \cap F = \varnothing$, 这里 $U_\varepsilon(p) = S'_\varepsilon(p) \cup \{p\}$, $S'_\varepsilon(p)$ 是切 x 轴于点 p 处直径为 ε 的圆的内部, 对任何点 $q \in S'_\varepsilon(p)$, 通过点 q 切 x 轴于点 p 处的圆的直径记作 $d(q)$, 定义 $\mathbb{R}'$ 上的函数 g 如下: $g(p) = 0$, 且

$$g(q) = \begin{cases} d(q), & q \in S'_\varepsilon(p), \\ \varepsilon, & q \notin U'_\varepsilon(p), \end{cases}$$

这里处于开圆 $S'_\varepsilon(p)$ 内部切于点 p 的圆周上的点取相同的值 (这圆的直径). 置 $f = g/\varepsilon$, 则得连续函数 $f : \mathbb{R}' \to [0,1]$, 使 $f(p) = 0; f(q) = 1, q \in F$.

对应于 T_2 分离公理的 **F_2函数分离性**可以叙述为: 对空间 X 的不同的点 x_1, x_2, 存在连续函数 $f : X \to [0,1]$, 使 $f(x_1) = 0, f(x_2) = 1$, 满足 F_2 函数分离性的空间称为**函数分离 T_2 空间** (functional separated T_2-space). 显然, 函数分离 T_2 空间是 T_2 空间, 但其逆不真. Urysohn [403] 曾作出不是函数分离 T_2 空间的 T_2 空间. 下面介绍一较简单的例子: **简化的 Arens 方形** (simplified Arens square[372]).

让 $I = (0,1)$ 是单位开区间, 取 $X = (I \times I) \cup \{(0,0),\ (1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$, 赋予下述拓扑:

(i) $I \times I$ 作为 X 的开子空间具有通常的欧几里得拓扑;

(ii) 点 $(0,0)$ 的邻域基元形如

$$U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : 0 < x < 1/2,\ 0 < y < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

(iii) 点 $(1,0)$ 的邻域基元形如

$$U_n(1,0) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) : 1/2 < x < 1,\ 0 < y < 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

此空间称为简化的 Arens 方形. 易验证 X 是 T_2 空间. 因为点 $(0,0)$, $(1,0)$ 没有不相交的闭邻域, 所以不存在连续函数 $f : X \to [0,1]$, 使 $f(0,0) = 0, f(1,0) = 1$, 从而 X 不是函数分离 T_2 空间.

容易验证, Tychonoff 空间的子空间是 Tychonoff 空间.

定理 2.4.3 Tychonoff 空间的积空间是 Tychonoff 空间.

证明 为行文便利起见, 对连续映射 f, 点 x, 开集 $U \ni x$, 满足 $f(x) = 0, f(x') = 1$ $(x' \in X - U)$ 者称为 f 是关于 (x, U) 的映射. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 分别是关于 $(x, U_1), (x, U_2), \cdots, (x, U_n)$ 的映射, 取 $g(x) = \sup\{f_i(x) : i = 1, 2, \cdots, n\}$, 则 g 是关于 $(x, \bigcap_{i=1}^n U_i)$ 的映射. 为此只要证明对积空间 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 中任一 (x, U), 存在关于它的映射 f, 这里 U 是积空间次基的元素, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

对 $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, 设 U_α 是 x_α 在 X_α 中的开邻域, 由假设 X_α 是 Tychonoff 空间, 存在关于 (x_α, U_α) 的映射 f_α, 则 $f_\alpha \circ p_\alpha$ 是关于 $(x, p_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ 的映射, 这里 p_α 是积空间到坐标空间 X_α 上的投影, 而 $p_\alpha^{-1}\ (U_\alpha)$ 正是积空间的次基的元素.

此外, T_1 空间的积空间是 T_1 空间. 证完.

设 X, Y 是拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$ 称为**浸没** (或**嵌入**, embedding), 如果 $f: X \to f(X)$ 是同胚映射.

定理 2.4.4 (Tychonoff 浸没定理 [400]) 拓扑空间 X 是 Tychonoff 空间当且仅当 X 同胚于闭区间 $I = [0,1]$ 的积空间的某一子空间.

证明 $I = [0,1]$ 是 Tychonoff 空间, 由定理 2.4.3, 积空间也是 Tychonoff 空间, 从而其子空间也是 Tychonoff 空间.

相反, 设 X 是 Tychonoff 空间, 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 到 $[0,1]$ 内的连续函数的全体, 对指标集 A, 构造积空间 $P = \prod_{\alpha\in A} I_\alpha\ (= I^A)$, 这里 $I_\alpha = [0,1]$, $\alpha \in A$. 对每一点 $x \in X$, 使对应着 P 中的点 $f(x) = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ 得到 X 到 P 内的映射 f, 下面证明 $f: X \to f(X)$ 是同胚映射.

由定理 2.1.2, f 是连续的.

设 x, y 是 X 中不同的两点. 因 X 是 T_1 空间, 单点集是闭的, 于是存在连续函数 $f_\alpha: X \to [0,1]$ 使 $f_\alpha(x) = 0, f_\alpha(y) = 1$, 所以 $f(x), f(y)$ 的第 α 个坐标是不同的, 从而 $f(x) \neq f(y)$, 因此 f 是一一对应的.

为了证明 f^{-1} 是连续的, 设 U 是空间 X 中点 x 的邻域 (不失一般性, U 可作为是开的). 因 X 是 Tychonoff 空间, 存在连续函数 $f_\alpha: X \to [0,1]$ 使 $f_\alpha(x) = 0; f_\alpha(y) = 1, y \in X - U$. 取空间 P 中点 $f(x)$ 的邻域

$$V = U_\alpha \times \prod_{\alpha' \neq \alpha} I_{\alpha'},$$

这里 $U_\alpha = [0,1)$. 如 $x' \notin U$, 则 $f_\alpha\,(x') = 1$, 从而 $f(x') \notin V$. 所以 $f(x') \in V$ 蕴含 $x' \in U$, 也就是 $p' \in V \cap f(X) \Rightarrow f^{-1}(p') \in U$. 从而 $f^{-1}(V \cap f(X)) \subset U$. 所以 f^{-1} 是 $f(X)$ 到 X 的连续映射. 到此证明了 f 是 X 到 $f(X) \subset P$ 上的同胚映射. 证完.

2.5 连 通 空 间

定义 2.5.1 拓扑空间 X 称为**连通空间** (connected space), 如果 X 不能表示为两个不相交的不空闭集的并; X 的子集 $X' \subset X$ 称为**连通的** (connected), 如果子空间 X' 是连通空间.

显然, 拓扑空间 X 是连通空间, 当且仅当 X 不能表示为两个不相交的不空开集的并, 当且仅当 X 中没有既开又闭的非空真子集.

例 2.5.1 数直线 $\mathbb{R}$ 是连通空间. 姑设 $\mathbb{R} = F \cup G$, F, G 是不交的不空闭集. 存在闭区间 $J = [a,b]$ 使 $J \cap F \neq \varnothing$, $J \cap G \neq \varnothing$, b 属于 F 或 G, 现设 $b \in J \cap G$, 置 $c = \sup(J \cap F)$, 因 $J \cap F$ 是闭集, $c \in J \cap F$. 显然 $c < b$, 由 c 的定义, 知 $(c, b] \subset J \cap G$.

因 $J\cap G$ 是闭集, $[c,b]\subset J\cap G$, 从而 $c\in F\cap G$, 这与 F,G 不相交矛盾. 所以 $\mathbb{R}$ 是连通空间.

$\mathbb{R}$ 上所有有理点所成集 $\mathbb{Q}$ 不是连通集. 因为对任一无理数 η, 集

$$F=\{r:r\in\mathbb{Q},r>\eta\}\quad 及\quad G=\{r:r\in\mathbb{Q},r<\eta\}$$

是不相交的闭集 (关于子空间 $\mathbb{Q}$), 而 $\mathbb{Q}=F\cup G$. 同理, $\mathbb{R}$ 上所有无理点所成集也不是连通的.

定理 2.5.1 设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 的一族连通子集, 设 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\neq\varnothing$, 则 $\cup\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 是连通集.

证明 姑设 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=F\cup G$, F,G 是子空间 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的不相交的不空闭集. 取点 $x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$, 则 $x\in F$ 或 $x\in G$. 设 $x\in F$, 因 G 不空, 存在 $\gamma\in\Gamma$, 使 $G\cap A_\gamma\neq\varnothing$. 置 $F\cap A_\gamma=F'$, $G\cap A_\gamma=G'$. F',G' 是子空间 A_γ 的不空闭集, 且 $A_\gamma=F'\cup G'$, $F'\cap G'=\varnothing$, 所以 A_γ 不是连通集, 这与假设矛盾. 证完.

定理 2.5.2 设 A 是拓扑空间 X 的连通子集且 $A\subset B\subset\overline{A}$, 则 B 是连通集.

证明 姑设 $B=F\cup G$, F,G 是子空间 B 的不相交的不空闭集. 注意, F,G 同时又都是子空间 B 的开集. 任取 $x\in F$, 那么 $x\in\overline{A}\cap B$ (A 关于 B 的闭包, 见定理 2.1.1), 作为 x 的邻域 F 应有 $F\cap A\neq\varnothing$; 同理 $G\cap A\neq\varnothing$. 置

$$F'=F\cap A,\quad G'=G\cap A,$$

则 F',G' 是子空间 A 的不相交闭集, 且 $A=F'\cup G'$, 所以 A 不是连通集, 这与假设矛盾. 证完.

定理 2.5.3 设 x 是拓扑空间 X 的点, 设 P 是空间 X 的包含点 x 的所有连通子集的并, 则 P 是连通闭集.

证明 由定理 2.5.1, P 是连通集. 由定理 2.5.2, $\overline{P}$ 是连通集. 因 $x\in P$, 由定义 $\overline{P}\subset P$, 所以 $\overline{P}=P$, 即 P 是闭集. 证完.

定义 2.5.2 上述定理 2.5.3 中的连通集 P 称为拓扑空间 X 的**连通区** (**或成分**, component), 也就是**极大连通子集** (不存在真包含它的其他连通子集, maximal connected subset); 拓扑空间 X 的每一连通区如果都仅由一点组成, 则称 X 为**完全不连通空间** (totally disconnected space).

易知, 如果两个连通区相交, 则这两个连通区重合, 所以每一拓扑空间 X 可以分解为两两不相交的连通区的并.

定理 2.5.4 连通空间的积空间是连通空间.

证明 设 X_α $(\alpha\in A)$ 是连通空间, 设 $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 可表示为两个不相交闭集 F,G 的并, 下证必有一个闭集 (F 或 G) 是空集, 从而 X 是连通的. 设 F 不空, 则可取点 $x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\in F$. 下面先证明: 与点 x 仅有限个坐标不同的点属于 F.

为此只要证明: 与点 x 仅有一个坐标不同的点属于 F, 然后重复有限回即得. 置

$$P = \{\{x'_\alpha\}_{\alpha \in A} : x'_\alpha = x_\alpha,\ \alpha \neq \alpha_0\},$$

则易知 $P \subset X$ 且同胚于空间 X_{α_0}, 所以 P 是连通的. 另外, P 可以表示为两个不相交闭集 $P \cap F$, $P \cap G$ 的并. 由于 $x \in P \cap F$, 所以 $P \cap F \neq \varnothing$, 因为 P 是连通的, 于是 $P \cap G = \varnothing$, 所以 $P \cap F = P$, 从而 $P \subset F$. 到此证明了与点 x 仅有一个坐标不同的点属于 F. 置

$$Q = \{\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} : y_\alpha = x_\alpha \text{ 除有限个 } \alpha \text{ 外}\},$$

则由上所证, $Q \subset F$, 从而 $\overline{Q} \subset \overline{F}$. 另一方面, 由积拓扑的定义, Q 稠密于 X, 从而 $\overline{F} = X$, 因 F 是闭集, $F = X$, 所以 $G = \varnothing$. 故 X 是连通空间. 证完.

由例 2.5.1 及定理 2.5.4 知, n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 是连通空间.

定义 2.5.3 拓扑空间 X 称为**局部连通的** (locally connected), 如果对每一 $x \in X$ 及包含 x 的每一开集 U, 存在开的连通集 V, 使 $x \in V \subset U$; 即 X 具有由连通集构成的基.

显然, 局部连通空间未必是连通的 (例如, 数直线上由两个不相交的开区间的并形成的子空间). 但也存在连通空间而不是局部连通的.

例 2.5.2 (拓扑学家的正弦曲线 [372]) 考察平面 $\mathbb{R}^2$ 上由 $f(x) = \sin(1/x)$ $(0 < x \leqslant 1)$ 的图像及点 $(0,0)$ 形成的子空间, 称为**拓扑学家的正弦曲线** (topologist's sine curve). 由定理 2.5.2, 这空间是连通的, 但包含在点 $(0,0)$ 的任何充分小的开邻域中的连通集只有单点集 $\{(0,0)\}$, 而 $\{(0,0)\}$ 不是这子空间的开集.

定义 2.5.4 拓扑空间 X 称为**弧式连通空间** (arcwise connected space), 如果对这空间的任意两点 a, b, 存在连续映射 $f : [0,1] \to X$, 使 $f(0) = a, f(1) = b$.

显然, 弧式连通空间是连通空间, 但其逆不真, 例 2.5.2 的连通空间不是弧式连通空间.

习 题 2

2.1 若 A 是拓扑空间 X 的闭子集, 证明自然映射 $f : X \to X/A$ 是闭映射. 验证例 2.1.1 中的商空间 Y 是否 T_2 空间? 从这些事实可以得出什么结论?

2.2 证明例 2.1.2 中 Niemytzki 半平面 $\mathbb{R}'$ 到商空间 Y 上的商映射是闭映射. 验证 Y 是否正则空间? 从这些事实可以得出什么结论?

2.3 拓扑空间中子集的导集是否总是闭的? 试证明在 T_1 空间子集的导集是闭的.

2.4(杨忠道) 拓扑空间 X 的子集的导集是闭的当且仅当单点集 $\{x\}$ $(x \in X)$ 的导集是闭的.

2.5(高国士) "拓扑空间的子集的导集是闭的" 可以作为介于 T_0, T_1 间的分离公理. 试证明它严格地强于 T_0 分离公理, 严格地弱于 T_1 分离公理.

2.6 证明 $y = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ 不是 $\mathbb{R}$ 到 $[-1, 1]$ 上的闭映射.

2.7 拓扑空间 X 是 T_2 空间当且仅当积空间 $X \times X$ 中的**对角线** (diagonal) $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ 是闭集.

2.8 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是拓扑空间族, 每一 $A_\gamma \subset X_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. 证明: $\overline{\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \prod_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma$.

2.9 T_2 空间的积空间是 T_2 空间.

2.10 正则空间的积空间是正则空间.

2.11 正规空间的闭子空间, F_σ 子空间是正规的.

2.12 正规空间在连续闭映射下的像是正规空间.

2.13 完全正规空间在连续闭映射下的像是完全正规空间.

2.14 设 X 是正规空间, F, G 分别是这空间的闭、开集, 且 $G \supset F$, 则存在开的 F_σ 集 W 使 $F \subset W \subset G$.

2.15 设 W 是正规空间 X 的开 F_σ 集, 则存在 X 到 $[0, 1]$ 的连续映射 f 使 $W = \{x : x \in X, f(x) > 0\}$.

2.16 设 W 是正规空间 X 的开 F_σ 集, 则 $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 诸 F_i 是闭集且满足 $F_i \subset F_{i+1}^{\circ} \subset F_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

2.17 可数个满足第一 (第二) 可数公理的空间的积空间满足第一 (第二) 可数公理.

2.18 Lindelöf 空间的闭子空间是 Lindelöf 空间.

2.19 可分空间的开子空间是可分空间.

2.20 设拓扑空间 X 具有一个可数开基, 则 X 的每一个开基总包含着一个可数子族也是空间 X 的开基.

2.21 拓扑空间称为满足**可数链条件** (countable chain condition), 简记为 CCC, 如果这空间的每一个互不相交的开集族是可数的. 可分空间满足可数链条件, 但是其逆不真 (考察一不可数集, 规定空集及可数集的补集为开集, 如此构造的拓扑空间称为**可数补空间** (countable complement space [372])).

2.22 Lindelöf 空间, 可分空间在连续映射下的像分别是 Lindelöf 空间, 可分空间.

2.23 连通空间在连续映射下的像是连通空间.

2.24 设 X 是连通空间, Y 是 X 的连通子集且 $X - Y = A \cup B$, 这里 A 与 B 是可分离的 (定义 2.2.6), 则 $A \cup Y$ 是连通集.

2.25 设 E 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 内具有下列性质的点所成集: 它的两个坐标中至少有一个无理数, 则 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子空间.

2.26 设拓扑空间 X 是有限个正规闭子空间的并, 则 X 是正规空间.

2.27 设 f 是拓扑空间 X 到 T_2 空间 Y 内的连续映射, 则集 $\{(x, y) : x \in X,\ y \in Y,\ f(x) = y\}$ 是积空间 $X \times Y$ 的闭集.

2.28 设 f 是正规空间 X 的闭子集 F 到 I^n $(I = [0, 1],\ n \in \mathbb{N})$ 内的连续映射, 则 f 可以连续地扩张到 X 上.

2.29 拓扑空间 X 的集族称为**离散的** (discrete [46]), 如果对每一 $x \in X$ 存在邻域 $U(x)$ 至多与集族中一个元素相交. 设 $\{F_n\}$ 是正规空间 X 的可数离散闭集族, 则存在可数互不相交的开集族 $\{G_n\}$ 使 $G_n \supset F_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

2.30 (Dowker) 设 $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是正规空间 X 的离散闭集族, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的互不相交的开集族且对每一 $\gamma\in\Gamma, U_\gamma\supset F_\gamma$, 则存在离散开集族 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 使对每一 $\gamma\in\Gamma$, 有 $F_\gamma\subset V_\gamma\subset\overline{V}_\gamma\subset U_\gamma$. 利用这一结果改进上一题的结果.

2.31 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 是连续的, 当且仅当对每一 $x\in X$ 及 X 中任一收敛于点 x 的网 $\varphi(\Delta;>)$, 网 $f\circ\varphi(\Delta;>)$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

2.32 积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的网 $\varphi(\Delta;>)$ 收敛于点 $x=\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 当且仅当 $\varphi(\Delta;>)$ 在坐标空间 X_γ $(\gamma\in\Gamma)$ 上的投影 $p_\gamma\circ\varphi(\Delta;>)$ 收敛于 X_γ 中的点 x_γ.

第3章 紧 空 间

紧空间是拓扑空间中最重要的空间类之一. 它具有相应于数直线 $\mathbb{R}$ 上闭区间所具有的 Heine-Borel 性质, 也就是每一开覆盖具有有限子覆盖. 紧空间类包含着所有闭区间类以及 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭子集类. 分析学中有许多重要性质与紧性有关.

3.1 紧 空 间

定义 3.1.1 拓扑空间 X 称为**紧空间** (compact space 或 bicompact space), 如果 X 的每一开覆盖具有有限子覆盖.

显然, 紧空间是 Lindelöf 空间 (定义 2.3.1), 数直线本身是 Lindelöf 空间而不是紧空间, 数直线上的闭区间是紧空间. 在例 2.3.2 中, 我们证明了序空间 $[0,\omega_1]$ 的每一开覆盖有有限子覆盖, 因此序空间 $[0,\omega_1]$ 是紧空间. 用完全相同的方法可以证明, 对任何无限序数 α, 序空间 $[0,\alpha]$ 都是紧空间.

回忆有限交性质 (定义 1.4.1): 集 X 的子集族 $\mathscr{F}=\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 称为具有有限交性质, 如果 $\mathscr{F}$ 的任何有限子族的交不空, 也就是设 $\Gamma'\subset\Gamma$ 是任何有限子族, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma\neq\varnothing$.

定理 3.1.1 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当每一具有有限交性质的闭集族的交不空.

证明 按 "X 的每一开覆盖具有有限子覆盖" 等价于 "如果 X 的开集族的任何有限子族不能覆盖 X, 则这开集族不能覆盖 X", 取开集族中开集的补集, 由 de Morgan 公式知后一论断又等价于 "X 中具有有限交性质的闭集族的交不空", 故得证. 证完.

作为上述定理的推论有推论 3.1.1.

推论 3.1.1 紧空间的闭集 (闭子空间) 是紧的.

下面是关于紧子空间的一些定理. 对拓扑空间 X 及其子集 A, 若 X 的子集族 $\mathscr{U}$ 满足 $A\subset\cup\mathscr{U}$, 称 $\mathscr{U}$ **覆盖** (cover) A. 由子空间的定义, 立刻得到下述定理.

定理 3.1.2 拓扑空间 X 的子集 A 是紧的当且仅当由 X 的开集组成的每一覆盖 A 的集族具有有限子族覆盖 A.

由推论 3.1.1 及定理 3.1.2, 可得

推论 3.1.2　设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 是拓扑空间 X 的闭集, $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ 是紧集当且仅当每一 F_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是紧集.

在定理 3.1.2 中, 置 $U = X - A$, $F_\gamma = X - U_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. 由 de Morgan 公式, 定理 3.1.2 中的两个包含式分别转换为 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ 及 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma'} F_\gamma$. 如设 A 为闭集, 则 U 为开集, 由定理 3.1.2 中的 A 是紧集, 故应设 X 为紧空间, 故得下述定理.

定理 3.1.3　设 X 是紧空间, $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 中的闭集族, U 是开集. 如果 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, 则存在有限子族 $\Gamma' \subset \Gamma$, 使 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma'} F_\gamma$.

推论 3.1.3　设 $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 中的闭集族, 其中至少有一个闭集 (如 F_{γ_0}) 是紧的, U 是开集. 如果 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, 则存在有限子族 $\Gamma' \subset \Gamma$, 使 $U \supset \bigcap_{\gamma\in\Gamma'} F_\gamma$.

证明　以 F_{γ_0} 作为定理 3.1.3 中的 X, $F_{\gamma_0} \cap F_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ 作为 F_γ 即得证. 证完.

定理 3.1.4　设 X 是 T_2 空间, A, B 是不相交的紧子集, 则存在不相交的开集 U, V, 使 $U \supset A$, $V \supset B$.

证明　固定 $x \in B$. 对每一 $y \in A$, $x \neq y$, 由于 T_2 分离性, 存在不相交的开集 V_y 与 U_y, 使 $x \in V_y$, $y \in U_y$, 于是 $\{U_y\}_{y\in A}$ 作为 X 的开子集族覆盖紧子集 A, 由定理 3.1.2, 存在有限个 $y_i \in A$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$. 令 $V_x = \bigcap_{i=1}^k V_{y_i}$, $U_x = \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$, 则它们是不相交的开集且 $x \in V_x$, $A \subset U_x$.

现在, $\{V_x\}_{x\in B}$ 作为 X 的开子集族覆盖紧子集 B, 具有有限子族 $\{V_{x_j}\}_{j\leqslant n}$ 覆盖 B. 令 $V = \bigcup_{j=1}^n V_{x_j}$, $U = \bigcap_{j=1}^n U_{x_j}$, 则它们是不相交的开集且 $A \subset U$, $B \subset V$. 证完.

由推论 3.1.1, 定理 3.1.4 即得如下推论.

推论 3.1.4　T_2 紧空间是正规空间.

推论 3.1.5　T_2 空间的紧集是闭的.

证明　设 A 是 T_2 空间 X 的紧子集. 若 $x \in X - A$, 在定理 3.1.4 中取 $B = \{x\}$, 则存在不相交的开集 U, V, 使 $A \subset U$, $x \in V$, 所以 $V \subset X - A$. 故 A 是闭集. 证完.

注意到在定理 3.1.4 第一步的证明中, 如果空间 X 是 T_3 空间, 那么将点 x 换成一般的闭集, 证明仍然可以进行. 由此可以得下面的定理.

定理 3.1.5　设 A 是 T_3 空间 X 的紧子空间, 闭集 $B \subset X - A$, 则存在不相交的开集 U, V, 使 $U \supset A$, $V \supset B$.

相应于定理 3.1.5 的函数分离性的情况, 有如下定理.

定理 3.1.6　设 A 是 Tychonoff 空间 X 的紧子空间, 闭集 $B \subset X - A$, 则存在 X 到 $[0,1]$ 的连续函数 f 使 $f(x) = 0, x \in A$; $f(x) = 1, x \in B$.

证明　对每一点 $x \in A$, 存在 X 到 $[0,1]$ 的连续函数 f_x 使 $f_x(x) = 0$; $f_x(x') = 1, x' \in B$. 从而 $A \subset \bigcup_{x\in A} f_x^{-1}([0, 1/2))$. 由定理 3.1.2, 存在有限个点 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in$

A, 使 $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} f_{x_i}^{-1}([0,1/2))$. 置

$$g(x) = \min\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \cdots, f_{x_k}(x)\},$$

则 $g(x)$ 是 X 到 $[0,1]$ 的连续函数, 且

$$A \subset g^{-1}([0,1/2)), \quad g(x) = 1 \quad (x \in B).$$

置 $f(x) = 2 \cdot \max\{g(x) - 1/2, 0\}$, 容易验证 $f(x)$ 满足定理要求. 证完.

下面是关于紧空间的映射方面的定理.

定理 3.1.7 紧空间在连续映射下的像是紧空间.

证明 设 f 是紧空间 X 到空间 Y 上的连续映射, $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是空间 Y 的任一开覆盖, 则 $\{f^{-1}(U_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是空间 X 的开覆盖. 因 X 紧, 存在有限子族 $\{f^{-1}(U_{\gamma_i})\}_{i=1,2,\cdots,k}$, 覆盖空间 X, 从而 $\{U_{\gamma_i}\}_{i=1,2,\cdots,k}$ 是 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的有限子族, 覆盖空间 Y, 故 Y 是紧空间. 证完.

定理 3.1.8 紧空间到 T_2 空间上的连续映射是闭映射.

证明 设 f 是紧空间 X 到 T_2 空间 Y 上的连续映射, F 是空间 X 的任一闭集. 由推论 3.1.1, F 是紧集. 由于连续函数限制在它的定义域的任一子空间上时仍是连续的, 从而由定理 3.1.7, 知 $f(F)$ 是空间 Y 的紧子集. 因 Y 是 T_2 的, 由推论 3.1.5, $f(F)$ 是闭集, 所以 f 是闭映射. 证完.

推论 3.1.6 紧空间到 T_2 空间上的一一对应的连续映射是同胚映射.

推论 3.1.7 在集 X 上给以拓扑 $\mathscr{T}_1$ 及 $\mathscr{T}_2$ 且 $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$, 设 $(X, \mathscr{T}_1)$ 是紧空间, $(X, \mathscr{T}_2)$ 是 T_2 空间, 则 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

下面用滤子刻画紧空间.

定理 3.1.9 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当满足下列条件之一:

(i) X 中的每一个滤子具有聚点;

(ii) X 中的每一个极大滤子是收敛的.

证明 紧性 $\Rightarrow$ (i). 设 $\mathscr{F}$ 是紧空间 X 中的滤子, 则 $\overline{\mathscr{F}} = \{\overline{A} : A \in \mathscr{F}\}$ 是具有有限交性质的闭集族, 由定理 3.1.1, 这闭集族的交不空, 也就是存在点 x 属于每一个 $\overline{A}$ $(A \in \mathscr{F})$, 由定义 1.4.3, x 是滤子 $\mathscr{F}$ 的聚点.

(i) $\Rightarrow$ (ii). 由 (i), X 中每一极大滤子具有聚点 x, 由定理 1.4.3 知, 这极大滤子收敛于点 x.

(ii) $\Rightarrow$ 紧性. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 但不具有有限子覆盖, 则

$$\mathscr{F}' = \{X - U : U \in \mathscr{U}\}$$

具有有限交性质. 由定理 1.4.1, 存在极大滤子 $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}'$. 由 (ii), $\mathscr{F}$ 收敛, 从而 $\mathscr{F}$ 具有聚点 x, 也就是点 x 属于 $\mathscr{F}$ 中每一个元素的闭包, 当然对 $\mathscr{F}'$ 中每一个元素

也成立, 所以对每一个 $U \in \mathscr{U}$, 有

$$x \in \overline{X-U} = X - U.$$

这与 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖矛盾 (利用 de Morgan 公式), 所以 $\mathscr{U}$ 具有有限子覆盖, 故 X 是紧空间. 证完.

相应于网的论述留给读者论证 (习题 3.8).

下面是关于紧空间的拓扑势 (定义 2.3.1) 的讨论.

定义 3.1.2 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{N}$ 称为 X 的**网络** (network [14]), 如果对每一 $x \in X$ 及包含 x 的邻域 U, 存在 $\mathscr{N}$ 中的元素 N, 使 $x \in N \subset U$; 空间 X 的网络的势的最小者称为此空间的**网络势** (network weight), 表示为 $n(X)$.

拓扑空间 X 的任一开基显然是网络, 另外 X 的每一单点集组成的集族 $\{\{x\}: x \in X\}$ 也是网络. 因此, 网络势 $n(X)$ 不比 X 的拓扑势 $w(X)$ 及 X 的势 $|X|$ 大, 即 $n(X) \leqslant w(X)$ 及 $n(X) \leqslant |X|$. 由例 3.1.1 知, 在一般情况 $n(X) = w(X)$ 不能成立.

定义 3.1.3 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族不相交的拓扑空间, 也就是 $\gamma \neq \gamma'$ 时, $X_\gamma \cap X_{\gamma'} = \varnothing$. 在集 $X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 上规定 $U \subset X$ 是 X 中的开集, 如果对每一 $\gamma \in \Gamma$, $U \cap X_\gamma$ 是 X_γ 中的开集. 这样规定的开集族显然满足 (O1)~(O3), 形成 X 上的拓扑. 这一拓扑空间称为空间族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的**拓扑和** (topological sum), 记作 $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.

例 3.1.1 设 I_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 同胚于单位闭区间 $I = [0,1]$, 对于 $x \in [0,1]$, 设 x_i 是 I_i 的对应点. 置 $X = \bigoplus_{i=1}^\infty I_i$ 为诸 I_i 的拓扑和, 引入等价关系 R: 对 $x \in (0,1]$, 各 $x_i \in I_i$ 仅等价于其本身; 对于 0, 0_i 等价于 0_j, 也就是把所有的 0_i 叠合为一点, 记这一点为 0^*, 这样得到的商空间记作 $X/R = K$, 相应的商映射记作 f. 由商拓扑的定义, K 中点 0^* 的邻域基元形如 $\bigcup_{i=1}^\infty f([0_i, x_i))$, 这里每一 x_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 可以取任意小的正数, 所以 K 中点 0^* 的邻域基的势至少是 $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathbf{c}$, 从而 $w(K) \geqslant \mathbf{c}$. 另一方面, $K - \{0^*\}$ 是可数个不相交的半开区间 $(0_i, I_i]$ 的并, 故具有可数基 $\mathscr{B}'$, 从而 $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \cup \{\{0^*\}\}$ 是空间 K 的可数网络, 所以 $n(X) \leqslant \aleph_0$ (实际上等号成立). 故 $n(K) < w(K)$. 注意, 空间 K 不是紧的.

定理 3.1.10 [14] 设 X 是 T_2 紧空间, 则 $n(X) = w(X)$.

证明 这里只要证明 $n(X) \geqslant w(X)$. 设 $n(X) = m$, 当 m 是有限数时, 因 X 是 T_1 空间, 可知 $|X| \leqslant m$, 且 X 是离散空间, 故等式成立.

设 $m \geqslant \aleph_0$. 网络 $\mathscr{N}$ 的势是 m. 考察 $\mathscr{N}$ 中满足下列条件 (3.1.1) 的一对元素 N_1, N_2:

$$\text{存在 } U_1,\ U_2 \in \mathscr{T}_1 \text{ 使 } U_1 \supset N_1,\ U_2 \supset N_2 \text{ 且 } U_1 \cap U_2 = \varnothing, \tag{3.1.1}$$

这里 $\mathscr{T}_1$ 是 X 上的拓扑. 对满足 (3.1.1) 的网络元素对 (N_1, N_2), 取定 $\mathscr{T}_1$ 中的元素对 (U_1, U_2) 与之对应, $\mathscr{T}_1$ 中具有上述性质的 U_1, U_2 的全体记作 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 中元素的有

限交所成族记作 $\mathscr{B}_0$. 下面证明 $\mathscr{B}_0$ 满足开基条件 (B1) 和 (B2) (定理 1.2.2).

$\mathscr{B}_0$ 满足 (B1) 是显然的. 设 $x \in X$, 存在 $U \in \mathscr{T}_1$ 使 $x \in U$, 由正则性, 存在开集 V 使 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, 从而存在 $N_1 \in \mathscr{N}$ 使 $x \in N_1 \subset V$, $X - \overline{V}$ 是开集. 任取 $x' \in X - \overline{V}$, 存在 $N_2 \in \mathscr{N}$, 使 $x' \in N_2 \subset X - \overline{V}$, 所以 (N_1, N_2) 是满足 (3.1.1) 的网络元素对, 从而有 $\mathscr{T}_1$ 中的元素对 (U_1, U_2) 与之对应, 于是 $x \in U_1 \in \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$, 所以 $\mathscr{B}_0$ 满足 (B2). $\mathscr{B}_0$ 可以作为某一拓扑的开基. 设这一由 $\mathscr{B}_0$ 生成的拓扑为 $\mathscr{T}_2$, 则 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

现证空间 $(X, \mathscr{T}_2)$ 是 T_2 空间. 对 $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, 因 $(X, \mathscr{T}_1)$ 是 T_2 空间, 存在 $U', U'' \in \mathscr{T}_1$ 使 $x_1 \in U'$, $x_2 \in U''$ 且 $U' \cap U'' = \varnothing$. 因 $\mathscr{N}$ 是网络, 存在 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$ 使 $x_1 \in N_1 \subset U'$, $x_2 \in N_2 \subset U''$, 于是 (N_1, N_2) 是满足 (3.1.1) 的网络元素对, 从而存在 (U_1, U_2) 与之对应, $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_2$. 所以 $(X, \mathscr{T}_2)$ 是 T_2 空间, 由推论 3.1.7, $\mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_1$.

显然, $|\mathscr{B}_0| \leqslant m$, 到此证明了 $w(X) \leqslant n(X)$. 证完.

推论 3.1.8 T_2 紧空间的拓扑势不大于这空间的势, 即 $w(X) \leqslant |X|$.

推论 3.1.9 设 f 是拓扑空间 X 到 T_2 紧空间 Y 上的连续映射, 则 $w(Y) \leqslant w(X)$.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的开基, 由 f 的连续性, 知 $\{f(U) : U \in \mathscr{B}\}$ 是空间 Y 的网络, 由定理 3.1.10 得证. 证完.

如果让 X 是例 2.3.5 中的可数空间, 由于 X 的每一点的邻域基的势都不是可数的, 所以推论 3.1.8 关于 T_2 紧空间的结论在一般情况下不能成立. 如果在上述可数集 X 上另外给以离散拓扑得到空间 X', 考察由 X' 到 X 上的恒等映射, 通过这映射拓扑势增大了, 这说明推论 3.1.9 中的条件 T_2 紧是重要的.

例 3.1.2 (Alexandroff 双线空间[9]) 考察平面 $\mathbb{R}^2$ 内的两个闭区间 $C_i = \{(x, y) : y = i,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ $(i = 1, 2)$. 记它们的并为 $Z = C_1 \cup C_2$, 规定每一点 $z \in Z$ 的邻域基 $\mathscr{B}(z)$ 如下:

(i) 当 $z \in C_2$ 时, $\mathscr{B}(z) = \{\{z\}\}$;

(ii) 当 $z = (x, 1) \in C_1$ 时, $\mathscr{B}(z) = \{U_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$U_k(z) = \{(x', y') : 0 < |x - x'| < 1/k\} \cup \{z\}.$$

容易验证, $\{\mathscr{B}(z)\}_{z \in Z}$ 满足 (NB1)~(NB4) (定理 1.2.3). 空间 Z 称为 **Alexandroff 双线空间** (Alexandroff's double lines space). 显然, Z 是 T_2 空间.

子空间 C_2 是具有势 $\mathbf{c}$ 的离散空间, 它开且稠于空间 Z; 子空间 C_1 同胚于 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑的闭区间, 它闭于空间 Z.

读者可以自己证明这空间 Z 是紧空间 (习题 3.9). 此外, 易知这空间 Z 满足第一可数公理, 不满足第二可数公理, 也不是可分空间.

如在 Z 中引入等价关系 $R: C_2$ 中的每一点等价于本身, C_1 中的点两两等价, 得到商空间 Z/R 或 Z/C_1. 原来 C_1 中的所有点都等同于 Z/R 中的点 z^*, 相应的商映射当然连续. 从而 Z/R 是紧的 (定理 3.1.7). 此外, 易知 Z/R 是 T_2 的, 点 z^* 的邻域基的势不是可数的. 这里说明推论 3.1.9 关于拓扑势的论述对于邻域基的势并不成立.

3.2 Tychonoff 定理

Tychonoff 积定理 (定理 3.2.1) 是一般拓扑学中最重要的定理之一, 这定理显示了 2.1 节所定义的 Tychonoff 积拓扑的合适与美好, 以及紧空间的良好性质 (可与 3.5 节中的空间比较).

Tychonoff 积定理的证明不可避免地要用选择公理, 下面证明中用的 Tukey 引理是选择公理的一种形式, 这一证明属于 N. Bourbaki [57].

集族 $\mathscr{A}$ 称为有限特征的, 如果 A 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 A 的每一有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素.

引理 3.2.1 (Tukey 引理)　每一具有有限特征的集族存在极大元, 即存在 $A_0 \in \mathscr{A}$ 使对任何 $A \in \mathscr{A}$, 若 $A \supset A_0$, 则 $A = A_0$.

定理 3.2.1 (Tychonoff 积定理[400, 401])　任意个紧空间的积空间是紧空间.

证明　设积空间 $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, 每一 X_γ $(\gamma \in \Gamma)$ 是紧空间, 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的具有有限交性质的闭子集族, 所有这种具有有限交性质的子集族所成的类是有限特征的. 由 Tukey 引理, 存在极大元 $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}$. 为了证明 $\mathscr{F}$ 中的元素的交不空, 只要证明, 存在 $x \in X$, 使对每一 $A \in \mathscr{F}_0$, $x \in \overline{A}$.

由 $\mathscr{F}_0$ 的极大性, 有

$$A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathscr{F}_0, \quad 则 \bigcap_{n=1}^{k} A_n \in \mathscr{F}_0; \tag{3.2.1}$$

$$A_0 \subset X, A_0 \cap A \neq \varnothing \text{ 对每一 } A \in \mathscr{F}_0 \text{ 成立}, \quad 则 A_0 \in \mathscr{F}_0. \tag{3.2.2}$$

因 $\mathscr{F}_0$ 具有有限交性质, 对每一 $\gamma \in \Gamma$, 空间 X_γ 的闭子集族 $\{\overline{p_\gamma(A)}\}_{A\in\mathscr{F}_0}$ 也具有有限交性质. 因 X_γ 是紧空间, 存在点 $x_\gamma \in X_\gamma$, 使 $x_\gamma \in \bigcap_{A\in\mathscr{F}_0} \overline{p_\gamma(A)}$. 设 W_γ 是 X_γ 中点 x_γ 的任一邻域, 则对每一 $A \in \mathscr{F}_0$, $W_\gamma \cap p_\gamma(A) \neq \varnothing$, 也就是 $p_\gamma^{-1}(W_\gamma) \cap A \neq \varnothing$, 由 (3.2.2), $p_\gamma^{-1}(W_\gamma) \in \mathscr{F}_0$. 由 (3.2.1), 对任何有限集 $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} p_\gamma^{-1}(W_\gamma) \in \mathscr{F}_0$, 从而 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} p_\gamma^{-1}(W_\gamma)$ 与每一 $A \in \mathscr{F}_0$ 相交. 由于

$$\left\{ \bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} p_\gamma^{-1}(W_\gamma) : \Gamma_0 \text{ 是 } \Gamma \text{ 的有限子集}, W_\gamma \text{ 是 } x_\gamma \text{ 的邻域} \right\}$$

构成点 $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的邻域基 (积拓扑定义), 所以点 x 的任何邻域基元与每一 $A \in \mathscr{F}_0$ 的交不空, 是即对每一 $A \in \mathscr{F}_0$, $x \in \overline{A}$. 证完.

由于 Tychonoff 积定理的各种证明中都用了选择公理, 人们猜测可能 Tychonoff 积定理等价于选择公理. J. L. Kelley[231] 证明了 Tychonoff 积定理蕴含选择公理, 证实了上述猜测. L. E. Ward[406] 进一步证明了弱 Tychonoff 积定理 (任意个同胚的紧空间的积空间是紧空间) 蕴含选择公理.

数直线 $\mathbb{R}$ 上的闭区间是 T_2 紧空间, 由定理 3.2.1, $I = [0,1]$ 的积空间是 T_2 紧的; 另一方面, T_2 紧空间是正规的 (推论 3.1.4), 从而是 Tychonoff 空间且具有遗传性, 所以第 2 章的 Tychonoff 浸没定理 (定理 2.4.4) 可以改写为如下形式.

定理 3.2.2 拓扑空间 X 是 Tychonoff 空间当且仅当 X 同胚于 T_2 紧空间的某一子空间.

定义 3.2.1 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 称为**有界的**, 如果存在闭区间 $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ 使 $A \subset J^n \subset \mathbb{R}^n$; 实值连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 称为**有界的**, 如果 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集.

定理 3.2.3 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 A 是紧的当且仅当 A 是有界闭子集.

证明 设集 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集, 因 $\mathbb{R}^n$ 是 T_2 空间, 集 A 是闭的 (推论 3.1.5). 由于 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^n$, 这里 $K_i = (-i,i)$ 且对 $i<j$ 有 $K_i^n \subset K_j^n$, 而 A 是紧的. 故存在正整数 i_0 使 $A \subset K_{i_0}^n$. 令 $J = [-i_0, i_0]$, 则 $A \subset J^n$, 所以集 A 是有界的.

相反, 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭子集, 由有界性, $A \subset J^n$, 这里 $J = [a,b]$. 由定理 3.2.1, J^n 是紧集, A 也是紧子空间 J^n 的闭集, 故 A 是紧的 (推论 3.1.1). 证完.

由于紧空间在连续映射下的像是紧空间 (定理 3.1.7), 故得如下推论.

推论 3.2.1 紧空间上的实值连续函数有界且达到最大值和最小值.

3.3 完备映射

映射是近代一般拓扑学中的有效工具. 1.5 节讲过连续映射、开映射、闭映射、同胚映射等. 这里我们介绍一种特殊的连续闭映射 —— 完备映射.

在定义完备映射之前, 先证明下述定理.

定理 3.3.1[238] 设 X 是紧空间, Y 是拓扑空间, 则积空间 $X \times Y$ 到 Y 上的投影 p 是闭映射.

证明 设 F 是积空间 $X \times Y$ 中的闭集, $p(F)$ 是 F 在 Y 上的投影. 设 $y_0 \notin p(F)$, 因 F 闭于 $X \times Y$, 故对点 $x \in X$, 每一点 $(x, y_0) \notin F$, 存在点 x 在 X 中的开邻域 U_x 及点 y_0 在 Y 中的开邻域 V_{xy_0}, 使 $(U_x \times V_{xy_0}) \cap F = \varnothing$. $\{U_x\}_{x\in X}$ 形成 X 的开覆盖, 因 X 紧, 存在有限子覆盖 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}\}$. 置 $V_{y_0} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y_0}$, 则 V_{y_0}

是 y_0 的开邻域, 使 $(X \times V_{y_0}) \cap F = \varnothing$, 所以 $V_{y_0} \cap p(F) = \varnothing$. 从而 $p(F)$ 是空间 Y 的闭集. 证完.

上述定理的逆命题也是成立的 (习题 3.15), 这充要条件称为 **Kuratowski 定理**. 在定理 3.3.1 中可以适当地减弱对 X 的假设条件, 同时对空间 Y 加以限制而得到同样的结论 (习题 3.16).

定义 3.3.1 [405]　拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续闭映射 $f: X \to Y$ 称为**完备映射** (perfect mapping), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是空间 X 的紧集.

注记　按全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》(科学出版社, 1993), “perfect mapping” 的中译名为**逆紧映射**, 本书仍称为完备映射.

上面定理 3.3.1 中的投影映射是完备映射, 因为对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y) = X \times \{y\}$ 是同胚于紧空间 X 的积空间 $X \times Y$ 的紧子空间.

定理 3.3.2　设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射. 如果 X 是 T_2、T_3 或满足第二可数公理, 则空间 Y 也分别是 T_2、T_3 或满足第二可数公理.

证明　设 X 是 T_2 空间, 设 $y_1, y_2 \in Y$ $(y_1 \neq y_2)$, 则 $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$. 因 f 是完备映射, $f^{-1}(y_1)$, $f^{-1}(y_2)$ 都是紧子集, 由定理 3.1.4, 存在 X 的开集 U, V, 使

$$U \supset f^{-1}(y_1), \quad V \supset f^{-1}(y_2) \quad \text{且 } U \cap V = \varnothing.$$

因 f 是闭映射, 由定理 1.5.4, 存在 Y 的开集 U', V', 使

$$y_1 \in U',\ y_2 \in V' \quad \text{且 } f^{-1}(U') \subset U,\ f^{-1}(V') \subset V,$$

则 $U' \cap V' = \varnothing$, 所以 Y 是 T_2 空间.

设 X 是 T_3 空间, F 是 Y 中的闭集, $y \notin F$, 则 $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(F) = \varnothing$, $f^{-1}(y)$ 紧, 闭集 $f^{-1}(F) \subset X - f^{-1}(y)$. 由定理 3.1.5, 存在 X 的开集 U, V, 使 $U \supset f^{-1}(y)$, $V \supset f^{-1}(F)$ 且 $U \cap V = \varnothing$. 和上面的证明一样, 存在 Y 的开集 U', V', 使 $y \in U'$, $F \subset V'$ 且 $f^{-1}(U') \subset U$, $f^{-1}(V') \subset V$ (V' 由 F 中点对应的开集取并得到), 于是 $U' \cap V' = \varnothing$, 因此 Y 是 T_3 空间.

设 X 满足第二可数公理, 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{B}$ 中有限个元素的并集组成的集族, 则 $\mathscr{U}$ 仍是 X 的可数基. 对每一 $U \in \mathscr{U}$, 置

$$U' = \cup\{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \subset U\}, \tag{3.3.1}$$

则 $f(U') = Y - f(X - U)$, 因 f 是闭映射, 所以 $f(U')$ 是 Y 中的开集, 再置

$$\mathscr{V} = \{f(U') : U \in \mathscr{U}\}.$$

下面证明 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的基.

对 $y \in Y$, 开集 $V \ni y$, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. 因 $f^{-1}(y)$ 紧, 存在 $U \in \mathscr{U}$, 使 $f^{-1}(y) \subset U \subset f^{-1}(V)$. 由 (1), $f^{-1}(y) \subset U' \subset U$, 故 $y \in f(U') \subset V$, 而 $f(U') \in \mathscr{V}$. 证完.

回忆第 2 章定理 2.1.1 后引入的空间的分解概念, 下面用分解空间的形式叙述上述定理.

设 $\mathscr{D}$ 是空间 X 的一个分解, f 是 X 到 $\mathscr{D}$ 上的自然映射, 给 $\mathscr{D}$ 以商拓扑, 得到分解空间 $X(\mathscr{D})$, 由分解的上半连续定义 (定义 2.1.1) 及定理 2.1.5, 定理 3.3.2 可叙述为如下形式.

定理 3.3.3 设拓扑空间 X 的分解 $\mathscr{D}$ 是上半连续的, 且 $\mathscr{D}$ 中每一元素是紧集. 如果 X 是 T_2、T_3 或满足第二可数公理, 则分解空间 $X(\mathscr{D})$ 也分别是 T_2、T_3 或满足第二可数公理.

下面叙述关于完备映射的逆像的结果.

定理 3.3.4 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射. 如果 Y 是紧空间或 Lindelöf 空间, 则 X 也分别是紧空间或 Lindelöf 空间.

证明 这里证明 Lindelöf 的情况. 紧空间情况, 证法相同.

设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的任一开覆盖. 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 为 $\mathscr{U}$ 中有限个 U_α 所覆盖, 记这有限个开集 U_α 的并为 U_y, 则 $f^{-1}(y) \subset U_y$. 由定理 1.5.4, 存在 Y 的开集 U'_y, 使 $y \in U'_y$, $f^{-1}(U'_y) \subset U_y$.

$\{U'_y\}_{y\in Y}$ 覆盖 Y, 因 Y 是 Lindelöf 空间, 存在可数子覆盖 $\{U'_{y_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, 从而 $\{f^{-1}(U'_{y_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数开覆盖, 每一 $f^{-1}(U'_{y_i}) \subset U_{y_i}$ $(i \in \mathbb{N}), U_{y_i}$ 是 $\mathscr{U}$ 中某有限个 U_α 的并, 这些 U_α 的全体 (对应着 $i \in \mathbb{N}$) 形成 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖, 所以 X 是 Lindelöf 空间. 证完.

定理 3.3.5 Lindelöf 空间与紧空间的积空间是 Lindelöf 空间.

证明 定理 3.3.1 中的投影映射是完备映射, 由定理 3.3.3 即得. 证完.

3.4 局部紧空间与 k 空间

数直线 $\mathbb{R}$ 不是紧空间, $\mathbb{R}$ 中的任何闭区间是紧子空间, 这一性质在分析学中起很大作用. $\mathbb{R}$ 的开基可以取作 $\{(a,b) : a,b \text{ 是任意实数}\}$. 由于每一开区间总包含着某一闭区间, 所以 $\mathbb{R}$ 的邻域基也可取作 $\{[a,b] : a < b\}$ (具有闭邻域基是正则性的特征), 这邻域基的元素都是闭紧集, 从而 $\mathbb{R}$ 中的每一点都具有紧的邻域, 也都具有闭的紧邻域基.

定义 3.4.1 拓扑空间 X 称为**局部紧的** (locally compact), 如果每一点 $x \in X$ 具有一个紧的邻域.

紧空间当然是局部紧空间, 局部紧性是紧性的一个推广. 这种推广的方法称为**局部化** (localization).

数直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧空间, 每一离散空间都是局部紧空间.

由于闭集与紧集的交集是闭于这紧集的, 所以这交集是紧集 (推论 3.1.1), 从而得下述定理.

定理 3.4.1　局部紧空间的闭子空间是局部紧空间.

由本节开始时对数直线的分析, 导向证明下述定理.

定理 3.4.2　T_3 的局部紧空间 X 的每一点具有闭的紧邻域基.

证明　设 U 是 $x \in X$ 的任一邻域, 由局部紧性, 设 x 具有紧邻域 C. 由 T_3 分离公理, 存在 x 的闭邻域 V, 使 $x \in V \subset U \cap C$, 闭集 $V \subset C$, C 是紧集, 所以 V 是紧的 (推论 3.1.1). 证完.

下面是关于局部紧空间的深刻的结果.

定理 3.4.3　T_2 局部紧空间 X 是 Tychonoff 空间.

证明　设 U 是点 $x_0 \in X$ 的任一开邻域. 为此, 只要证明存在连续映射 $f: X \to [0,1]$, 使 $f(x_0) = 0$; $f(x) = 1, x \in X - U$.

由局部紧性, 设 C 是 x_0 的紧邻域, 置 $V = U \cap C^{\circ}$. 因 X 是 T_2 空间, 紧集 C 是闭的 (推论 3.1.5), $\overline{V} \subset C$, 从而 $\overline{V}$ 是紧集 (推论 3.1.1). T_2 紧空间 $\overline{V}$ 是正规的 (推论 3.1.4), 从而是 Tychonoff 的, 所以存在连续映射 $g: \overline{V} \to [0,1]$, 使 $g(x_0) = 0$; $g(x) = 1, x \in \overline{V} - V$. 在 X 上定义映射 $f: X \to [0,1]$, 使

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overline{V}, \\ 1, & x \in X - \overline{V}. \end{cases}$$

下面验证 f 在 X 上连续. 设 F 是 $[0,1]$ 中的任一闭集. 如果 $1 \notin F$, 则 $f^{-1}(F) = g^{-1}(F)$, 由 g 的连续性, 知 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集. 如果 $1 \in F$, 则 $f^{-1}(F) = g^{-1}(F) \cup (X - V)$ 也是 X 中的闭集. 所以 f 是连续映射. 由于 $V \subset U$, $f(X - V) = \{1\} \Rightarrow f(X - U) = \{1\}$, f 就是所要求的. 证完.

结合定理 3.4.2, 可得如下推论.

推论 3.4.1　T_2 局部紧空间的每一点具有闭的紧邻域基, 从而 T_2 局部紧空间的开子空间是 T_2 局部紧的.

下面叙述局部紧空间上的连续映射.

紧空间在连续映射下的像是紧空间 (定理 3.1.7). 局部紧空间在连续映射下的像未必是局部紧空间 (离散空间是局部紧空间, 离散空间到任何拓扑空间上的映射都是连续的). 但连续开映射能保持局部紧性.

定理 3.4.4　局部紧空间在连续开映射下的像是局部紧空间.

证明　设 f 是局部紧空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续开映射. 对任一点 $y \in Y$,

任取点 $x \in f^{-1}(y)$, 由 X 的局部紧性, 存在 x 的紧邻域 C, 由于 f 是开映射及定理 3.1.7, 知 $f(C)$ 是 y 的紧邻域. 证完.

下面是关于完备映射方面的结果, 为此先证明关于闭映射的下述引理.

引理 3.4.1 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的闭映射, A 是 X 的子集满足 $A = f^{-1}(B), B \subset Y$. 则 f 在 A 上的限制 $f|_A : A \to B$ 是闭映射.

证明 设集 E 是子空间 A 的闭集, 存在空间 X 的闭集 F, 使 $E = A \cap F$. 易验证 [习题 0.2 的 (i)]

$$f(A \cap F) = f(A) \cap f(F). \tag{3.4.1}$$

因 f 是 X 到 Y 上的闭映射, F 闭于 X, 所以 $f(F)$ 闭于 Y. 由 (3.4.1) 式, $f(E) = f(A \cap F)$ 闭于 $f(A)$. 到此证明了 $f|_A$ 是 A 到 $f(A) = B$ 上的闭映射. 证完.

定理 3.4.5 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的完备映射, 则 X 是局部紧空间当且仅当 Y 是局部紧空间.

证明 设 X 是局部紧空间. 对任一 $y \in Y, f^{-1}(y)$ 是空间 X 中的紧集, 因 X 是局部紧的, 对每一 $x \in f^{-1}(y)$, 存在 x 的紧邻域 C_x. $\{C_x^\circ\}_{x \in X}$ 形成紧集 $f^{-1}(y)$ 的开覆盖, 存在有限子覆盖 $\{C_{x_1}^\circ, C_{x_2}^\circ, \cdots, C_{x_n}^\circ\}$, 从而 $C_y = \bigcup_{i=1}^n C_{x_i}$ 是紧集且满足 $f^{-1}(y) \subset U \subset C_y$, 这里 $U = \bigcup_{i=1}^n C_{x_i}^\circ$. 因 f 是闭映射, 由推论 1.5.1, 存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(y) \subset V \subset U$, 且 $f(V)$ 是 Y 中开集, 从而得 $y \in f(V) \subset f(C_y)$. 由 f 的连续性, 知 $f(C_y)$ 是 Y 中紧集 (定理 3.1.7), 所以 $f(C_y)$ 是点 y 的紧邻域. 故 Y 是局部紧空间.

相反, 设 Y 是局部紧空间, 对每一 $x \in X$, $f(x) = y$ 具有紧邻域 U_y. 由引理 3.4.1, 闭映射 f 在 $f^{-1}(U_y)$ 上的限制 $f|_{f^{-1}(U_y)}$ 是 $f^{-1}(U_y)$ 到 U_y 上的闭映射, 从而也是完备映射. 由定理 3.3.3 知 $f^{-1}(U_y)$ 是空间 X 中的紧集, 显然也是点 x 的邻域. 到此证明了 X 是局部紧空间. 证完.

有一类拓扑空间, 它的拓扑可以由它的紧子集族确定的. 为了导出这类空间, 先证明局部紧空间的下述性质.

引理 3.4.2 设 X 是局部紧空间, 则 X 的子集 A 是闭集当且仅当对 X 的每一紧子集 C, $A \cap C$ 闭于紧子空间 C.

证明 设 A 是闭集, 显然对任何紧子集 C, $A \cap C$ 闭于 C. 相反, 用反证法. 设集 A 不闭, 存在集 A 的聚点 $x \notin A$. 因 X 局部紧, 存在点 x 的紧邻域 C, 使 $A \cap C \neq \varnothing$. $A \cap C$ 关于 C 的闭包含点 x, 但 $x \notin A \cap C$, 所以 $A \cap C$ 不闭于紧子空间 C. 证完.

定义 3.4.2[128] 拓扑空间 X 称为 ***k* 空间** (k-space), 如果 X 的子集 A 是闭集当且仅当对 X 的每一紧集 C, $A \cap C$ 闭于紧子空间 C.

由引理 3.4.2, 有下述定理.

定理 3.4.6 局部紧空间是 k 空间.

定理 3.4.7 满足第一可数公理的空间是 k 空间.

证明 用反证法. 设集 A 不闭, 存在集 A 的聚点 $x \notin A$, 因 X 满足第一可数公理, 存在 A 中的序列 $\{x_i\}$, 它收敛于 x (定理 2.3.1). 置 $C = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, 则 C 是紧集, $A \cap C = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 不闭于紧子空间 C. 证完.

定理 3.4.8 设 f 是 k 空间 X 到拓扑空间 Y 上的商映射, 则 Y 是 k 空间, 即 k 空间的商空间是 k 空间.

证明 设 $A \subset Y$, 对 Y 的任一紧集 K, $A \cap K$ 闭于 K, 要证明 A 是 Y 中的闭集. 由于 f 是商映射, 只要证明 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的闭集.

设 C 是空间 X 的任一紧集, 由 f 的连续性, $f(C)$ 是 Y 中的紧集 (定理 3.1.7). 由假设, $A \cap f(C)$ 闭于 $f(C)$. 置 $g = f|_C : C \to f(C)$ (f 在 $C \subset X$ 上的限制). 由 g 的连续性, $g^{-1}(A \cap f(C))$ 闭于 C, 按 $g^{-1}(A \cap f(C)) = f^{-1}(A) \cap C$, 所以 $f^{-1}(A) \cap C$ 闭于 C. 由于 C 是空间 X 的任一紧集, 而 X 是 k 空间, 所以 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的闭集. 证完.

定理 3.4.9 [94] 拓扑空间 X 是 k 空间当且仅当 X 是局部紧空间的商空间.

证明 因局部紧空间是 k 空间 (定理 3.4.6), 由定理 3.4.8, 局部紧空间的商空间是 k 空间.

相反, 设 X 是 k 空间, 要证明 X 是某一局部紧空间在商映射下的像. 现在从 X 出发构造一个局部紧空间 S, 使 S 到 X 上的映射为商映射.

设 X 中所有紧集所成的集族为 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. 把集族中的元素 (紧集) 看作是两两不交的 (如视 K_α 为 $K_\alpha \times \{\alpha\}$), 取这些紧子空间的拓扑和, 记作 $S = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$. 按拓扑和的定义 (定义 3.1.3), 对 S 上的拓扑规定为 $A \subset S$ 是 S 中的闭集 (开集) 当且仅当对每一 $\alpha \in \Lambda$, $A \cap K_\alpha$ 闭 (开) 于 K_α. 从而 S 是一局部紧空间, 规定 S 到 X 上的映射 f 为对每一 $\alpha \in \Lambda$, $f|_{K_\alpha}$ 是 K_α 到 X 内紧集 K_α 上的同胚映射, 这映射 f 称为**显然映射** (obvious mapping[171]). 下面证明 f 是 S 到 X 上的商映射.

为此, 应证明 F 是 X 中的闭集, 当且仅当 $f^{-1}(F)$ 是 S 中的闭集.

(i) 设 F 是 X 中的闭集, $f^{-1}(F) \cap K_\alpha = F \cap K_\alpha$ 闭于 K_α, 对每一 K_α 成立, 故 $f^{-1}(F)$ 闭于 S;

(ii) 设 $f^{-1}(F)$ 闭于 S, $f^{-1}(F) \cap K_\alpha$ 闭于 K_α, 对 (S 中的) 所有 K_α 成立, 而 $f^{-1}(F) \cap K_\alpha = F \cap K_\alpha$ 闭于 K_α 对 (X 中的) 所有 K_α 成立, 因 X 是 k 空间, 所以 F 是 X 中闭集. 证完.

关于 k 空间的论述参见 A. Arhangel'skiĭ[18, 20].

3.5 紧性的推广

本节所述都是紧性的推广 (除序列式紧性外). 事实上, 前面的 Lindelöf 性质、

局部紧性都是紧性的推广, 这里侧重联系分析中的有关紧性的常用概念, 故也把序列式紧性列入.

定义 3.5.1 拓扑空间 X 称为**可数紧空间** (countably compact space), 如果 X 的每一可数开覆盖具有有限子覆盖.

比较紧空间的定义 (定义 3.1.1), 显然紧空间是可数紧空间. 但其逆不真, 空间 $[0,\omega_1)$ 是可数紧空间 (习题 3.10), 但不是紧空间.

作为定理 3.1.1 的特例, 有下述定理 (习题 3.18).

定理 3.5.1 拓扑空间 X 是可数紧空间当且仅当每一具有有限交性质的可数闭集族的交不空.

注记 与推论 3.1.3 类似, 有下列结果. 设 $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 中可数闭集族, 其中至少有一个闭集是可数紧的, U 是开集. 如果 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma$, 则存在有限子族 $\Gamma'\subset\Gamma$, 使 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma$.

可数紧空间也有与紧空间的聚点形式 (定理 3.1.9) 相似的刻画.

定义 3.5.2 点 x 称为集 A 的 **ω 聚点** (ω-accumulation point), 如果点 x 的任何邻域包含集 A 的无限个点.

显然, 集 A 的 ω 聚点是聚点. 由定理 2.2.3, 在 T_1 空间中集 A 的聚点也是 ω 聚点.

定理 3.5.2 拓扑空间 X 是可数紧的当且仅当满足下列条件之一:

(i) X 中的每一序列有聚点;

(ii) X 中的每一无限集有 ω 聚点.

证明 可数紧性 $\Rightarrow$ (i). 设 $\{x_n\}$ 是可数紧空间 X 的序列, 置

$$F_n=\{x_{n+i}:i=0,1,2,3,\cdots\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $\mathscr{F}=\{\overline{F}_n\}$ 是具有有限交性质的可数闭集族. 由定理 3.5.1, 这闭集族的交不空, 也就是存在点 x 属于每一个 $\overline{F}_n$, 从而 x 是序列 $\{x_n\}$ 的聚点 (见定义 1.4.7).

(i) $\Rightarrow$ (ii). 若 A 是 X 的无限子集, 选取 A 中互不相同点组成的序列 $\{x_n\}$, 则序列 $\{x_n\}$ 的聚点也是集 A 的 ω 聚点.

(ii) $\Rightarrow$ 可数紧性. 设 $\{F_n\}$ 是 X 的具有有限交性质的可数闭集族, 置

$$\mathscr{F}=\left\{\bigcap_{i=1}^{n}F_i:n=1,2,\cdots\right\}.$$

任取 $x_n\in\bigcap_{i=1}^{n}F_i$ $(n=1,2,\cdots)$. 对序列 $\{x_n\}$, 若这序列中不同的点所成集是有限集, 则必有某一点 x 在序列中出现无限回, 于是 x 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点; 若这序列中不同的点所成的集是无限集, 由假设, 则这无限集的 ω 聚点 x 就是这序列的聚点. 从而序列 $\{x_n\}$ 有聚点 x. 显然 $x\in F_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 由定理 3.5.1, 知 X 是可数紧空间. 证完.

由定理 2.2.3, 立得下述推论.

推论 3.5.1　设 X 是 T_1 空间, 则 X 是可数紧的当且仅当每一无限集具有聚点.

定义 3.5.3　拓扑空间 X 称为**序列式紧的** (sequentially compact), 如果 X 中每一序列具有收敛子序列.

序列式紧性不能推导出紧性, 如 $[0,\omega_1)$ 是序列式紧的 (习题 3.10), 但不是紧的. 序列式紧性也不能由紧性推导出, 见例 3.5.1 或例 3.6.2 中的空间 $\beta\mathbb{N}$.

例 3.5.1 (不是序列式紧的紧空间 [372])　设 $I=[0,1]$ 是单位闭区间. 对每一 $\alpha\in I$, 记 $D_\alpha=\{0,1\}$, 赋予离散拓扑, 则 D_α 是紧空间. 作积空间 $X=\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$. 由 Tychonoff 积定理 (定理 3.2.1), X 是紧空间. 下面证明 X 不是序列式紧空间. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 取定 $x_n\in X$ 满足 $p_\alpha(x_n)=\alpha$ 的二进制展开式中的第 n 位数字, 这里 $\alpha\in I$, $p_\alpha:X\to D_\alpha$ 是投影映射. 若 X 是序列式紧的, 则 X 中的序列 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列, 设序列 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子序列, 并收敛于 $x\in X$. 对每一 $\alpha\in I$, 由定理 2.1.4, 在 D_α 中序列 $\{p_\alpha(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $p_\alpha(x)$. 取定 $\beta\in I$ 使当 k 是奇数时, $p_\beta(x_{n_k})=0$; 当 k 是偶数时, $p_\beta(x_{n_k})=1$. 那么序列 $\{p_\beta(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $0,1,0,1,\cdots$, 不收敛, 矛盾. 从而 X 不是序列式紧空间.

由于具有收敛子序列的序列必有聚点, 故由定理 3.5.2 得下述定理.

定理 3.5.3　序列式紧空间是可数紧空间.

由于当空间 X 满足第一可数公理时, X 中具有聚点的序列必具有收敛的子序列 [定理 2.3.1 的 (iii)], 故有下述定理.

定理 3.5.4　满足第一可数公理的可数紧空间是序列式紧空间.

定义 3.5.4　拓扑空间 X 称为**伪紧的** (pseudo-compact), 如果 X 上的每一实值连续函数有界.

定理 3.5.5　可数紧空间是伪紧空间.

证明　设 f 是可数紧空间 X 上的任一实值连续函数, 置 $U_n=\{x:|f(x)|<n\}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{U_n:n=1,2,\cdots\}$ 是空间 X 的可数开覆盖. 由 X 的可数紧性, 存在有限子覆盖 $\{U_{n_1},\cdots,U_{n_k}\}$. 从而 $|f(x)|<\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$, 对所有 $x\in X$ 成立. 所以 X 是伪紧空间. 证完.

定理 3.5.5 的逆不真, 见例 3.5.2.

例 3.5.2 (特殊点拓扑[372]、右序拓扑[372], 不是可数紧的伪紧空间)　设 X 是可数无限集, $x_0\in X$. 规定 X 上的拓扑为 $\varnothing$ 及包含点 x_0 的 X 的任何子集, 此拓扑称为**特殊点拓扑** (particular point topology). 此空间 X 中具有聚点的序列只能是某一点 $x\in X$ 在序列中出现无限次的情况, 其他的序列 (例如, 由可数集 X 形成的序列) 都没有聚点. 由定理 3.5.2 知空间 X 不是可数紧的. 但 X 是伪紧的, 因为此空间 X 不存在不相交的不空开集. 这导致 X 上的任一实值连续函数是常值函

数.

Sierpiński 空间 (推论 1.5.1 后) 是最简单的特殊点拓扑空间. 特殊点拓扑空间是 T_0 空间, 但不是 T_4 空间. 而下面的右序拓扑空间是 T_4 的.

以数直线 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\{(a,+\infty): a\in\mathbb{R}\}$ 作为开基生成 $\mathbb{R}$ 上的拓扑称为实数集的**右序拓扑** (right order topology), $\mathbb{R}$ 赋予右序拓扑称为右序拓扑空间, 记为 $\mathbb{R}_r$. 显然, $\mathbb{R}_r$ 是 T_0 空间. 由于 $\mathbb{R}_r$ 中不相交的闭集对必有一为空集, 所以 $\mathbb{R}_r$ 是 T_4 空间. 因 $\mathbb{R}_r$ 中每一对不空的开集都相交; 所以 $\mathbb{R}_r$ 是伪紧空间. 由于 $\mathbb{R}_r$ 的可数开覆盖 $\{(-n,+\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 没有有限子覆盖, 于是 $\mathbb{R}_r$ 不是可数紧空间.

定理 3.5.6[193] 正规的伪紧空间是可数紧空间.

为了证明上述定理, 先把 Tietze 扩张定理 (定理 2.4.2) 推广到无界的连续函数情况.

引理 3.5.1 (Tietze 扩张定理) 设 X 是 T_4 空间, F 是闭子集, f 是 F 到 $\mathbb{R}$ 的无界连续函数, 则存在 f 到 X 上的扩张.

证明 $\arctan f$ 应是 F 上的有界连续函数, 满足

$$|\arctan f| < \pi/2.$$

由有界形式的 Tietze 扩张定理, 存在 $\arctan f$ 到 X 上的 (连续) 扩张 Φ, 使 $|\Phi|\leqslant \pi/2$. 置

$$G=\{x: |\Phi(x)|=\pi/2\},$$

则 G 是空间 X 的闭集且与 F 不相交, 由 Urysohn 引理可定义 X 到 $[0,1]$ 的连续函数 g, 使 $g(F)\subset\{1\}$, $g(G)\subset\{0\}$. 置 $\Phi'=g\cdot\Phi$, 则得 X 上的连续函数 Φ', 使

$$|\Phi'|<\pi/2 \text{ 且 } \Phi'(x)=\arctan f(x), \quad x\in F.$$

所以 $\varphi=\tan\Phi'$ 是 f 到 X 上的 (连续) 扩张. 证完.

定理 3.5.6 的证明 设正规空间 X 不是可数紧的, 则由定理 3.5.2, 存在序列 $\{x_n\}$ 没有聚点, 则这序列中点形成的集是可数集. 为便利起见仍记作 $\{x_n: n=1,2,\cdots\}$. 这集闭于空间 X, 且是空间 X 的离散子空间. 定义实值连续函数 f 使 $f(x_n)=n(n=1,2,\cdots)$. 由引理 3.5.1, 存在 f 到 X 上的扩张 φ, 显然 φ 不是有界实值连续函数. 所以 X 不是伪紧空间. 证完.

例 3.5.2 中的右序拓扑空间 $\mathbb{R}_r$ 表明, 定理 3.5.6 中的正规性不可减弱为满足 T_4 分离公理.

注记 可数紧性是紧性的可数情况的推广, 它联系着分析学中许多重要概念, 具有紧性的一些性质. 例如, 可数紧空间的闭子空间是可数紧的, 可数紧空间在连续映射下的像是可数紧的 (容易类似于紧性情况做出证明), 但是它的性质毕竟没有紧性那么良好. 下面从两个方面说明.

(i) T_2 紧空间是正规空间, 但 T_2 可数紧空间未必是正规的, 因为空间 $[0,\omega_1)$ 是 T_2 可数紧的 (习题 3.10), 空间 $[0,\omega_1]$ 是 T_2 紧的, 它们的积空间 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 是 T_2 可数紧的 (习题 3.23), 但不是正规的 (习题 3.11).

(ii) 任意个紧空间的积空间是紧空间 (定理 3.2.1), 但存在着两个可数紧空间的积空间不是可数紧的. E. Čech 首先提出问题: "两个可数紧空间的积是否可数紧?" J. Novák[321] 构造了两个可数紧的 Tychonoff 空间, 它们的积不是可数紧的, 此例可见文献 [114] 中例 3.10.19. 事实上, 这积空间不仅不是可数紧的, 也不是伪紧的 (见文献 [114] p. 208). 这说明两个伪紧空间的积未必是伪紧的.

下面介绍紧性的一种最重要的推广. 这是 J. Dieudonné 于 1944 年引进的. 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为**局部有限的** (locally finite[2]), 如果对每一 $x\in X$, 存在 x 的邻域 $U(x)$ 使 $U(x)\cap U_\alpha\neq\varnothing$, 仅对有限个 $\alpha\in A$ 成立. 集族 $\mathscr{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ 称为集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的**加细** (refinement), 如果 $\mathscr{V}$ 中的每一元素 V_β 总包含于 $\mathscr{U}$ 中的某一元素 U_α 内; 若更设 $\mathscr{V}$ 是覆盖, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的**加细覆盖** (refinement of a covering).

定义 3.5.5[106] 拓扑空间 X 称为**仿紧的** (paracompact), 如果 X 的每一开覆盖具有局部有限的开加细覆盖.

显然, 紧空间是仿紧空间, 因为有限子覆盖是局部有限加细覆盖. 具有无限个元素的离散空间不是紧空间, 而是仿紧空间, 因为对离散空间的任何开覆盖, 这空间的所有单点集形成的覆盖总是所要求的局部有限开加细覆盖.

定理 3.5.7 仿紧空间的闭子空间是仿紧的.

证明 设 F 是仿紧空间 X 的闭子集, 设 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是关于子空间 F 的任一开覆盖. 对每一开于子空间 F 的集 V_α, 存在空间 X 的开集 U_α, 使 $V_\alpha=U_\alpha\cap F$. 置 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 则 $\mathscr{U}\cup\{X-F\}$ 是空间 X 的开覆盖, 由仿紧性, 存在局部有限开加细覆盖 $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$, 则 $\{W_\beta\cap F\}_{\beta\in B}$ 是关于子空间 F 的局部有限开覆盖且加细 $\mathscr{V}$, 所以 F 是仿紧空间. 证完.

下面将证明 T_2 仿紧空间是正规的. 为此先证明下述引理.

引理 3.5.2 设 $\mathscr{U}$ 是局部有限覆盖 (集族), $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$, 则 $\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}=\overline{\cup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$.

证明 关系式 $\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}\subset\overline{\cup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$ 是显然的, 下证相反的关系式. 设 $x\notin\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}$, 由 $\mathscr{U}$ 的局部有限性, 知存在 x 的邻域 $V(x)$ 仅与 $\mathscr{U}'$ 中有限个 U 相交, 设为 $U_1,U_2,\cdots,U_n$,

$$x\notin\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}\Rightarrow x\notin\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i,$$

则 $X-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i$ 是 x 的邻域与 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 不相交, 所以 x 的邻域 $W(x)=$

$V(x)\cap(X-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i)$ 与 $\cup\{U:U\in\mathscr{U}'\}$ 不相交, 即 $x\notin\overline{\cup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$. 到此证明了 $\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}\supset\overline{\cup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$. 证完.

推论 3.5.2 设 $\mathscr{U}$ 是局部有限覆盖 (集族), $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$ 是任一子族, 则 $\cup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}$ 是闭集.

引理 3.5.3 设 X 是仿紧空间, A, B 是不相交的闭集, 如果对每一 $x\in B$, 存在开集 U_x, V_x, 使 $A\subset U_x$, $x\in V_x$ 且 $U_x\cap V_x=\varnothing$, 则存在开集 U, V, 使 $A\subset U$, $B\subset V$ 且 $U\cap V=\varnothing$.

证明 $\{X-B\}\cup\{V_x\}_{x\in B}$ 形成空间 X 的开覆盖, 由仿紧性, 存在局部有限开加细覆盖 $\{W_s\}_{s\in S}$. 置

$$S_1=\{s:s\in S,\ W_s\subset V_x\ \text{对某些}\ x\in B\ \text{成立}\}.$$

由于 $V_x\subset X-U_x$, $\overline{V}_x\subset X-U_x\subset X-A$, 所以 $A\cap\overline{V}_x=\varnothing$, 则 $A\cap\overline{W}_s=\varnothing$ $(s\in S_1)$ 和 $B\subset\bigcup_{s\in S_1}W_s$. 由局部有限性及引理 3.5.2, 有

$$\bigcup_{s\in S_1}\overline{W}_s=\overline{\bigcup_{s\in S_1}W_s}.$$

从而集 $U=X-\bigcup_{s\in S_1}\overline{W}_s$ 是开的. 容易验证集 U 及集 $V=\bigcup_{s\in S_1}W_s$ 满足引理 3.5.3 的要求. 证完.

定理 3.5.8[106] T_2 仿紧空间是正规空间.

证明 先设引理 3.5.3 中的 A 是单点集, 由 T_2 分离性, 引理 3.5.3 的假设成立, 由此引理知 T_2 仿紧空间是正则的. 再用一次引理, 得正则仿紧空间是正规的. 证完.

定理 3.5.7, 3.5.8 所表述的是仿紧空间所具有的紧空间的相应的性质 (见推论 3.1.1 及推论 3.1.4).

关于可数紧性与紧性的关系, 显然有如下定理.

定理 3.5.9 Lindelöf 空间是紧空间当且仅当它是可数紧空间.

此外, 可以证明如下定理.

定理 3.5.10 仿紧空间是紧空间当且仅当它是可数紧空间.

证明 必要性是显然的. 下证充分性, 设 X 是仿紧空间但不是紧的, 则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 没有有限子覆盖, 因 X 是仿紧的, 存在局部有限开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$, 显然 $\mathscr{V}$ 也没有有限子覆盖, 因此可在 $\mathscr{V}$ 中选取 $V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots$, 使

$$V_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}V_i\neq\varnothing\quad(n=2,3,\cdots).$$

取点 $x_1\in V_1$, 并对每一 n $(n=2,3,\cdots)$, 取点 $x_n\in V_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}V_i$, 则序列 $\{x_n\}$ 无聚点 (如不然, 设 x 是聚点, 点 x 的任何邻域应包含此集中无限个点, 从而与无限个 V_n 相交, 这与 $\mathscr{V}$ 的局部有限性矛盾). 由定理 3.5.2 知 X 不是可数紧的. 证完.

关于在怎样的拓扑空间中, 可数紧性与紧性等价, 许多学者进行过研究 (见文献 [60]、文献 [417] 和文献 [265] 等), 他们都改进了定理 3.5.10 的结果. 本书 6.5 节等将对此给予专门的探讨.

3.6 紧 化

在分析学中, 紧空间上的实值连续函数具有重要性质. 例如, 闭区间上的连续函数取到最大、最小值. 数直线不是紧空间, 要使它成为紧空间的子空间, 通常可用下列两种方法:

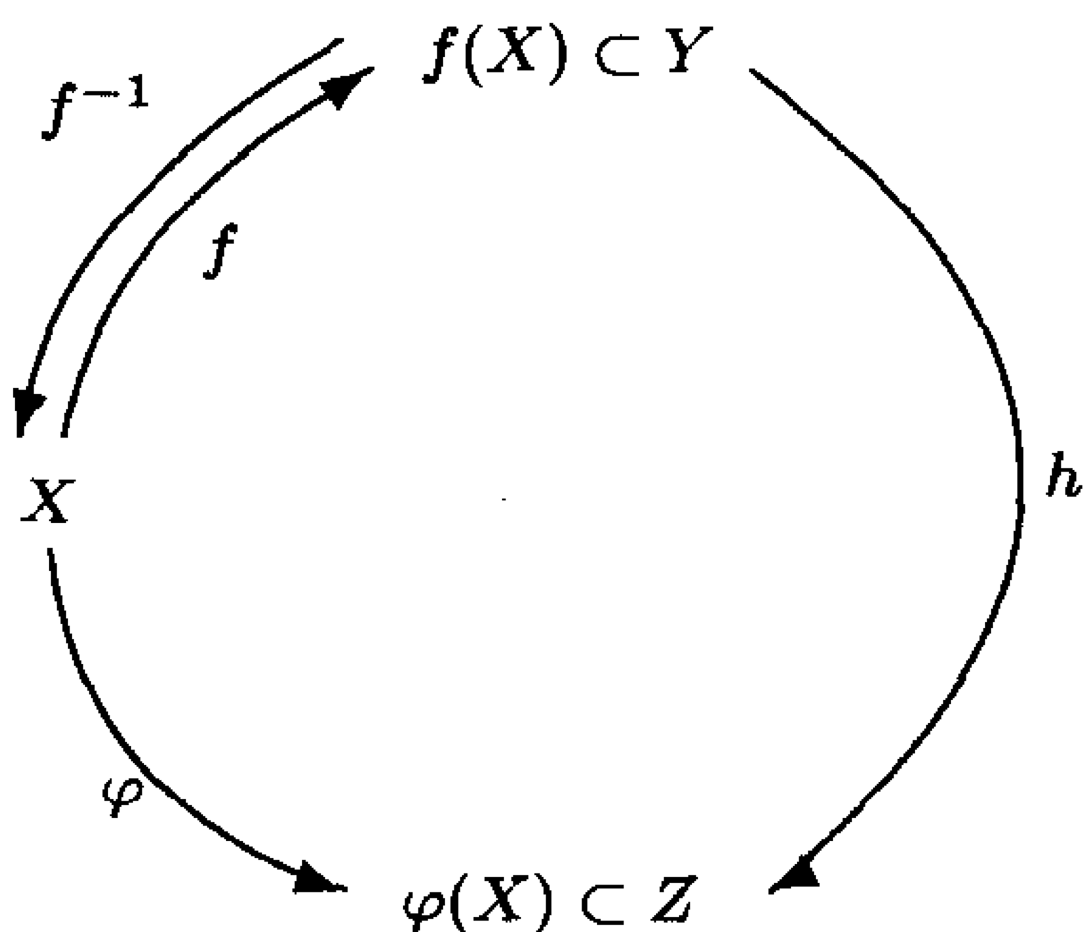
(i) 补上两个特殊的点 "$-\infty$" 及 "$+\infty$", 前者作为小于一切实数, 后者作为大于一切实数. 事实上, 可把数直线同胚地映射为开区间 $(-1,1)$ (利用同胚映射 $f: x \mapsto x/(1+|x|)$), 然后补上两点 $-1, 1$, 得到 $[-1,1]$. 从而特殊点 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的邻域可以用 -1 或 1 的邻域按 f 的逆像去规定.

(ii) 在复变函数论中, 通常的复平面不是紧空间, 可以补上一个无穷远点 "∞" 使之成为紧空间. 事实上, 可以通过熟知的球极映射把复平面同胚地映射为移去了北极的球面. 从而无穷远点 "∞" 的邻域可以用球面上北极的邻域去规定, 在这映射下, 数直线映射为球面上通过北极的大圆移去北极后的图形, 补上相应的一个无穷远点 "∞" 后使数直线成为紧空间.

定义 3.6.1 拓扑空间的**紧化** (compactification) 是一对 (f, Y), 这里 Y 是紧空间, f 是 X 到 Y 的稠密子集上的同胚映射 ($\overline{f(X)} = Y$), 当 Y 是 T_2 紧空间时, (f, Y) 称为 $\mathbf{T_2}$ **紧化**.

为叙述简单起见, 有时把 X 与它的同胚像 $f(X)$ 等同起来, 称 Y 是 X 的紧化.

如果拓扑空间 X 浸没在紧空间 Y 内, 也就是存在同胚映射 $f: X \to f(X) \subset Y$, 则 $(f, \overline{f(X)})$ 显然是 X 的紧化. 因 T_2 紧空间是完全正则空间, 由 Tychonoff 浸没定理 (定理 2.4.4) 立得定理 3.2.2 的等价叙述 (**Tychonoff 紧扩张定理**): 拓扑空间 X 是 Tychonoff 空间当且仅当 X 存在 T_2 紧化.



定义 3.6.2 设 (f, Y), (φ, Z) 是拓扑空间 X 的紧化, 称 $(f, Y) \geqslant (\varphi, Z)$, 如果存在拓扑空间 Y 到拓扑空间 Z 上的连续映射 h, 使 $h \circ f = \varphi$, 上述条件等价于映射 $\varphi \circ f^{-1} : f(X) \to Z$ 存在连续扩张 $h : Y \to Z$.

本节主要叙述两种紧化, 相应于最小与最大 (在 T_2 紧化) 的情况.

定义 3.6.3[2] 拓扑空间 X 的**单点紧化** (one point compactification) 是集 $X^* = X \cup \{\infty\}$, 具有如下拓扑:

(i) X 中的开子集;

(ii) X^* 的子集 U 之使 $X^* - U$ 是 X 中的闭紧集者.

当然应验证满足上述条件的子集族构成拓扑. 这一验证见下述定理.

定理 3.6.1 (Alexandroff 单点紧化定理 [2]) 单点紧化具有下列性质:

(i) X 的单点紧化 X^* 是紧空间, 以 X 为开子空间;

(ii) X^* 是 T_2 空间当且仅当 X 是 T_2 局部紧空间;

(iii) X 的任何两个单点紧化是同胚的 (惟一性).

证明 考察定义 3.6.3 的 (i), (ii) 中开集的有限交、任意并. 当 ∞ 不属于此交、并时, 此交、并 (可以看作) 是由 (i) 中开集形成的, 从而仍是 (i) 中开集. 当 ∞ 属于此有限交时, 此交的补集应是 X 中闭紧集的有限并, 从而仍是 X 中的闭紧集, 故此交是 (ii) 中的开集. 当 ∞ 属于此任意并时, 此并可以看作是一个 (ii) 中的开集与一个 (i) 中开集的并 ((i) 中开集的任意并是 (i) 中开集), 此并的补集是 X 中的闭紧集与 X 中的闭集的交, 从而是 X 中的闭紧集, 故此并是 (ii) 中开集. 所以 X^* 是拓扑空间, 以 X 为开子空间. 设 $\mathscr{U}$ 是 X^* 的任一开覆盖, 则 ∞ 属于某一开集 $U \in \mathscr{U}$, 而 $X^* - U$ 是紧的, 故具有有限子覆盖, 所以 X^* 是紧空间.

(ii) 设 X^* 是 T_2 空间, X 作为 T_2 紧空间的开子集应是 T_2 局部紧的 (推论 3.4.1). 设 X 是 T_2 局部紧空间, 为了证明 X^* 是 T_2 空间, 只要证对任何点 $x \in X$, 存在 x 与 ∞ 的不相交的邻域, 由推论 3.4.1, x 具有一个闭紧邻域 U, 而 $X^* - U$ 正好是 ∞ 的所要求的邻域.

(iii) 设 X^*, Y^* 是 X 的两个单点紧化, 置 $Y^* - X = \infty_Y$. 取一一对应映射 $f : X^* \to Y^*$, 使 $f(\infty) = \infty_Y$; $f(x) = x$, $x \in X$. 下证 f 是同胚的. 由于 f, f^{-1} 是对称的, 只要证明 f 是开映射, 从而只要证明 ∞ 的开邻域的像开于 Y^*. 设 $X^* - C$ 是 ∞ 的任一开邻域, 这里 C 是 X 中的闭紧集, 从而 $f(C)$ 也是闭紧集, 由于 f 是一一对应的, $f(X^* - C) = Y^* - f(C)$ 是 Y^* 中开集. 证完.

拓扑空间 X 的单点紧化 X^* 可以写成 (i, X^*), 这里 i 是空间 X 到自身的恒等映射. 下面证明定理 3.6.2, 说明在 T_2 紧化情况, 单点紧化是最小紧化.

引理 3.6.1 设 X 是 T_2 空间, 设 A 是 X 的局部紧的稠密子集, 则 A 是开集.

证明 因为 A 是局部紧子集, 对每一 $x \in A$, 存在点 x 关于子空间 A 的紧邻域 V, 因 X 是 T_2 空间, V 是闭集, 令 W 是 V 关于子空间 A 的内核, 存在空间 X

的开集 U 使 $W = U \cap A$. 因 $\overline{A} = X$, 所以

$$U = U \cap X = U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A} = \overline{W} \subset V$$

(因 $W \subset V$, 而 V 是闭集). 上式说明 V 是点 x 关于空间 X 的邻域, 从而证明了 A 是开集. 证完.

定理 3.6.2 设 (f, Y) 是拓扑空间 X 的任一 T_2 紧化, X 的单点紧化 X^* 是 T_2 空间, 则 $(f, Y) \geqslant (i, X^*)$.

证明 由定义 3.6.2, 只要证明映射 $f^{-1}: f(X)(\subset \dot{Y}) \to X^*$ 可以连续扩张到 Y 上. 置 $h: Y \to X^*$, 使

$$h(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ \infty, & y \in Y - f(X). \end{cases}$$

现证 h 是 Y 到 X^* 的连续映射. X^* 中的开集 U 包含在 X 中时, U 是 X 中开集, $h^{-1}(U) = f(U)$ 是 $f(X)$ 中的开集. 因 X^* 是 T_2 空间, 由定理 3.6.1, X 是局部紧的, 从而 $f(X)$ 也是局部紧的. 因 Y 是 T_2 空间且 $\overline{f(X)} = Y$, 由引理 3.6.1, $f(X)$ 是 Y 中开集, 从而 $h^{-1}(U)$ 是 Y 中开集. X^* 中的开集 U 不包含在 X 中时 (即 $\infty \in U$ 时), $U = X^* - C$, C 是 X 中的闭紧集, 从而 $h^{-1}(C) = f(C)$ 是 $f(X)$ 中紧集, 也是 Y 中紧集. Y 是 T_2 空间, $h^{-1}(C)$ 闭于 Y, 从而 $h^{-1}(U)$ 开于 Y. 到此证明了 h 在 Y 上连续. 证完.

由定理 3.6.1 的惟一性部分可知, 引进无穷远点 ∞ 使复平面、数直线成为紧空间分别是复平面、数直线的单点紧化. 对半开区间 $(0,1]$, 补上点 0 使成 $[0,1]$ 也是单点紧化. 考察定义在 $(0,1]$ 上的实值连续函数 $f: x \mapsto \sin(1/x)$, 即使对 $(0,1]$ 单点紧化了, 但是 f 不能连续地扩张到 $[0,1]$ 上. 这导致要求具有更 "良好" 性质的紧化 ——Stone-Čech 紧化.

设 A 是任一集, $|A|$ 表示集 A 的势, $I = [0,1]$ 是闭区间, 积空间 I^A 是 $|A|$ 个 $[0,1]$ 的积. 每一 $q \in I^A$ 可表示为 $q = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 这里 $x_\alpha \in [0,1]$ $(\alpha \in A)$, q 可以看作集 A 到 $[0,1]$ 内的实值函数, 即对每一 $\alpha \in A$, $q(\alpha) = x_\alpha$. 如用 p_α 表示积空间 I^A 到第 α $(\alpha \in A)$ 个坐标空间上的投影映射, 则有

$$p_\alpha \circ q = x_\alpha = q(\alpha). \tag{3.6.1}$$

引理 3.6.2 设 f 是由集 A 到集 B 的映射, 对每一 $y \in I^B$, 置

$$f^*(y) = y \circ f, \tag{3.6.2}$$

则 f^* 是 I^B 到 I^A 内的连续映射.

证明 按 $y \in I^B$ 是由 B 到 I 的实值函数, $y \circ f$ 是由 A 到 I 的实值函数, 所以 $f^*(y) = y \circ f$ 是 I^B 到 I^A 内的映射 (如下图所示).

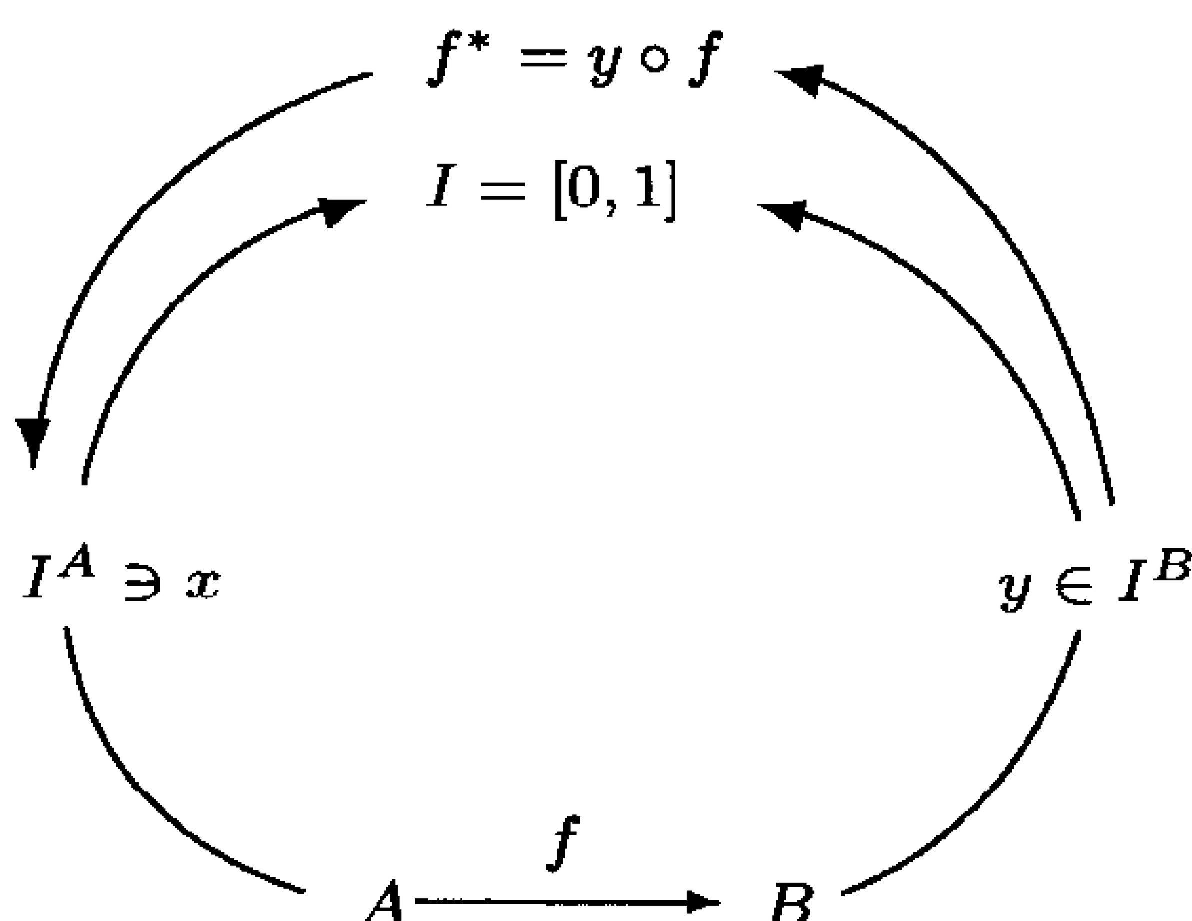
为了证明 $f^*(y) = y \circ f$ 是 I^B 到 I^A 内的连续映射, 只要证明对 I^A 的每一坐标空间 (即对每一 $\alpha \in A$), $p_\alpha \circ f^*(y)$ 在 I^B 上是连续的 (定理 2.1.2). 由 (3.6.2) 及 (3.6.1),

$$p_\alpha \circ f^*(y) = p_\alpha(y \circ f) = (y \circ f)(\alpha) = y \circ f(\alpha),$$

这里 $f(\alpha) \in B$, $y \in I^B$. 更由 (3.6.1), 有

$$y \circ f(\alpha) = p_{f(\alpha)} \circ y.$$

这正好是积空间 I^B 中的元素 y 在坐标空间 $f(\alpha)$ 上的投影, 显然是连续的. 证完.



设 $F(X)$ 是由空间 X 到 $I = [0,1]$ 内的实值连续函数的全体所成集. $|F(X)|$ 是 $F(X)$ 的势, $I^{F(X)}$ 是 $|F(X)|$ 个闭区间 $[0,1]$ 形成的积空间. 由 Tychonoff 积定理知 $I^{F(X)}$ 是紧空间. 此外, $I^{F(X)}$ 也是 T_2 空间.

定义 3.6.4　从拓扑空间 X 到 $I^{F(X)}$ 内的映射 e 称为**赋值映射** (evaluation mapping), 如果对每一 $x \in X$, 每一 $\alpha \in F(X)$,

$$p_\alpha \circ e(x) = \alpha(x). \tag{3.6.3}$$

上述定义中的 $\alpha \in F(X)$ 是 X 到 $[0,1]$ 内的连续映射, 由此容易证明下述引理.

引理 3.6.3　赋值映射 e 是 X 到 $I^{F(X)}$ 内的连续映射.

证明　由 (3.6.3) 式, $p_\alpha \circ e = \alpha$, 而 α 在 X 上连续, 由定理 2.1.2, e 在 X 上连续. 证完.

设 F 是空间 X 到 $[0,1]$ 内的函数所成族. 族 F 称为在 X 上**区别点的** (separate points), 如果对任何 $x, y \in X$, $x \neq y$, 存在 $f \in F$ 使 $f(x) \neq f(y)$; 称为在 X 上**区别点与闭集的** (separate points and closed sets), 如果对 X 的任何闭集 A 及任何 $x \notin A$, 存在 $f \in F$ 使 $f(x) \notin \overline{f(A)}$. 显然, 函数分离 T_2 空间 (见例 2.4.1) 到 $[0,1]$ 内的连续函数族是区别点的, 完全正则空间到 $[0,1]$ 内的连续函数族是区别点与闭集的 (相反的论断也成立, 见习题 3.24).

引理 3.6.4　设 e 是 X 到 $I^{F(X)}$ 内的赋值映射, 则有

(i) 如果 $F(X)$ 是区别点与闭集的, 则 e 是 X 到 $e(X)$ 上的开映射;

(ii) 如果 $F(X)$ 是区别点的, 则 e 是单映射.

证明　(i) 只要证明每一 $x \in X$ 的开邻域 U 的像 $e(U)$ 包含着 $e(x)$ 在积空间 $I^{F(X)}$ 的一个邻域与 $e(X)$ 的交 [定理 1.5.2 的 (iv)], 由于 $F(X)$ 是区别点与闭集的, 对 x 及闭集 $X-U$, 存在 $f \in F(X)$, 使 $f(x) \notin \overline{f(X-U)}$. 置 $V=\{y : y \in I^{F(X)},\ p_f(y) \notin \overline{f(X-U)}\}$. 显然, V 是积空间 $I^{F(X)}$ 中的开集, 且 $e(x) \in V$, 易知 $V \cap e(X) \subset e(U)$.

(ii) 设 $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$, 存在 $\alpha \in F(X)$, 使 $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$. 由定义 3.6.4 的 (3.6.3), $p_\alpha \circ e(x') \neq p_\alpha \circ e(x'')$, 所以 $e(x') \neq e(x'')$. 证完.

由引理 3.6.3 和引理 3.6.4 及上述讨论, 得以下定理.

定理 3.6.3　设 X 是 Tychonoff 空间, 则赋值函数 e 是 X 到 $I^{F(X)}$ 的子集 $e(X)$ 上的同胚映射.

由上述定理及 $e(X)$ 关于 T_2 紧空间 $I^{F(X)}$ 的闭包是 T_2 紧的, 记 $\overline{e(X)}=\beta X$. 显然, $(e, \beta X)$ 是 X 的一个 T_2 紧化.

定义 3.6.5 (J. Dieudonné, 1949)　设 X 是 Tychonoff 空间, 称 X 的 T_2 紧化 $(e, \beta X)$ 为 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification), 这里 βX 是 $e(X)$ 在 $I^{F(X)}$ 中的闭包.

定理 3.6.4 (Stone-Čech 紧化定理[79, 379])　设 X 是 Tychonoff 空间, Y 是 T_2 紧空间, f 是 X 到 Y 内的连续映射, $(e, \beta X)$ 是 X 的 Stone-Čech 紧化, 则由 $e(X)$ 到 Y 内的连续映射 $f \circ e^{-1}$ 可以扩张为由 βX 到 Y 内的连续映射.

证明　对给定的 X 到 Y 内的连续映射 f, 定义由 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 内的映射 f^*:

$$f^*(\alpha)=\alpha \circ f, \qquad \alpha \in F(Y). \tag{3.6.4}$$

从而定义由 $I^{F(X)}$ 到 $I^{F(Y)}$ 内的映射 f^{**}:

$$f^{**}(q)=q \circ f^*, \qquad q \in I^{F(X)}. \tag{3.6.5}$$

e 是 X 到 $I^{F(X)}$ 内的赋值映射, g 是 Y 到 $I^{F(Y)}$ 内的赋值映射, 因 X 是 Tychonoff 空间, 由定理 3.6.3, e 把 X 同胚地映成 $e(X) \subset \beta X$, 因 Y 是 T_2 紧空间, g 把 Y 同胚地映成 $g(Y)=g(\overline{Y})=\beta Y$ (因 Y 紧, $g(Y)$ 紧, $I^{F(X)}$ 是 T_2 的, 故 $g(Y)$ 闭). 图示如下:

$$\begin{array}{ccc}
e(X) \subset \overline{e(X)}=\beta X \subset I^{F(X)} \xrightarrow{f^{**}} I^{F(Y)} \supset \beta Y=\overline{g(Y)}=g(Y) \\
e \big\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big\uparrow g \\
X \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad f \qquad\qquad\qquad} Y
\end{array}$$

由引理 3.6.2, 映射 f^{**} 连续, 由上图可以看到, 如果能证明 $f^{**}\circ e=g\circ f$, 则 $g^{-1}\circ f^{**}$ 就是要求的 $f\circ e^{-1}$ 的连续扩张了.

现证 $f^{**}\circ e=g\circ f$. 设 $x\in X, h\in F(Y)$, 分别由 (3.6.1), (3.6.5), (3.6.4), (3.6.3) 式可得

$$\begin{aligned}p_h(f^{**}\circ e(x)) &\overset{(1)}{=} (f^{**}\circ e(x))(h) \overset{(5)}{=} (e(x)\circ f^*)(h) = e(x)\circ f^*(h)\\ &\overset{(4)}{=} e(x)(h\circ f) \overset{(3),(1)}{=\!=\!=} (h\circ f)(x) = h\circ f(x)\\ &\overset{(3),(1)}{=\!=\!=} g(f(x))(h) = (g\circ f(x))(h) \overset{(1)}{=} p_h(g\circ f(x)).\end{aligned}$$

证完.

推论 3.6.1 在 T_2 紧化情况, Stone-Čech 紧化是最大的紧化.

证明 由定义 3.6.5, 这里考察的空间 X 应是 Tychonoff 空间. 设 (f,Y) 是 X 的任一 T_2 紧化, f 是 Tychonoff 空间 X 到 T_2 紧空间 Y 内的连续映射, 由定理 3.6.4, 存在 $f\circ e^{-1}$ 的扩张 h 映 βX 到 Y 内, 由定义 3.6.2 得证. 证完.

例 3.6.1 (单点紧化与 Stone-Čech 紧化) $[0,1]$ 是 $(0,1]$ 的单点紧化, 但不是 $(0,1]$ 的 Stone-Čech 紧化, 因为定义在 $(0,1]$ 上到 T_2 紧空间 $[-1,1]$ 上的函数 $x\mapsto\sin(1/x)$, 不能连续扩张到 $[0,1]$ 上. 数直线的单点紧化同胚于平面上的圆周, 同样不是 Stone-Čech 紧化, 函数 $x\mapsto\arctan x$ 给出同样的矛盾.

例 3.6.2 ($\beta\mathbb{N}$, 不存在非平凡收敛序列的无限紧空间) Stone-Čech 紧化是非常复杂的, 正整数集 $\mathbb{N}$ 作为数直线的子空间 (按相对拓扑) 是一离散空间, 从而是 T_2 局部紧的, Tychonoff 的. B. Pospíšil[338] 证明了 $\mathbb{N}$ 的 Stone-Čech 紧化的势 $|\beta\mathbb{N}|=2^{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c}$ 是连续统的势), J. Novák[321] 证明了 $\beta\mathbb{N}$ 的任何无限闭子集的势是 $2^{\mathfrak{c}}$. 从而在 $\beta\mathbb{N}$ 中不存在非平凡的收敛序列, 于是 $\beta\mathbb{N}$ 不是序列式紧的, 且 $\mathbb{N}\cup\{x\}$ ($x\in\beta\mathbb{N}-\mathbb{N}$) 不是第一可数的 (相对简单的证明见文献 [112] p. 244). 此外, 空间 $[0,\omega_1)$ 的单点紧化应是 $[0,\omega_1]$, 而可以证明 $[0,\omega_1)$ 的 Stone-Čech 紧化也是 $[0,\omega_1]$ (习题 3.25).

习 题 3

3.1 离散空间是紧空间当且仅当它是有限的.

3.2 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则 $\{x_0\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是紧集.

3.3 证明空间 X 是紧空间当且仅当每一开覆盖具有局部有限子覆盖.

3.4 举例说明在 T_1 空间中, 紧子集可以不是闭的, 两个紧子集的交可以不是紧的.

3.5 证明任意个闭紧集的交是闭紧集.

3.6 拓扑空间的紧子集的闭包可以不是紧的, 试举出这样的例.

3.7 设 K 是 T_2 空间 X 的紧子集. 若 X 的开子集族 $\{U_i:i=1,2,\cdots,k\}$ 覆盖 K, 证

明存在 X 的紧子集族 $\{K_i : i = 1, 2, \cdots, k\}$ 使

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i, \quad \text{且 } K_i \subset U_i,\ i \leqslant k.$$

3.8 叙述并证明定理 3.1.9 相应于网的论述.

3.9 证明 Alexandroff 双线空间 (例 3.1.2) 的紧性.

3.10 证明空间 $[0, \omega_1)$ 是序列式紧的、局部紧的.

3.11 证明空间 $[0, \omega_1)$, $[0, \omega_1]$ 都是正规的, 但它们的积 $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ 不是正规的. (提示: 不相交的闭集 $A = [0, \omega_1) \times \{\omega_1\}$ 及 $B = \{(\alpha, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 不存在不相交的邻域.)

3.12 证明 T_2 空间的局部紧子集可以表示为一个开集与一个闭集的交.

3.13 设 $\mathscr{A}$ 是 T_2 空间的紧子集族, $\mathscr{A}$ 中元素的有限交是连通的, 则 $\cap\{A : A \in \mathscr{A}\}$ 是连通的.

3.14 设 f 是紧空间 X 上的实值连续函数, 设 f 总是正的, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使对 $x \in X$, $f(x) > \varepsilon$.

3.15[310] 设 X 是拓扑空间. 如果对于每一个拓扑空间 Y, 投影映射 $f : X \times Y \to Y$ 是闭映射, 则 X 是紧空间.

3.16[178] 设 X 是可数紧空间, Y 满足第一可数公理, 则投影映射 $f : X \times Y \to Y$ 是闭映射.

3.17 T_1 空间是可数紧的当且仅当每一无限开覆盖具有真子覆盖.

3.18 空间 X 是可数紧的当且仅当每一个具有有限交性质的闭集族具有可数交性质 (即任意可数交不空).

3.19 空间 X 是可数紧的当且仅当对每一递减的不空闭集序列 $\{F_n\}$ 有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

3.20 正则空间 X 是可数紧的当且仅当每一按点有限开覆盖①具有有限子覆盖 (注意, 在 T_2 空间不复成立).

3.21 完全正则空间 X 是伪紧的当且仅当 X 中的每一局部有限的不空开集族是有限的.

3.22 完全正则空间是伪紧的当且仅当每一局部有限的可数开覆盖具有真子覆盖.

3.23 证明可数紧空间与紧空间的积是可数紧空间.

3.24 设 $\varPhi$ 是 T_1 空间 X 到 $[0, 1]$ 的连续函数族, 能区别点与闭集, 则 X 是完全正则空间.

3.25 证明空间 $[0, \omega_1)$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta[0, \omega_1)$ 同胚于 $[0, \omega_1]$.

3.26 k 空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 是连续的当且仅当 f 在 X 的每一紧子集上是连续的.

3.27 完全正则空间 X 是局部紧的当且仅当 X 开于任一 T_2 紧化 (f, Y).

3.28 证明序列型空间 (定义见定理 2.3.1 的注记) 是 k 空间.

3.29 可数个序列式紧空间的积是序列式紧的.

---

① 称集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为**点有限的** (point-finite), 如果对每一 $x \in X$, $x \in U_\alpha$ 仅对有限个 $\alpha \in A$ 成立.

3.30 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射, 则对 Y 中的任一紧集 $K, f^{-1}(K)$ 是 X 中的紧集.

3.31 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的**拟完备** (quasi-perfect[306]) 映射 (即连续的闭映射且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数紧的), 则对 Y 中的任一可数紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 中的可数紧集.

3.32(Wallace 定理[232]) 设有空间 X_1, X_2, 紧集 $A_i \subset X_i$ $(i = 1, 2)$, W 是积空间 $X_1 \times X_2$ 的开集, $W \supset A_1 \times A_2$, 则存在 X_i 中的开集 $U_i \supset A_i$ $(i = 1, 2)$, 使 $W \supset U_1 \times U_2 \supset A_1 \times A_2$. 把上述两个空间的情况推广到任意有限个空间的情况 (任意个空间的情况见引理 7.2.4).

第4章 度量空间

度量空间在分析学中有广泛的应用. 数直线 $\mathbb{R}$, n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$, 连续函数空间, 希尔伯特空间等都是度量空间. 除紧空间外, 度量空间可以作为又一类重要的拓扑空间类, 它给许多拓扑概念以适当的直观描述.

4.1 度量空间

定义 4.1.1 设 X 是一集, 如果对任意两点 $x, y \in X$, 可以定义一个非负值 $\rho(x,y)$ 满足:

(M1) $\rho(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(M3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y), z \in X$ (三角不等式),

则称 $\rho(x,y)$ 为 X 上的**度量** (或**距离**, metric), 集 X 带有度量 ρ 后称为**度量空间** (或**距离空间**, metric space), 可以记为 (X,ρ), 或简记为 X.

(M1)~(M3) 称为**度量公理** (或**距离公理**, metric axioms). (M1) 指出不同两点间的度量 (距离) 是正值, 且点到自己的度量 (距离) 是零; (M2) 指出 $\rho(x,y)$ 是一对称函数, 不依赖点 x, y 的次序; (M3) 称为三角不等式, 在平面上, 直观地表示为三角形两边的和不小于第三边.

如果在定义 4.1.1 中, 把 (M1) 换为

(M1′) $\rho(x,y) = 0$, 当 $x = y$,

则得到的 $\rho(x,y)$ 称为 X 上的**伪度量** (或**伪距离**, pseudo-metric), 相应的 (X,ρ) 称为**伪度量空间** (或**伪距离空间**, pseudo-metric space). 容易看到, 在这样的空间里, 不同两点间的距离可以是零, 这种空间显得非常广泛, 我们不去研究它, 这里引入伪度量, 只是为了在某些情况下, 伪度量概念是一较便利的工具.

实数集 $\mathbb{R}$ 中的两点 x, y 的度量可规定为 $\rho(x,y) = |x-y|$, 显然满足度量公理, 所以 $\mathbb{R}$ 是度量空间. 这一度量空间称为 $\mathbb{R}$ 上的**通常度量** (usual metric).

一般地说, 如对 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

规定

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2},$$

则 $\rho(x,y)$ 满足度量公理 (读者自证), 从而 $\mathbb{R}^n$ 是度量空间. 上述度量称为**欧几里得度量** (Euclidean metric).

对任一集 X, 规定 $\rho^*(x,x)=0$, $\rho^*(x,y)=1$, $x\neq y$, 则显然满足度量公理, 从而 (X,ρ^*) 是度量空间, 称为**离散度量空间** (discrete metric space).

分析学中常用到的度量空间, 除数直线 $\mathbb{R}$ 和 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 外, 有连续函数空间 (习题 4.1), 勒贝格 (Lebesgue) 平方可积函数空间 (习题 4.2) 及希尔伯特空间 (见例 4.1.1) 等.

例 4.1.1 (希尔伯特空间) 考察满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty$ 的所有实数序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 所成的集, 在这集上规定 $(y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots))$:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}. \tag{4.1.1}$$

下面证明 $\rho(x,y)$ 满足度量公理.

首先证明 (4.1.1) 式是有意义的, 也就是级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 总是收敛的. 为此, 可引用柯西 (Cauchy) 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2, \tag{4.1.2}$$

这里所有 a_i, b_i 都是实数. 由 (4.1.2) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}\right)^2.\end{aligned}$$

上式两端开方后, 以 x_i 代 a_i, 以 $-y_i$ 代 b_i, 则有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}. \tag{4.1.3}$$

(4.1.3) 式对任意正整数 n 成立. 让 $n\to\infty$, 按假设条件, (4.1.3) 式右端趋有限数为极限, 从而当 $n\to\infty$ 时, (4.1.3) 式左端不减而有界, 故也趋有限数. 所以级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 收敛.

显然, $\rho(x,y)$ 满足度量公理中的 (M1) 和 (M2), 下证满足 (M3). 为此, 在 (4.1.3) 式以 $-y_i$ 代替 y_i, 让 $n \to \infty$, 有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2}. \tag{4.1.4}$$

设 a, b, c 是所考察集中的任意三点, 这里

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots),$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots),$$

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots).$$

在 (4.1.4) 式中以 $a_i - c_i$ 代 x_i, $c_i - b_i$ 代 y_i, 则得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-b_i)^2}.$$

到此证明了 $\rho(x,y)$ 满足 (M3). 所以所考察集规定了上述度量 $\rho(x,y)$ 后形成了一度量空间, 称为**希尔伯特空间** (Hilbert space), 或 $\boldsymbol{l_2}$ **空间** (l_2-space).

例 4.1.2 (贝尔零维空间[38]) 考察所有正整数的序列 $(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)$ 所成的集. 对这集的任意两点

$$x = (n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots),\ y = (m_1, m_2, \cdots, m_k, \cdots)$$

规定

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1/\lambda, & x \neq y, \end{cases}$$

这里 λ 是使 $n_\lambda \neq m_\lambda$ 的最小正整数. 下面证明 $\rho(x,y)$ 满足度量公理, 从而所考察的集形成度量空间, 称为**贝尔零维空间** (Baire's zero-dimensional space).

$\rho(x,y)$ 显然满足度量公理中的 (M1) 和 (M2), 下证满足 (M3). 设 x, y, z 是任意三点. 当 $\rho(x,y) = 0$ 时, 当然满足 (M3). 现设 $\rho(x,y) = 1/\lambda_0$, 即

$$x = (n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda_0 - 1}, n_{\lambda_0}, \cdots),$$

$$y = (n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda_0 - 1}, m_{\lambda_0}, \cdots),$$

这里设 $n_{\lambda_0} \neq m_{\lambda_0}$. 设

$$z = (l_1, l_2, \cdots, l_{\lambda_0 - 1}, l_{\lambda_0}, \cdots).$$

分两种情况讨论:

(i) z 的前 $\lambda_0 - 1$ 个正整数中有某些正整数与 x 的相应位置的正整数不同, 即存在 $\lambda_1 < \lambda_0$, 使 $l_{\lambda_1} \neq n_{\lambda_1}$, 则 $\rho(x,z) \geqslant 1/\lambda_1 > 1/\lambda_0$, 这时, 不论 $\rho(z,y)$ 等于多少, 总有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

(ii) z 的前 $\lambda_0 - 1$ 个正整数分别与 x, y 的相应位置的正整数相等, 即对 $\lambda < \lambda_0$ 有 $l_\lambda = n_\lambda$. 如果 $\rho(x,z) = 1/\lambda_0$, 显然有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z)$; 如果 $\rho(x,z) = 1/\lambda_2$, $\lambda_2 > \lambda_0$, 这说明至少有 $l_{\lambda_0} = n_{\lambda_0}$, 由于 $m_{\lambda_0} \neq n_{\lambda_0}$, 所以 $l_{\lambda_0} \neq m_{\lambda_0}$, 从而 $\rho(z,y) = 1/\lambda_0$, 那么也有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

到此证明了 $\rho(x,y)$ 满足 (M3).

上述序列的元素取自正整数集, 一般情况可取自任意集 A, 这时所得的度量空间称为**广义贝尔零维空间** (generalized Baire's zero-dimensional space), 记为 $N(A)$.

下面叙述度量空间与拓扑空间的关系.

设 (X,ρ) 是一度量空间, 称集 $S_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in X, \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$ 为包含点 x_0 的**开球** (open ball) (或 ε **开球** (ε-open ball)).

在数直线 $\mathbb{R}$ 上, $S_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 是以 x_0 为中心的开区间; 在 $\mathbb{R}^2$ 上, $S_\varepsilon(x_0)$ 是以 x_0 为中心, 以 ε 为半径的开圆 (不包含圆周上的点).

定理 4.1.1 设 (X,ρ) 是度量空间. 对每一个 $x \in X$, 置 $\mathscr{U}(x) = \{S_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$, 则开球族

$$\mathscr{U} = \cup\{\mathscr{U}(x) : x \in X\} = \{S_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0,\ x \in X\}$$

形成 X 上拓扑的开基.

证明 为此证明满足开基的条件 (B1) 和 (B2) (定理 1.2.2), 其中 (B2) 是显然可见的 ($\cup\{U : U \in \mathscr{U}\} = X$). 下证满足 (B1). 设开球 $S_r(x) \cap S_s(y) \neq \varnothing$, 对任一 $z \in S_r(x) \cap S_s(y)$, 取

$$t = \min\{r - \rho(x,z),\ s - \rho(y,z)\},$$

得开球 $S_t(z)$. 下证 $S_t(z) \subset S_r(x) \cap S_s(y)$. 对任一 $w \in S_t(z)$, $\rho(w,z) < t$, 由 (M3),

$$\begin{aligned}\rho(w,x) &\leqslant \rho(w,z) + \rho(z,x) < t + \rho(z,x) \\ &\leqslant r - \rho(x,z) + \rho(z,x) = r.\end{aligned}$$

所以 $S_t(z) \subset S_r(x)$, 同理可证 $S_t(z) \subset S_s(y)$, 故得 $z \in S_t(z) \subset S_r(x) \cap S_s(y)$. 证完.

由以上所证, 开球族 $\{S_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0,\ x \in X\}$ 形成 X 上拓扑的开基. 这一由度量 ρ 导出的 X 上的拓扑称为**度量拓扑** (metric topology). 在上述意义下, 度量空间是一种特殊类型的拓扑空间.

数直线 $\mathbb{R}$ 上的度量 $\rho(x,y) = |x-y|$ 所导出的度量拓扑正好是 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑. 一般地, 由 $\mathbb{R}^n$ 的欧几里得度量导出的拓扑称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**欧几里得拓扑** (Euclidean topology), 它恰是 $\mathbb{R}^n$ 上的通常拓扑.

例 4.1.3 (平面度量)　对实数平面 $\mathbb{R}^2$ 的任意两点 $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$, 规定

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

$$\rho'(P_1,P_2)=\max\{|\,x_1-x_2\,|,\ |\,y_1-y_2\,|\},$$

$$\rho''(P_1,P_2)=|\,x_1-x_2\,|+|\,y_1-y_2\,|.$$

下面证明 ρ, ρ', ρ'' 都满足度量公理, 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的三种不同的度量.

首先, 直观地验证它们的不同. 可以取点 $O=(0,0)$, $A=(1,1)$, 则

$$\rho(O,A)=\sqrt{2},\ \rho'(O,A)=1,\ \rho''(O,A)=2.$$

按 ρ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的欧几里得度量, 已见于前. 只要证明 ρ', ρ'' 满足度量公理, 其中 (M1), (M2) 是显然的, 现验证 (M3). 设 $P_3=(x_3,y_3)$.

$$\begin{aligned}\rho'(P_1,P_2)&=\max\{|\,x_1-x_2\,|,\ |\,y_1-y_2\,|\}\\&=\max\{|\,x_1-x_3+x_3-x_2\,|,\ |\,y_1-y_3+y_3-y_2\,|\}\\&\leqslant\max\{|\,x_1-x_3\,|,\ |\,y_1-y_3\,|\}+\max\{|\,x_3-x_2\,|,\ |\,y_3-y_2\,|\}\\&=\rho'(P_1,P_3)+\rho'(P_3,P_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho''(P_1,P_2)&=|\,x_1-x_2\,|+|\,y_1-y_2\,|\\&=|\,x_1-x_3+x_3-x_2\,|+|\,y_1-y_3+y_3-y_2\,|\\&\leqslant|\,x_1-x_3\,|+|\,y_1-y_3\,|+|\,x_3-x_2\,|+|\,y_3-y_2\,|\\&=\rho''(P_1,P_3)+\rho''(P_3,P_2),\end{aligned}$$

所以, ρ', ρ'' 是 $\mathbb{R}^2$ 上的度量.

由欧几里得度量 ρ 导出的度量拓扑正好是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑. 一切开球 (其实是平面上的开圆) $S_\varepsilon(P)=\{P':\rho(P,P')<\varepsilon\}$ 之集形成这拓扑的基. 对任一开球 $S_\varepsilon(P)$ 及对按度量 ρ'' 的开球 $S''_\varepsilon(P)$, 如果证明了

$$S''_\varepsilon(P)\subset S_\varepsilon(P)\subset S''_{\varepsilon/2}(P),$$

则一切按 ρ'' 的开球之集也形成这拓扑的基.

下面证明 $S''_\varepsilon(P)\subset S_\varepsilon(P)$. 设 $P'=(x',y')\in S''_\varepsilon(P)$, 则 $|\,x'-x|+|\,y'-y|<\varepsilon$, 由不等式

$$\sqrt{a^2+b^2}\ \leqslant\ |\,a|+|\,b|$$

知

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\ \leqslant|\,x'-x\,|+|\,y'-y\,|<\varepsilon,$$

即 $\rho(P,P')<\varepsilon$, 所以 $P'\in S_\varepsilon(P)$. 从而 $S''_\varepsilon(P)\subset S_\varepsilon(P)$.

同理可证, $S_\varepsilon(P)\subset S''_{\varepsilon/2}(P)$.

由此, 由度量 ρ'' 导出的度量拓扑也就是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑. 类似地, 可以证明由度量 ρ' 导出的度量拓扑也同样是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑. 为此, 只要证明对任一开球 $S_\varepsilon(P)$ 及对按度量 ρ' 的开球 $S'_\varepsilon(P)$, 有

$$S'_{\varepsilon/\sqrt{2}}(P)\subset S_\varepsilon(P)\subset S'_\varepsilon(P).$$

证明是类似的, 留给读者.

由上面看到 $\mathbb{R}^2$ 上的三种不同的度量, 相应的度量拓扑是相同的, 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑.

前面述及的离散度量空间 (X,ρ^*) $(\rho^*(x,x)=0,\rho^*(x,y)=1,x\neq y)$, 由 ρ^* 导出的度量拓扑是离散拓扑, 这是因为相应的 $\mathscr{U}(x)=\{\{x\},\ X\}$ (这时开球 $S_\varepsilon(x)=\{x\},\ 0<\varepsilon\leqslant 1$), 所以单点集是开的.

在定理 4.1.1 中, 以 $\{S_{1/n}(x):n=1,2,\cdots\}$ 代替 $\{S_\varepsilon(x):\varepsilon>0\}$ 作为 $\mathscr{U}(x)$, 由前面的论证可以看到这样的 $\mathscr{U}(x)$ 同样形成 X 上的拓扑的开基. 所以度量空间是一满足第一可数公理的拓扑空间.

由度量公理的 (M1), 不同的两点的度量总是大于零的, 也就是 $\rho(x,y)=r>0,\ x\neq y$. 可以取 $S_{r/2}(x)$, $S_{r/2}(y)$ 为分别包含 x,y 的不相交邻域. 所以度量空间是一 T_2 空间. 下面还可证明度量空间是正规空间 (定理 4.1.5).

定理 4.1.2 设 (X,ρ) 是度量空间, 则在度量拓扑意义下, 度量 $\rho(x,y)$ 是由积空间 $X\times X$ 到非负实数空间的连续映射.

证明 由度量公理的 (M3), $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)$, 这里 x_0 是 X 中任意一点, 从而有

$$\rho(x,y)-\rho(x_0,y)\leqslant\rho(x,x_0).$$

交换 x,x_0 的位置, 得

$$\rho(x_0,y)-\rho(x,y)\leqslant\rho(x_0,x).$$

由度量公理的 (M2), 合并上两式, 得到

$$|\ \rho(x,y)-\rho(x_0,y)\ |\leqslant\rho(x,x_0).$$

对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, 对任何 $x\in S_\varepsilon(x_0)$ 都有 $|\ \rho(x,y)-\rho(x_0,y)\ |<\varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\rho(x,y)=\rho(x_0,y)$. 这说明作为二元函数的 $\rho(x,y)$ 对单变量 x 连续, 且可以看到 $\delta(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关, 与另一变量 y 无关, 也就是对 x 的连续性关于 y 是一致的. 类似地, 对单变量 y 也是连续的. 从而知 $\rho(x,y)$ 在 $X\times X$ 上连续. 证完.

定义 4.1.2　设 (X,ρ) 是度量空间. 对点 $x \in X$ 及集 A, $B \subset X$ 称

$$D(A,x)=D(x,A)=\inf_{y\in A}\{\rho(x,y)\}$$

为**点 x 到集 A 的距离** (distance from a point to a set);

$$D(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}\{\rho(x,y)\}$$

为**集 A 到集 B 的距离** (distance from a set to a set).

规定 $D(x,\varnothing)=D(\varnothing,x)=1$, $D(A,\varnothing)=D(\varnothing,A)=1$.

定理 4.1.3　设 A 是度量空间 (X,ρ) 的子集, 则在度量拓扑意义下, $D(A,x)$ 是 X 到非负实数空间的连续映射.

证明　由度量公理的 (M3), $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$, 从而得

$$\inf_{z\in A}\{\rho(x,z)\}\leqslant\rho(x,y)+\inf_{z\in A}\{\rho(y,z)\},$$

这就是 $D(A,x)\leqslant\rho(x,y)+D(A,y)$. 从而有

$$D(A,x)-D(A,y)\leqslant\rho(x,y).$$

交换 x,y 的位置, 得

$$D(A,y)-D(A,x)\leqslant\rho(x,y).$$

合并以上两式, 得

$$|\ D(A,y)-D(A,x)\ |\leqslant\rho(x,y).$$

从而对任何 $y\in S_\varepsilon(x)$ 都有 $|\ D(A,y)-D(A,x)\ |<\varepsilon$. 所以 $D(A,x)$ 在 X 上连续. 证完.

在下面叙述度量空间的性质时, 所涉及的拓扑空间的概念总是指在度量拓扑意义下的, 不再特别指出.

定理 4.1.4　设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$, 则 $\overline{A}=\{x:D(A,x)=0\}$.

证明　由定理 4.1.3, $D(A,x)$ 是 X 到非负实数空间的连续映射, 单点集 $\{0\}$ 闭于非负实数空间, 由连续性知, 作为 $\{0\}$ 的原像 $\{x:D(A,x)=0\}$ 闭于 X. 此外, 显然 $\{x:D(A,x)=0\}\supset A$. 从而 $\{x:D(A,x)=0\}\supset\overline{A}$.

相反, 设 $y\notin\overline{A}$, 存在 $S_\varepsilon(y)$ 使 $S_\varepsilon(y)\cap A=\varnothing$, 从而 $D(A,y)\geqslant\varepsilon$, 所以 $y\notin\{x:D(A,x)=0\}$. 故有 $\{x:D(A,x)=0\}\subset\overline{A}$. 证完.

定理 4.1.5　度量空间是正规空间.

证明　已证度量空间是 T_2 空间. 设 A,B 是度量空间 (X,ρ) 的不相交的闭集. 由定理 4.1.4,

$$A=\{x:D(A,x)=0\},\ B=\{x:D(B,x)=0\}.$$

由定理 4.1.3, $D(A,x)$, $D(B,x)$ 都是 X 上的连续的实值函数, 置

$$D(x) = D(A,x) - D(B,x),$$

则 $D(x)$ 是 X 上的连续的实值函数. 置

$$U = \{x : D(x) < 0\},\ V = \{x : D(x) > 0\}.$$

由于 $U = D^{-1}((-\infty,0))$, $V = D^{-1}((0,+\infty))$ 分别是数直线 $\mathbb{R}$ 内不相交的开集 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 关于映射 D 的逆像, 所以 U,V 是不相交的开集. 下面证明 $U \supset A$ 及 $V \supset B$. 因为 $A \cap B = \varnothing$, 所以

$$x \in A \Rightarrow x \notin B,\ D(A,x) = 0 \Rightarrow D(B,x) > 0,$$

$$D(A,x) = 0 \Rightarrow D(x) < 0 \Rightarrow x \in U,$$

从而 $A \subset U$. 同理可证 $B \subset V$. 所以度量空间是正规的. 证完.

设 (X,ρ) 是度量空间, $A \subset X$, 在原度量 ρ 下, (A,ρ) 仍是度量空间 (度量空间具有遗传性, 参见定理 2.2.7 后面的叙述), 且由此而导得的 A 上的度量拓扑正好是 X 上的度量拓扑的相对拓扑. 由定理 4.1.5, 可知度量空间是遗传正规空间 (即完全正规空间).

定理 4.1.6 度量空间的闭子集是 G_δ 集.

证明 由定理 4.1.4, 度量空间 (X,ρ) 中的闭集 $F = \{x : D(F,x) = 0\}$. 对 $n = 1,2,\cdots$, 置 $G_n = \{x : D(F,x) < 1/n\}$, 由于 $D(F,x)$ 是 X 到 $[0,+\infty)$ 的连续映射, $[0,1/n)$ 开于 $[0,+\infty)$, 所以 G_n 是开集. 显然,

$$\{x : D(F,x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : D(F,x) < 1/n\},$$

即 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, F 是 G_δ 集. 证完.

定义 4.1.3 拓扑空间称为**完备的** (perfect), 如果每一闭集是 G_δ 集; 称为**完备正规的** (perfectly normal), 如果这空间是正规的, 又是完备的.

推论 4.1.1 度量空间是完备正规空间.

度量空间满足第一可数公理, 但未必满足第二可数公理 (即未必具有可数基). 以前述的离散度量空间 (X,ρ^*) 为例, 当 X 是不可数集时, 此空间没有可数基.

定理 4.1.7 在度量空间 (X,ρ) 中, 下列论断等价:

(i) 具有可数基;

(ii) 具有 Lindelöf 性质;

(iii) 每一个闭的离散子空间是可数集;

(iv) 每一个离散子空间是可数集;

(v) 每一个两两不相交的开集族是可数的;

(vi) 具有可数稠密子集.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 见定理 2.3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 A 是空间 X 的任一闭的离散子空间. 对每一 $x \in A$ 存在 X 中的开集 U_x 使 $U_x \cap A = \{x\}$. 置 $\mathscr{U} = \{U_x\}_{x \in A} \cup \{X - A\}$. 因 A 是闭集, $\mathscr{U}$ 形成空间 X 的开覆盖, 由 (ii), X 具有 Lindelöf 性质, 所以 $\mathscr{U}$ 必须是可数子覆盖. 集 A 必须是可数集.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 设 B 是空间 X 的任一离散子空间, 则 B 是局部紧的子空间. 由引理 3.6.1 以及度量空间的任何子空间都是 T_2 空间, 知 B 是子空间 $\overline{B}$ 的开集. 因为度量空间的子空间是度量空间及度量空间的闭集是 G_δ 集 (定理 4.1.6), 所以 B 是子空间 $\overline{B}$ 的 F_σ 集, 即 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 每一 A_i 闭于 $\overline{B}$, 从而闭于 X. A_i 是空间 X 的闭的离散子空间, 由 (iii), A_i 是可数集, 所以 B 是可数集.

(iv) $\Rightarrow$ (v). 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是空间 X 的任一两两不相交的开集族. 对每一 $\alpha \in A$, 取点 $x_\alpha \in U_\alpha$, 则 $B = \{x_\alpha : x_\alpha \in A\}$ 是一离散子空间, 由 (iv), B 是可数集, 从而 $\mathscr{U}$ 是可数集族.

(v) $\Rightarrow$ (vi). 对每一 $i = 1, 2, \cdots$, 置 $\mathscr{F}_i$ 为使任意两点间的距离大于 $1/i$ 的集所组成的集族. 容易验证集族 $\mathscr{F}_i$ 是有限特征的. 由 Tukey 引理 (引理 3.2.1), $\mathscr{F}_i$ 中存在极大元 A_i $(i = 1, 2, \cdots)$. 由于任意两点 $x, y \in A_i$, $\rho(x, y) > 1/i$, 对 A_i 的每一点作开球 $S_{1/2i}(x)$, 则 $\{S_{1/2i}(x) : x \in A_i\}$ 是两两不相交的开集族. 由 (v) 知这开集族是可数集, 从而 A_i 是可数集, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可数集. 下证可数集 A 稠密于 X, 即 $\overline{A} = X$.

如若不然, 存在 $x \in X - \overline{A}$, 由定理 4.1.4, $D(A, x) > 0$, 存在正整数 i_0 使 $D(A, x) > 1/i_0$, 从而 $D(A_{i_0}, x) \geqslant D(A, x) > 1/i_0$. 这说明, 点 x 到 A_{i_0} 的每一点的距离都大于 $1/i_0$, 这是不可能的, 因为 A_{i_0} 是 $\mathscr{F}_{i_0}$ 的极大元.

(vi) $\Rightarrow$ (i). 设 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是空间 X 的可数稠密子集. 置开球族

$$\mathscr{U} = \{S_r(x_n) : r \text{ 是正有理数},\ n = 1, 2, \cdots\}.$$

下证 $\mathscr{U}$ 是 X 的可数基. 首先, 由于集 A 是可数的, 全体有理数是可数的, 所以 $\mathscr{U}$ 是可数集族. 对每一 $x \in X$ 及开集 $U \ni x$, 存在 $S_r(x) \subset U$. 因为 A 在 X 中稠密, 存在 $x_i \in A$ 使 $\rho(x_i, x) < r/3$, 置 $V = S_{2r/3}(x_i)$. 因为 $\rho(x_i, x) < r/3$, 所以 $x \in V$, 对每一 $x' \in V$, $\rho(x_i, x') < 2r/3$, 故有

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x', x_i) + \rho(x_i, x) < 2r/3 + r/3 = r,$$

所以 $V \subset S_r(x)$, 故有 $x \in V \subset U$, 从而 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的基. 证完.

注记 上述定理揭示了度量空间中一些可数性质的等价性. 拓扑空间 X 称为**$\aleph_1$紧空间** ($\aleph_1$-compact space), 如果 X 的每一个闭的离散子空间是可数集; 等价于 X 的每一个不可数子集有聚点. 上述的 (iii), (v) 分别表示 X 满足 $\aleph_1$ 紧性质与可数链条件 (见习题 2.21). (ii) $\Rightarrow$ (iii) 即证 Lindelöf 性质 $\Rightarrow$ $\aleph_1$ 紧性质; 易证可数紧性质 $\Rightarrow$ $\aleph_1$ 紧性质.

度量空间未必是紧空间 (例如, 离散度量空间 (X,ρ^*) 当 X 是无限集情况). 由下列定理可知度量空间甚至未必是伪紧的.

定理 4.1.8 在度量空间 (X,ρ) 中, 下列论断等价:

(i) X 上的每一实值连续函数有界 (伪紧性);

(ii) X 的每一无限子集有聚点;

(iii) X 的每一无限子集有 ω 聚点;

(iv) X 的每一序列有聚点;

(v) X 的每一可数开覆盖具有有限子覆盖 (可数紧性);

(vi) X 的每一序列具有收敛子序列 (序列式紧性);

(vii) X 的每一开覆盖具有有限子覆盖 (紧性).

证明 在任何拓扑空间, (iii), (iv), (v) 是等价的 (定理 3.5.2). 在 T_1 空间, (ii), (iii), (iv), (v) 是等价的 (推论 3.5.1). 在正规空间, (i), (ii), (iii), (iv), (v) 是等价的 (定理 3.5.5 和定理 3.5.6). 在满足第一可数公理的空间, (iii), (iv), (v), (vi) 是等价的 (定理 3.5.3 和定理 3.5.4). 由于度量空间是正规的 (定理 4.1.5) 且满足第一可数公理, 所以在度量空间, (i) — (vi) 等价. 为此只要证明在度量空间, (vii) 与 (i) — (vi) 中某一论断等价就可以.

在 Lindelöf 空间, 紧性与可数紧性等价 (定理 3.5.9, 即 (vii) 与 (v) 等价). 下面证明: 在度量空间, (ii) $\Rightarrow$ Lindelöf 性质, 以完成证明.

设 A 是 X 的闭离散子空间, 若 A 是无限集, 由 (ii) 知 A 有聚点, 而 A 是闭集, 于是这聚点只能在 A 中, 这与 A 的离散性矛盾, 所以 X 的每一个闭的离散子空间是有限集. 由定理 4.1.7, X 具有 Lindelöf 性质. 证完.

度量空间未必是局部紧的. 取度量空间 (数直线) $\mathbb{R}$ 的所有有理点 r 组成的子空间 $\mathbb{Q}$ (或所有无理点 η 组成的子空间 $\mathbb{I}$), 这度量空间的任一开球 $S_\varepsilon(r)$ (或 $S_\varepsilon(\eta)$) 的闭包不可能是紧的, 从而度量空间 $\mathbb{Q}$ (或 $\mathbb{I}$) 不是局部紧的 (推论 3.4.1). 此外, 局部紧的度量空间未必是紧的 (仍取离散度量空间 (X,ρ^*) 当 X 是无限集的情况为例).

定义 4.1.4 设 A 是度量空间 (X,ρ) 的子集, 称 $d(A)=\sup_{x,y\in A}\{\rho(x,y)\}$ 为集 A 的**直径** (diameter); 当上确界不存在时, 称直径为无限大, 记为 $d(A)=\infty$.

规定 $d(\varnothing)=0$.

定理 4.1.9　设 (X,ρ) 是度量空间, 置 $\rho'(x,y)=\min\{1,\ \rho(x,y)\}$, 则 (X,ρ') 也是度量空间, 且 ρ,ρ' 导出相同的度量拓扑.

证明　显然, ρ' 满足度量公理的 (M1) 和 (M2). 下证 ρ' 满足 (M3), 如若不然, 存在 $x,y,z\in X$ 使

$$1\geqslant \rho'(x,z)>\rho'(x,y)+\rho'(y,z),$$

那么 $\rho'(x,y)<1,\ \rho'(y,z)<1$, 于是

$$\rho'(x,y)+\rho'(y,z)=\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant \rho(x,z),$$

从而 $\rho'(x,z)>\rho(x,z)$, 矛盾. 所以 (X,ρ') 是度量空间.

下证 X 上的不同度量 ρ,ρ' 导出相同的度量拓扑. 对 $\varepsilon>0,\ x\in X$, 记

$$S_\varepsilon(x)=\{x':x'\in X,\ \rho(x',x)<\varepsilon\},$$

$$S'_\varepsilon(x)=\{x':x'\in X,\ \rho(x',x)<\varepsilon\}.$$

当 $0<\varepsilon<1$ 时, $S_\varepsilon(x)=S'_\varepsilon(x)$, 故 $\rho,\ \rho'$ 导出的拓扑是相同的. 证完.

从上述定理可以看到每一个度量空间在度量拓扑的意义下同胚于某一直径不大于 1 的度量空间, 所以在以下论证中, 可以假设每一度量空间的直径不大于 1.

定义 4.1.5　度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (X',ρ') 的映射 f 称为**等距映射** (isometry mapping), 如果对 X 中的任意两点 x,y 有 $\rho(x,y)=\rho'(f(x),f(y))$.

等距映射必须是单映射 ($x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$). 当 f 是满映射时, f 是一一对应的, 从而等距映射的逆映射是等距映射. 此外, 等距映射 f 把 X 中的开球 $S_r(x)$ 映成 X' 中的开球 $S_r(f(x))$, 所以等距映射是开映射. 因此, 当等距映射是满映射时是一同胚映射.

等距映射所保持的性质称为**度量不变量** (metric invariant). 度量不变量未必是拓扑不变量 (为同胚映射所保持的性质). 例如, 数直线 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 中的开区间 $I=(0,1)$ 同胚, 但是 $d(\mathbb{R})=\infty,\ d(I)=1$, 所以集的直径是度量不变量, 不是拓扑不变量.

定理 4.1.10　设 $\{(X_n,\rho_n)\}$ 是度量空间的序列, 且每一度量空间 (X_n,ρ_n) 的直径不大于 1. 对积集 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 的任意两点 $x=\{x_n\},\ y=\{y_n\}$, 定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\rho_n(x_n,y_n),$$

则 ρ 是 X 上的度量, 且由 ρ 导得的 X 上的度量拓扑就是由 ρ_n 导出的 X_n $(n=1,2,\cdots)$ 上的度量拓扑的积拓扑.

证明　容易验证 ρ 满足度量公理, 是 X 上的度量, 下证由 ρ 导得的度量拓扑 (以下简称度量拓扑) 就是由 ρ_n 导出的 X_n 上的度量拓扑的积拓扑 (以下简称积拓扑). 设度量拓扑为 $\mathscr{V}$, 积拓扑为 $\mathscr{U}$.

设 $V = S_r(x)$ 是度量拓扑 $\mathscr{V}$ 中的任一开球, 存在正整数 n_0, 使 $1/2^{n_0} < r$. 取积拓扑 $\mathscr{U}$ 的基的元素

$$U = \left\{ y : \rho_n(x_n, y_n) < \frac{1}{2^{n_0+1}},\ n \leqslant n_0 + 1 \right\},$$

则对每一 $y \in U$,

$$\rho(x, y) \leqslant \frac{1}{2^{n_0+1}} \sum_{n=1}^{n_0+1} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{n_0+1} \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,\ \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0+1}},$$

所以

$$\rho(x, y) < \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} = \frac{1}{2^{n_0}}.$$

从而 $U \subset V$. 所以度量拓扑 $\mathscr{V}$ 中的每一个开集是积拓扑 $\mathscr{U}$ 中的开集.

反之, 设 $U \in \mathscr{U}$ 是积拓扑 $\mathscr{U}$ 的次基中的元素, 即 U 具有形式 $\{x : x_n \in W\}$, W 是 X_n 中的开集. 因 (X_n, ρ_n) 是度量空间, 存在开球 $S_r^{(n)}(x_n)$ 使 $S_r^{(n)}(x_n) \subset W$ (这里 $S_r^{(n)}(x_n) = \{y_n : \rho_n(y_n, x_n) < r\}$). 由 ρ 的定义,

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rho_k(x_k, y_k) \geqslant \frac{1}{2^n} \rho_n(y_n, x_n).$$

由上式可知, 为了使 $\rho_n(x_n, y_n) < r$, 只要 $\rho(x, y) < r/2^n$. 这说明只要取关于 x 的开球 $S_{r/2^n}(x) \in \mathscr{V}$, 即有 $S_{r/2^n}(x) \subset U \in \mathscr{U}$. 以上是对 $\mathscr{U}$ 的次基中的元素证明的, 从而知对 $\mathscr{U}$ 中的任何元素 U 及 $x \in U$, 存在 $\mathscr{V}$ 中的元素 V 使 $x \in V \subset U$. 这说明积拓扑 $\mathscr{U}$ 中的每一开集是度量拓扑 $\mathscr{V}$ 中的开集.

综上所述, 由 ρ 导出的 $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上的度量拓扑就是由 ρ_n 导出的 X_n ($n = 1, 2, \cdots$) 上的度量拓扑的积拓扑. 证完.

希尔伯特立方体 I^ω (例 2.1.3) 上有两种度量: 一是作为希尔伯特空间 (例 4.1.1) 的子集所诱导的度量; 二是作为积空间由定理 4.1.10 产生的度量. 这两种度量导得的 I^ω 上的度量拓扑是相同的. 此度量拓扑也与积拓扑一致.

超过可数个度量空间的积未必是度量空间, 由于度量空间满足第一可数公理, 只要证明 "超过可数个满足第一可数公理的非平凡空间 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (A 是不可数集) 的积不满足第一可数公理". 按积空间 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 的基 $\mathscr{B} = \{B\}$ 的元素 B 具有如下形式: B 在坐标空间 X_α 上的投影 $p_\alpha(B)$ 除有限个 α 外, 都有 $p_\alpha(B) = X_\alpha$. 由于每一 X_α 不是平凡空间, 存在包含某一点 $x_\alpha \in X_\alpha$ 的开的真子集 V_α ($V_\alpha \neq X_\alpha$). 下证点 $x = \{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 不存在可数邻域基. 如若不然, 设 $\{U_n(x)\}$ 是点 x 的可

数邻域基. 每一 $U_n(x)$ 应包含 $\mathscr{B}$ 中的元, 从而由 A 的不可数性, 必存在 $\alpha_0 \in A$ 使对任何 $U_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $p_{\alpha_0}(U_n(x)) = X_{\alpha_0}$. 取包含 x_{α_0} 的开的真子集 $V_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$, 则包含点 $x = \{x_\alpha\}$ 的开集 $p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$ 不可能包含着任一 $U_n(x)$. 这与 $\{U_n(x)\}$ 是点 x 的邻域基矛盾. 证完.

定理 4.1.11 设 $\{(X_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是一族两两不相交的度量空间, 则拓扑和 $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是度量空间.

证明 由定理 4.1.9, 对每一 $\alpha \in A$, 可设对任何 $x, y \in X_\alpha$, $\rho_\alpha(x, y) \leqslant 1$. 对任何 $x, y \in X$, 定义 ρ 如下:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_\alpha(x, y), & \text{当 } x, y \text{ 同属某一} X_\alpha \text{ 时}, \\ 1, & \text{在相反情况}. \end{cases}$$

显然 ρ 满足度量公理的 (M1) 和 (M2). 下面验证 ρ 满足 (M3):

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

如若不然, 则存在 x, y, z 使 $\rho(x, z) > \rho(x, y) + \rho(y, z)$, 那么 $\rho(x, y) < 1$, $\rho(y, z) < 1$, 于是存在 $\alpha \in A$ 使 $x, y, z \in X_\alpha$, 从而

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho_\alpha(x, y) + \rho_\alpha(y, z) \geqslant \rho_\alpha(x, z) = \rho(x, z),$$

矛盾. (M3) 成立.

到此证明了 ρ 是 X 上的度量, (X, ρ) 是度量空间, 由拓扑和的定义 (定义 3.1.3), 易知由 ρ 导出的 X 上的度量拓扑正好是由 ρ_α 导出的 X_α 上的度量拓扑的拓扑和. 证完.

上述定理指出, 任意多个互不相交的开的度量子空间的并是度量空间. 下面给出这样的例, 可数个互不相交的闭的度量子空间的并不是度量空间.

例 4.1.4 (J. Dieudonné [132], 可数个闭度量子空间的并不保持度量性) 设集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是实数平面的子集, 是由 y 轴 (记为集 Y) 上的点及形如 $(1/n, k/n^2)$ 的点组成, 这里 n 取遍正整数, k 取遍整数. 在 E 上给以如下拓扑:

(i) 单点集 $\{(1/n, k/n^2)\}$ 是开的;

(ii) Y 的点 $(0, y_0)$ 的开邻域基规定为 $\{U_n(y_0) : n = 1, 2, \cdots\}$, 这里

$$U_n(y_0) = \{(x, y) : x \leqslant 1/n,\ |y - y_0| \leqslant x\}.$$

易知, 空间 E 的每一单点集是闭的, Y 也是 E 的闭集. 此外, Y 的每点都开于子空间 Y, 所以 Y 是离散闭子空间, 从而是闭的度量子空间 (对离散拓扑, 存在度量 ρ $(\rho(x, x) = 0,\ \rho(x, y) = 1,\ x \neq y)$). 每一单点集 $\{(1/n, k/n^2)\}$ 也是度量子空间, 所以空间 E 是可数个互不相交的闭的度量子空间的并.

空间 E 不是度量空间. 因为形如 $(1/n, k/n^2)$ 的点之集是 E 的可数稠密子集, 所以 E 是可分空间, 但 Y 是 E 的不可数的闭离散子空间, 由定理 4.1.7, E 不是度量空间.

此外, 不难验证空间 E 是完全正则空间. 从而可知, 即使一个完全正则空间 X 是可数个互不相交的闭的度量子空间的并, X 未必是度量空间. 关于这方面的研究, A. H. Stone [376] 得到许多深刻的结果.

度量空间在连续闭映射下的像未必是第一可数空间, 因此, 度量空间的商空间未必是度量空间, 见例 4.1.5.

例 4.1.5 (连续闭映射不保持度量性) 取数直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $S = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ (关于通常拓扑). 对每一序数 $\alpha < \omega$, S_α 同胚于 S. 作拓扑和 $\bigoplus_{\alpha<\omega} S_\alpha$, 记为 X. 把 X 的所有非孤立点之集 A (闭集) 映成一点所得的商空间 X/A 记作 $\boldsymbol{S_\omega}$, 通常称为**序列扇** (sequential fan). 则 X 是度量空间 (定理 4.1.11), 自然映射 $f : X \to S_\omega$ 是闭的 (习题 2.1), 所以 S_ω 是度量空间的连续闭映像.

记 $f(A) = \{a\}$, 下面将证明 S_ω 在点 a 的邻域基不可能是可数的, 从而 S_ω 不满足第一可数公理, 于是 S_ω 不是度量空间.

姑设点 a 在 S_ω 有可数开邻域基 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\omega}$, 则每一 $f^{-1}(U_\alpha) = (U_\alpha - \{a\}) \cup A$ 是 X 中包含集 A 的开集. 对每一 $\alpha < \omega$, 由于收敛序列 S_α 的极限点在 A 中, 存在点 $x_\alpha \in S_\alpha \cap (U_\alpha - \{a\})$, 则 $\{x_\alpha : \alpha < \omega\}$ 是 X 的闭集, 从而 $X - \{x_\alpha : \alpha < \omega\}$ 是 X 的开集, 于是 $U = S_\omega - f\{x_\alpha : \alpha < \omega\}$ 是空间 S_ω 的开集, 且包含点 a, 但是每一 $U_\alpha \not\subset U$, 这一矛盾说明 S_ω 不满足第一可数公理.

4.2 全有界与完全度量空间

定义 4.2.1 度量空间 (X, ρ) 称为**全有界的** (totally bounded), 如果对每一 $\varepsilon > 0$, 存在有限个 ε 开球覆盖空间 X, 也就是存在由 ε 确定的有限集 $F(\varepsilon)$ 使 $X = \bigcup_{x \in F(\varepsilon)} S_\varepsilon(x)$. 这时也称有限集 $F(\varepsilon)$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}$ **稠密**于 (ε-dense) X .

离散度量空间 (X, ρ^*) 不是全有界的, 除非 X 是有限集. 数直线 $\mathbb{R}$ (通常度量) 不是全有界的. 容易验证数直线 $\mathbb{R}$ 内的闭区间 $[a, b]$, 开区间 (a, b) 都是全有界的. 按数直线同胚于任一开区间, 从而可知全有界性不是拓扑不变量.

取希尔伯特空间 l_2 的子集 $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 这里 $x_n = (0, 0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots)$ (取第 n 位为 1, 其余都是 0), 按希尔伯特空间的度量 (例 4.1.1), 子空间 A 是有界的 (即 A 的直径 $d(A) < +\infty$), 因为 A 中任意两点的距离是 $\sqrt{2}$; 但不是全有界的, 因为对 $\varepsilon \leqslant \sqrt{2}$, 不存在有限集 $F(\varepsilon)$ 是 ε 稠密于 A (即 $A = \bigcup_{x \in F(\varepsilon)} S_\varepsilon(x)$). 所以有界的度量空间未必是全有界的.

定理 4.2.1 全有界的度量空间的子空间是全有界的.

证明　设 (X,ρ) 是全有界的度量空间, $M\subset X$. 对 $\varepsilon>0$, 取 $F(\varepsilon/2)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是 $\varepsilon/2$ 稠密于 X. 对每一 $x\in M$, 存在 $x_i\in F(\varepsilon/2)$ 使 $\rho(x,x_i)<\varepsilon/2$. 这种 x_i 所成集记为 $\{x_{m_1},x_{m_2},\cdots,x_{m_l}\}$, 对每一 $j\leqslant l$, 任取 $x'_j\in M$ 使 $\rho(x'_j,x_{m_j})<\varepsilon/2$. 置 $F'=\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_l\}$, 下证 F' 是 ε 稠密于 M. 任取 $x\in M$, 因 $M\subset X$, 存在 $x_i\in F(\varepsilon/2)$ 使 $\rho(x,x_i)<\varepsilon/2$, 按这 x_i 就是某一个 x_{m_j}, 所以

$$\rho(x,x'_j)\leqslant\rho(x,x_{m_j})+\rho(x_{m_j},x_j)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

证完.

定理 4.2.2　设 (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$. 若空间 (M,ρ) 是全有界的, 则空间 $(\overline{M},\rho)$ 是全有界的.

证明　容易验证任一 $\varepsilon/2$ 稠密于 M 的有限集是 ε 稠密于 $\overline{M}$ 的. 证完.

定理 4.2.3　设 $\{(X_n,\rho_n)\}$ 是非空度量空间的序列, 且每一度量空间 (X_n,ρ_n) 的直径不大于 1. 对积集 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 给以定理 4.1.10 中的度量 ρ, 则 (X,ρ) 是全有界的当且仅当每一 (X_n,ρ_n) 是全有界的.

证明　设 (X,ρ) 是全有界的. 对每一 $m\in\mathbb{N}$, 令

$$X^*_m=\prod_{n=1}^{\infty}A_n,\text{其中 }A_m=X_m,\ A_n=\{x^*_n\}\text{是 }X_n\text{ 的某单点集}, n\neq m.$$

则子空间 X^*_m 是全有界的 (定理 4.2.1). 按 ρ 的定义 (定理 4.1.10), 对 $x^*,y^*\in X^*_m\subset X$, $\rho(x^*,y^*)=\rho_m(x,y)/2^m$, 这里 $x=p_m(x^*)$, $y=p_m(y^*)$. 所以, 如果有限集 F 是 $\varepsilon/2^m$ 稠密于 (X^*_m,ρ), 则 $p_m(F)$ 是 ε 稠密于 (X_m,ρ_m). 从而空间 (X_m,ρ_m) 是全有界的.

设每一 (X_n,ρ_n) 是全有界的. 对 $\varepsilon>0$, 取正整数 k 使 $1/2^k<\varepsilon/2$, 对每一 $n\leqslant k$, 有限集 $\{x^n_1,x^n_2,\cdots,x^n_{m(n)}\}$ 是 $\varepsilon/2$ 稠密于 X_n; 对每一 $n>k$, 任取点 $x^n_0\in X_n$. 置

$$F=\{y=(x^1_{j_1},x^2_{j_2},\cdots,x^k_{j_k},x^{k+1}_0,x^{k+2}_0,\cdots):1\leqslant j_n\leqslant m(n),\ n\leqslant k\},$$

则 F 是有限集. 下证 F 是 ε 稠密于 (X,ρ).

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是 X 中的任一点, 对每一 $n\leqslant k$, 存在 $j_n\leqslant m(n)$ 使 $\rho_n(x_n,x^n_{j_n})<\varepsilon/2$, 从而可取 F 中的点 $y=(x^1_{j_1},x^2_{j_2},\cdots,x^k_{j_k},x^{k+1}_0,x^{k+2}_0,\cdots)$, 得到

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}\rho_n(x_n,x^n_{j_n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho(x_n,x^n_0)\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以集 F 是 ε 稠密于 X. 证完.

上述定理是拓扑积的情况. 在拓扑和的情况, 只能限制在两两不相交的度量空间是有限个的情况. 设 $\{(X_\alpha,\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一族两两不相交的非空度量空间, 且每一

(X_α, ρ_α) 的直径不大于 1, 对 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 给以定理 4.1.11 中的度量 ρ, 则容易验证 $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ 是全有界的当且仅当每一 (X_α, ρ_α) 是全有界的, 且指标集 A 是有限集.

定理 4.2.4 设度量空间 (X, ρ) 的每一无限子集具有 ω 聚点, 则 (X, ρ) 是全有界的.

证明 这里要证对任一 $\varepsilon > 0$ 存在有限集 $F(\varepsilon)$ 使 $X = \bigcup_{x\in F(\varepsilon)} S_\varepsilon(x)$. 用反证法, 设对某一 $\varepsilon_0 > 0$, 命题不真, 即不存在有限集 $F(\varepsilon_0)$, 使 $X = \bigcup_{x\in F(\varepsilon_0)} S_{\varepsilon_0}(x)$. 任取 $x_1 \in X$, 则 $X \neq S_{\varepsilon_0}(x_1)$, 取 $x_2 \in X - S_{\varepsilon_0}(x_1)$, 由于 $X \neq \bigcup_{i=1}^2 S_{\varepsilon_0}(x_i)$, 继续下去, 可得无限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 由上述取法, 知 $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0 (i \neq j)$. 由假设这无限集有 ω 聚点 $x_0 \in X$, 则开球 $S_{\varepsilon_0/2}(x_0)$ 应包含 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 中无限个点. 设 $x_n, x_m \in S_{\varepsilon_0/2}(x_0)$, 则

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0.$$

这是矛盾的. 这一矛盾证明了 (X, ρ) 是全有界的. 证完.

推论 4.2.1 紧的度量空间是全有界的.

定义 4.2.2 度量空间 (X, ρ) 中的序列 $\{x_n\}$ 称为**柯西序列** (Cauchy sequence), 如果对任一 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k, 使当 $m, n \geqslant k$ 时, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

显然, 度量空间 (X, ρ) 中的收敛序列是这空间的柯西序列.

柯西序列依赖于空间中的度量. 对同一集 X 上的不同的度量 ρ, ρ', 纵然由 ρ, ρ' 导出相同的度量拓扑, 同一序列可以对度量 ρ 是柯西序列, 对另一度量 ρ' 不是柯西序列 (见例 4.2.1). 所以柯西序列不是拓扑不变量.

例 4.2.1 (柯西序列不是拓扑不变量) 考察数直线 $\mathbb{R}$ 中的正整数序列 $\{n\}$, 在 $\mathbb{R}$ 的通常度量 $\rho(x, y) = |x - y|$ 下, $\{n\}$ 显然不是柯西序列. 在 $\mathbb{R}$ 上定义另一度量

$$\rho'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

容易验证 $f(x) = x/(1 + |x|)$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $(-1, 1)$ 的同胚映射, 所以由 ρ, ρ' 导出的度量拓扑都是 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑. 由于

$$\rho'(n + l, n) = \left| \frac{n + l}{1 + n + l} - \frac{n}{1 + n} \right| = \frac{l}{(1 + n + l)(1 + n)} < \frac{1}{n},$$

所以对任一 $\varepsilon > 0$, 只要 $n > [1/\varepsilon] = k$ 时 ($[1/\varepsilon]$ 表示不超过 $1/\varepsilon$ 的最大整数), 对 $l = 1, 2, \cdots$, 都有 $\rho'(n + l, n) < \varepsilon$. 所以序列 $\{n\}$ 在度量 ρ' 下是柯西序列.

定理 4.2.5 如果度量空间 (X, ρ) 中的柯西序列有聚点 x_0, 则此序列收敛于 x_0.

证明 设 X 中的柯西序列 $\{x_n\}$ 具有聚点 x_0, 用 T_k 表示序列 $\{x_k, x_{k+1}, \cdots\}$ 中不同的点所成的集, 用 $d(T_k)$ 表示 T_k 的直径. 给定点 x_0 的 ε 开球 $S_\varepsilon(x_0)$. 由于

$\{x_n\}$ 是柯西序列, 可以取 k 充分大使 $d(T_k) < \varepsilon/2$. 因 x_0 是 $\{x_n\}$ 的聚点, x_0 的任何邻域与 T_k 相交, 特别 $S_{\varepsilon/2}(x_0) \cap T_k \neq \varnothing$, 从而得 $T_k \subset S_\varepsilon(x_0)$, 即 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 证完.

由定理 4.2.5, 定理 4.1.8, 得下述推论.

推论 4.2.2　度量空间的柯西序列或者收敛, 或者没有收敛子序列.

定义 4.2.3　度量空间 (X, ρ) 称为**完全度量空间** (complete metric space), 如果这空间中的每一柯西序列是收敛的.

分析学中的 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$、连续函数空间、希尔伯特空间、勒贝格平方可积函数空间等都是完全度量空间.

在 $\mathbb{R}$ 的通常度量下, 序列 $\{n/(n+1)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中, 也是 $(-1,1)$ 中的柯西序列. 这序列在 $\mathbb{R}$ 中收敛, 在 $(-1,1)$ 中不收敛, 而 $\mathbb{R}$ 是同胚于 $(-1,1)$ 的, 所以度量空间的完全性不是拓扑不变量. 这里也说明了完全度量空间的子空间未必是完全度量空间.

例 4.2.2 (连续函数空间)　考察连续函数空间 $C[0,1]$. 对定义在 $[0,1]$ 上的任意两个实值连续函数 $x(t)$, $y(t)$, 规定度量 $\rho(x,y) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$ 后, $C[0,1]$ 形成度量空间 (习题 4.1). 设 $\{x_n\}$ 是空间 $C[0,1]$ 中的任一柯西序列, 按上述度量, $\{x_n\}$ 是柯西序列等价于连续函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 由分析学中的定理: "一致收敛的连续函数序列的极限函数是连续的", 可设 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于连续函数 $x_0(t)$, $x_0 \in C[0,1]$. 也就是 $\{x_n\}$ 在上述度量意义下收敛于 x_0, 所以连续函数空间 $C[0,1]$ 是完全度量空间.

例 4.2.3 (希尔伯特空间)　在例 4.1.1 中已知希尔伯特空间 l_2 是度量空间, 下面证明它的完全性.

设 $\{x^{(n)}\}$ 是空间 l_2 中的任一柯西序列, 这里

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 i, 使当 $m, n > i$ 时,

$$(\rho(x^{(m)}, x^{(n)}))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon. \tag{4.2.1}$$

从而对任一固定的 k, $(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon$, 这说明实数序列 $\{x_k^{(n)}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的柯西序列, 因 $\mathbb{R}$ 是完全度量空间, 所以 $\{x_k^{(n)}\}$ 收敛于某实数 x_k. 置 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$, 需要证明:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, 即 $x \in l_2$;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$.

为此把 (4.2.1) 式改写为如下形式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(m)}-x_k^{(n)})^2=\sum_{k=1}^{j}(x_k^{(m)}-x_k^{(n)})^2+\sum_{k=j+1}^{\infty}(x_k^{(m)}-x_k^{(n)})^2<\varepsilon,$$

其中 j 是任意的. 由于这两个和数都不是负数, 其中每一个和数小于 ε, 故有

$$\sum_{k=1}^{j}(x_k^{(m)}-x_k^{(n)})^2<\varepsilon.$$

在上式中, 固定 n, 让 $m\to\infty$, 则有

$$\sum_{k=1}^{j}(x_k-x_k^{(n)})^2\leqslant\varepsilon.$$

由于此不等式对任意 j 成立, 让 $j\to\infty$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_k^{(n)})^2\leqslant\varepsilon. \tag{4.2.2}$$

由于 (利用不等式 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_0}x_k^2&=\sum_{k=1}^{k_0}(x_k-x_k^{(n)}+x_k^{(n)})^2\\&\leqslant 2\sum_{k=1}^{k_0}(x_k-x_k^{(n)})^2+2\sum_{k=1}^{k_0}(x_k^{(n)})^2,\end{aligned}$$

其中 k_0 是任意的, 在 $k_0\to\infty$ 时, 由 (4.2.2) 式及 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2$ 是收敛的 (因为 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)\in l_2$), 可以推知 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2$ 是收敛的, 这就是说 $x\in l_2$, 到此证明了 (i). 其次, 由于 (4.2.2) 式中的 ε 可以任意小, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x,x^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_k^{(n)})^2}=0.$$

这就是说, 在 l_2 空间的度量 ρ 下, $x^{(n)}\to x$, 到此证明了 (ii).

综上所述, 证明了 l_2 中的柯西序列 $\{x^{(n)}\}$ 收敛, l_2 是完全度量空间. 证完.

定理 4.2.6 度量空间 (X,ρ) 是紧的当且仅当 (X,ρ) 是完全的且全有界的.

证明 必要性. 设 (X,ρ) 是紧的度量空间, 由推论 4.2.1, (X,ρ) 是全有界的. 由定理 4.2.5, 空间 (X,ρ) 中的柯西序列如有收敛子序列, 则这柯西序列收敛. 由于

紧度量空间是序列式紧的 (任何序列有收敛子序列), 所以这空间每一柯西序列收敛, 从而 (X,ρ) 是完全的.

充分性. 设度量空间 (X,ρ) 是完全的, 且全有界的, 下面证明空间 (X,ρ) 是序列式紧的, 从而也是紧的 (定理 4.1.8).

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的任一序列. 下面将利用全有界性, 由 $\{x_n\}$ 出发构造 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $\{x_{n_k}\}$ 是柯西序列, 从而由空间 (X,ρ) 的完全性知此子序列 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛的.

由空间 (X,ρ) 的全有界性知, 存在有限个半径为 1 的开球覆盖 X. 这有限个开球中至少有一个开球 S_1 包含序列 $\{x_n\}$ 中无限个 x_n, 设被包含在 S_1 中的 x_n 的下标 n 所成集为 N_1, 则 N_1 是无限集, $n\in N_1$ 时, $x_n\in S_1$. 再用有限个半径为 $1/2$ 的开球覆盖 X. 在这有限个开球中至少有一个开球 S_2 及必有 N_1 的无限子集 N_2 $(N_2\subset N_1)$ 存在 (因 N_1 是无限集), 使 $n\in N_2$ 时, $x_n\in S_2$. 一般地说, 取定了正整数集的无限子集 N_k, 可以选取半径为 $1/(k+1)$ 的开球 S_{k+1} 及无限集 $N_{k+1}\subset N_k$, 使 $n\in N_{k+1}$ 时, $x_n\in S_{k+1}$.

取 $n_1\in N_1$, $n_2\in N_2$, 使 $n_2>n_1$. 一般地说, n_k 已取定, 取 $n_{k+1}\in N_{k+1}$, 使 $n_{k+1}>n_k$. 由于每一 N_k 是无限集, 所以上述取法可以完成. 对 $i,j\geqslant k$, n_i,n_j 都属于 N_k (因 $N_1\supset N_2\supset\cdots\supset N_k\supset\cdots$), 于是 x_{n_i},x_{n_j} 都属于半径为 $1/k$ 的开球. 从而知 $\{x_{n_k}\}$ 是一柯西序列. 证完.

定理 4.2.7 (Cantor 定理 [237]) 度量空间是完全的, 当且仅当对这空间的任何满足条件: (i) $F_{n+1}\subset F_n$ $(n\in\mathbb{N})$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ 的非空闭集序列 $\{F_n\}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ 是一单点集.

证明 必要性. 设 (X,ρ) 是完全度量空间, $\{F_n\}$ 是满足条件 (i), (ii) 的非空闭集序列. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in F_n$, 下证序列 $\{x_n\}$ 是柯西序列. 由 (ii), 对 $\varepsilon>0$, 可选取正整数 n_ε, 使 $n>n_\varepsilon$ 时, $d(F_n)<\varepsilon$; 由 (i), 当 $n\geqslant m>n_\varepsilon$ 时, 有 $x_n\in F_n\subset F_m$, 又因 $x_m\in F_m$, 所以

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant d(F_m)<\varepsilon.$$

从而 $\{x_n\}$ 是柯西序列. 因 (X,ρ) 是完全的, $\{x_n\}$ 收敛于某一点 $x_0\in X$, 于是点 x_0 的任何邻域与 F_n $(n=1,2,\cdots)$ 相交. F_n 是闭集, 所以 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$.

现证只有一点 x_0 属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 也就是 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\{x_0\}$. 如有 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 由 (ii), 对 $\varepsilon>0$, 取正整数 n_ε 使 $n>n_\varepsilon$ 时, 有 $d(F_n)<\varepsilon$, 从而

$$x_0,y\in F_n,\ \ \rho(x_0,y)\leqslant d(F_n)<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, $\rho(x_0,y)=0$, 所以 $y=x_0$.

充分性. 设 $\{x_n\}$ 是 (X,ρ) 中的柯西序列. 对每一正整数 k, 存在正整数 n_k, 当 $n \geqslant n_k$ 时有 $\rho(x_{n_k},x_n) < 1/2^k$, 我们可以设此 n_k 是具有上述性质的最小正整数, 从而有 $n_k \leqslant n_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$. 构造如下的闭集序列 $\{F_k\}$, 置

$$F_k = \overline{S_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})}\ (k=1,2,\cdots),$$

这里 $S_{1/2^{k-1}}(x_{n_k}) = \{y:\rho(y,x_{n_k}) < 1/2^{k-1}\}$. 从而 $d(F_k) \leqslant 1/2^{k-2}(k=1,2,\cdots)$, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} d(F_k)=0$ (满足条件 (ii)).

设 $y \in F_{k+1}$, 则由 n_k 的选取法, 有

$$\rho(y,x_{n_{k+1}}) \leqslant 1/2^k,\ \rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}}) < 1/2^k,$$

所以

$$\rho(y,x_{n_k}) \leqslant \rho(y,x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}}) < 1/2^k + 1/2^k = 1/2^{k-1},$$

即 $y\in F_k$, 于是 $F_{k+1}\subset F_k$ $(k=1,2,\cdots)$ (满足条件 (i)).

由假设, 应有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ 是一单点集. 下证柯西序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 对任意 $\varepsilon>0$, 选取正整数 k 使 $1/2^{k-2}<\varepsilon$, 则在 $n>n_k$ 时, $\rho(x_{n_k},x_n)<1/2^k$. 此外, 有 $x_0\in F_k$, $\rho(x_{n_k},x_0)\leqslant 1/2^{k-1}$, 从而

$$\begin{aligned}\rho(x_0,x_n) &\leqslant \rho(x_0,x_{n_k}) + \rho(x_{n_k},x_n)\\ &< \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-2}} < \varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 故 (X,ρ) 是完全度量空间. 证完.

定理 4.2.8 设 (X,ρ) 是度量空间, $M\subset X$ 且子空间 (M,ρ) 是完全的, 则 M 闭于 X.

证明 设 $x\in\overline{M}$, 置 $F_k = M\cap\overline{S_{1/k}(x)}(k=1,2,\cdots)$, 则 $\{F_k\}$ 是子空间 M 的非空闭集序列, 容易验证满足 Cantor 定理中的条件 (i), (ii). 因子空间 (M,ρ) 是完全的, 由 Cantor 定理, $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ 是一单点集. 显然, $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \{x\}$, 从而 $x\in M$. 所以 $\overline{M}=M$. 证完.

定理 4.2.9 完全度量空间 (X,ρ) 的子空间 (M,ρ) 是完全的当且仅当 M 闭于 X.

证明 必要性由定理 4.2.8 得证. 下证充分性. 设 M 是闭集, 度量空间 (M,ρ) 的每一柯西序列也是完全度量空间 (X,ρ) 中的柯西序列, 故收敛于某一点 $x\in X$. 因 M 闭于 X, 故 $x\in M$. 证完.

定理 4.2.10 设 $\{(X_n,\rho_n)\}$ 是非空度量空间的序列, 且每一度量空间 (X_n,ρ_n) 的直径不大于 1. 对积集 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 给以定理 4.1.10 中的度量 ρ, 则 (X,ρ) 是完全的当且仅当每一 (X_n,ρ_n) 是完全的.

证明 设 (X,ρ) 是完全的. 对每一 $m\in\mathbb{N}$, 子空间 $X_m^*=\prod_{n=1}^{\infty}A_n$ (其中 $A_m=X_m$, $A_n=\{x_n^*\}$ 是 X_n 的某单点集, $n\neq m$) 是完全的 (定理 4.2.9). 容易验证 $p_m^*=p_m|_{X_m^*}:X_m^*\to X_m$ 是同胚映射, 且对 (X_m,ρ_m) 中的每一柯西序列 $\{x_n\}$, $\{p_m^{*-1}(x_n)\}$ 是 X_m^* 中的柯西序列. 此序列 $\{p_m^{*-1}(x_n)\}$ 的极限的像是序列 $\{x_n\}$ 的极限. 所以 (X_m,ρ_m) 是完全的.

设每一 (X_n,ρ_n) 是完全的. 设 $\{(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 (X,ρ) 中的柯西序列, 这里记积空间 X 中序列的第 i 项为 $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, 则对 $n=1,2,\cdots,\{x_n^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 (X_n,ρ_n) 中的柯西序列, 从而收敛于点 $x_n^0\in X_n$. 由定理 2.1.4 的相应于网的论述 (见习题 2.32), 序列 $\{(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于点 $x^0=(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}}\in X$. 所以 (X,ρ) 是完全的. 证完.

上述情况是拓扑积情况, 关于拓扑和, 读者容易验证下述结果.

定理 4.2.11 设 $\{(X_\alpha,\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一族两两不相交的度量空间, 且每一 (X_α,ρ_α) 的直径不大于 1. 对 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 给以定理 4.1.11 中的度量 ρ, 则 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是完全的当且仅当每一 (X_α,ρ_α) 是完全的.

下面定理给出完全度量空间的一种有趣性质.

定理 4.2.12 (贝尔定理 [181]) 完全度量空间中的可数个开的稠密子集的交是稠密子集.

证明 设 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, 每一 A_n 是完全度量空间 (X,ρ) 中的开稠密子集, 要证 A 是 X 中的稠密子集, 也就是要证: 设 U 是 X 中的任一不空开集, 则 $A\cap U\neq\varnothing$. 为此, 在下面构造满足 Cantor 定理 (定理 4.2.7) 中的条件 (i), (ii) 的非空闭集序列 $\{F_n\}$, 使 $F_n\subset A_n\cap U$, $n\in\mathbb{N}$, 由 Cantor 定理得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$, 从而

$$A\cap U=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap U=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap U)\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing,$$

即得 A 稠密于 X.

下面构造上述闭集序列 $\{F_n\}$. 因为 A_1 稠密于 X, U 是不空开集, 所以 $A_1\cap U\neq\varnothing$. 取 $x_1\in A_1\cap U$, 因为 $A_1\cap U$ 是开集, 存在 ε_1 满足 $0<\varepsilon_1<1/2^2$, 使 $\overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)}\subset A_1\cap U$. 因为 A_2 稠密于 X, $S_{\varepsilon_1}(x_1)$ 是开集, 所以 $A_2\cap S_{\varepsilon_1}(x_1)\neq\varnothing$. 取 $x_2\in A_2\cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$, 因为 $A_2\cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$ 是开集, 存在 ε_2 满足 $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$, 使 $\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)}\subset A_2\cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$. 显然, $\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)}\subset\overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)}$ 且 $\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)}\subset A_2\cap U$. 这样继续下去, 可得闭集序列 $\{F_n\}=\{\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)}\}$ 满足 $F_{n+1}\subset F_n$ 及 $d(F_n)\leqslant 1/2^n$ $(n=1,2,\cdots)$, 即满足 Cantor 定理的条件 (i), (ii). 此外, 显然有 $F_n\subset A_n\cap U$ $(n=1,2,\cdots)$, 所以 $\{F_n\}$ 是所要构造的闭集序列. 从而定理得证. 证完.

上述贝尔定理中的性质不仅为完全度量空间所具有, 如 T_2 局部紧空间也有这样的性质. 读者可以自己证明这一论断 (习题 4.18), 证法是类似的. 此外, 可以用此性质定义一类空间: 拓扑空间 X 称为**贝尔空间** (Baire space), 如果空间 X 的可

数个稠密开子集的交是稠密的. 定理 4.2.12 可重述为完全度量空间是贝尔空间.

推论 4.2.3 完全度量空间是第二纲集.

证明 只要证明完全度量空间 (X,ρ) 不是第一纲集 (定义 1.3.4). 设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是任一第一纲集, 这里每一 A_n 是无处稠密子集. 由于

$$X - A = X - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \supset X - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{A}_n),$$

这里 $X - \overline{A}_n$ 是稠密的开子集 (习题 4.10), 由贝尔定理,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{A}_n) \neq \varnothing.$$

所以 $X - A \neq \varnothing$. 证完.

上述推论的证明表明: 贝尔空间是第二纲集.

4.3 度量化定理

度量空间 (X,ρ) 的度量 ρ 导出 X 上的度量拓扑 $\mathscr{T}$, 从而得到拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$. 在上述意义下, 度量空间是特殊类型的拓扑空间. 此类空间应用很大, 且可以用开球之集表示它的基, 在论证中带来很大的直观性. 因此, 自然会提出如下问题: 怎样的拓扑空间存在相应的度量, 使由此度量导出的度量拓扑正好是原来的拓扑? 这就是拓扑空间的**可度量化问题** (metrizable problem).

在本节中, 先叙述具有可数基的拓扑空间的可度量化定理, 然后叙述一般的拓扑空间的可度量化定理.

定义 4.3.1 拓扑空间 X 称为**可度量化的** (metrizable), 如果在 X 上存在度量 ρ, 使由 ρ 导出的度量拓扑就是 X 上的拓扑.

定理 4.3.1 (Urysohn 度量化定理[404]) 具有可数基的正则空间同胚于希尔伯特立方体 I^{ω} (见例 2.1.3) 的子集, 从而可度量化.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是正则空间 X 的可数基, 取 $\mathscr{U}$ 中的元素对 (U,V), 使 $\overline{U} \subset V$. 所有这种元素对 (U,V) 所成的集显然是可数的, 因此可以记为

$$\{(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots,(U_n,V_n),\cdots\}.$$

因 X 是正规的 (定理 2.3.3 和定理 2.3.4), 由 Urysohn 引理 (定理 2.4.1), 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 可以定义连续函数 $f_n : X \to [0,1]$ 使

$$f_n(x) = 0,\ x \in \overline{U}_n; \quad f_n(x) = 1,\ x \in X - V_n.$$

定义 $f: X \to I^\omega$ 使

$$f(x) = \left\{ f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \cdots, \frac{1}{n}f_n(x), \cdots \right\}.$$

显然, f 是连续的 (定理 2.1.2).

下证 f 是单映射 (即 $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$). 因 X 是 T_1 的, 存在 x 的开邻域 $W(x)$, 使不包含 x'. 由正则性, 可找到基 $\mathscr{U}$ 中元素对 (U_n, V_n) 使 $x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset V_n \subset W(x)$, 从而 $f_n(x) = 0$, $f_n(x') = 1$. 所以 $f(x) \neq f(x')$.

下证 f^{-1} 是连续映射. 设 $W(x)$ 是空间 X 的任一点 x 的任一开邻域. 由上述证明可知, 若 $x'' \notin W(x)$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得希尔伯特空间的度量 $\rho(f(x), f(x'')) \geqslant 1/n$①, 这说明

$$f^{-1}(S_{1/n}(f(x))) \subset W(x),$$

这里开球 $S_{1/n}(f(x)) = \{f(x''): \rho(f(x), f(x'')) < 1/n\}$. 所以 f^{-1} 是连续的.

到此证明了 f 是 X 到 I^ω 的子集上的同胚映射. 由于 I^ω 是度量空间, 所以空间 X 可度量化. 证完.

Smirnov 删除序列拓扑空间 (例 1.2.1 和例 2.2.2) 表明 Urysohn 度量化定理中的正则性条件是重要的.

定理 4.3.2 在拓扑空间 X, 下列论断等价:

(i) X 是正则空间且具有可数基;

(ii) X 同胚于希尔伯特立方体 I^ω 的某一子集;

(iii) X 可度量化且是可分的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 即定理 4.3.1; (ii) $\Rightarrow$ (iii), I^ω 是度量空间, 每一闭区间 $[0, 1/n]$ 具有可数基, 而可数个具有可数基的空间的积具有可数基 (习题 2.17), 所以 I^ω 具有可数基, 从而是可分的 (定理 2.3.2); (iii) $\Rightarrow$ (i), 度量空间是正则的 (定理 4.1.5), 可分的度量空间具有可数基 (定理 4.1.7). 证完.

上面叙述的是经典的 Urysohn 度量化定理. 它的条件比较简单, 应用方便. 虽然条件稍强一些, 所得的结果也较强, 不仅是度量空间而且是可分的. 在这些意义下, 可以说 Urysohn 定理部分地解决了拓扑空间的可度量化问题. 下面的 Nagata-Smirnov 度量化定理, Bing 度量化定理比较完善地解决了此问题. 在这些定理中分别用 σ 局部有限基、σ 离散基代替 Urysohn 定理中的可数基.

在 3.5 节定义仿紧空间 (定义 3.5.5) 前, 曾引入局部有限覆盖概念. 习题 2.29 中介绍了离散集族的概念. 一般地说, 集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 称为是离散的 (局部有限的), 如果对每一 $x \in X$ 存在 x 的邻域 $U(x)$ 使 $U(x) \cap U_\alpha \neq \varnothing$ 至多一个 $\alpha \in A$

① 严格地说, 要用希尔伯特立方体的形如定理 4.1.10 中的度量, 这时 $\rho(f(x), f(x'') \geqslant 1/(2^n n)$; 然而此度量与希尔伯特空间的度量所导出的拓扑是相同的, 见定理 4.1.10 后的说明.

(仅对有限个 $\alpha \in A$) 成立. 显然, 离散集族是局部有限的. 如果集族是可数个离散 (局部有限) 集族的并, 也就是 $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$, 每一 $\mathscr{U}_n$ 是离散的 (局部有限的), 则称 $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 是 σ 离散的 (σ 局部有限的). 显然, 可数集族是 σ 离散的.

在叙述这两个著名的度量化定理之前, 先引入度量空间理论中最重要的定理之一 —— Stone 定理. 1948 年, A. H. Stone[374] 证明了一个非常重要的结果, 由此结果可以推得度量空间是仿紧的. 下面定理 4.3.3 的证明是用开球体现 Stone 的证法. Stone 的这一证法是非常精美的.

定理 4.3.3 (Stone 定理[374]) 度量空间的每一开覆盖具有开的加细覆盖, 它同时是 σ 离散的及局部有限的.

证明 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是度量空间 (X,ρ) 的开覆盖. 对每一 $\alpha \in A$, 置

$$U_{\alpha,n} = \{x : D(x, X - U_\alpha) \geqslant 1/2^n\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{4.3.1}$$

则 $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha,n}$. 当 $x \in U_{\alpha,n}$, $y \notin U_{\alpha,n+1}$ 时, 由 (4.3.1)

$$D(x, X - U_\alpha) - D(y, X - U_\alpha) > 1/2^n - 1/2^{n+1} = 1/2^{n+1},$$

从而 (利用不等式 $|D(x,A) - D(y,A)| \leqslant \rho(x,y)$) 得

$$x \in U_{\alpha,n},\ y \notin U_{\alpha,n+1} \Rightarrow \rho(x,y) \geqslant 1/2^{n+1}. \tag{4.3.2}$$

把指标集 A 良序化 (见 0.3 节的 Zermelo 定理), 置

$$U^*_{\alpha,n} = U_{\alpha,n} - \cup\{U_{\beta,n+1} : \beta < \alpha, \beta \in A\},\ \alpha \in A;\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.3}$$

对任意不同的 $\alpha, \alpha' \in A$, 按 $\alpha < \alpha'$ 或 $\alpha' < \alpha$, 由 (4.3.3) 可得

$$U^*_{\alpha',n} \subset X - U_{\alpha,n+1} \text{ 或 } U^*_{\alpha,n} \subset X - U_{\alpha',n+1}. \tag{4.3.4}$$

如果 $x \in U^*_{\alpha,n}$, $y \in U^*_{\alpha',n}$, 则当 $\alpha < \alpha'$ 时, 由 (4.3.3), $x \in U^*_{\alpha,n} \Rightarrow x \in U_{\alpha,n}$, 由 (4.3.4) 的前式, $y \in U^*_{\alpha',n} \Rightarrow y \notin U_{\alpha,n+1}$; 当 $\alpha' < \alpha$ 时, 类似地 [由 (4.3.3) 及 (4.3.4) 的后式] 可得 $y \in U_{\alpha',n}$, $x \notin U_{\alpha',n+1}$. 不论 $\alpha < \alpha'$ 或 $\alpha' < \alpha$, 由 (4.3.2) 得 $\rho(x,y) \geqslant 1/2^{n+1}$, 故有

$$D(U^*_{\alpha,n}, U^*_{\alpha',n}) \geqslant 1/2^{n+1}. \tag{4.3.5}$$

此外, 易证

$$\cup\{U^*_{\alpha,n} : \alpha \in A,\ n \in \mathbb{N}\} = X. \tag{4.3.6}$$

置

$$U^+_{\alpha,n} = \{x : D(x, U^*_{\alpha,n}) < 1/2^{n+4}\},$$

$$U_{\alpha,n}^{\sim}=\{x:D(x,U_{\alpha,n}^{*})<1/2^{n+3}\}. \tag{4.3.7}$$

显然,

$$U_{\alpha,n}^{*}\subset U_{\alpha,n}^{+}\subset U_{\alpha,n}^{+-}\subset U_{\alpha,n}^{\sim}\subset U_{\alpha}. \tag{4.3.8}$$

由 (4.3.5), (4.3.7) 及三角不等式, 易证对任意 $\alpha,\alpha'\in A$, $\alpha\neq\alpha'$,

$$D(U_{\alpha,n}^{\sim},U_{\alpha',n}^{\sim})\geqslant 1/2^{n+2}. \tag{4.3.9}$$

到此, 由 (4.3.9) 及 (4.3.6) 可知 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_{\alpha,\,n}^{\sim}:\alpha\in A\}$ 已是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细覆盖. 为了得到同时又是局部有限的 σ 离散开加细覆盖, 可置

$$F_n=\bigcup_{\alpha\in A}U_{\alpha,n}^{+-},\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.3.10}$$

由于对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\{U_{\alpha,n}^{\sim}:\alpha\in A\}$ 是离散的及 (4.3.8) 知 F_n 是闭集, 置

$$W_{\alpha,1}=U_{\alpha,1}^{\sim},\ W_{\alpha,n}=U_{\alpha,n}^{\sim}-\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i\ (n\geqslant 2), \tag{4.3.11}$$

则 $W_{\alpha,n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是开集. 下证

$$\cup\{W_{\alpha,n}:\alpha\in A,\ n\in\mathbb{N}\}=X.$$

由 (4.3.6) 及 (4.3.8), $\cup\{U_{\alpha,n}^{+-}:n\in\mathbb{N},\ \alpha\in A\}=X$. 对每一 $x\in X$, 设 m 是使 $x\in U_{\alpha,m}^{+-}$ 的最小的正整数. 由 (4.3.8), $x\in U_{\alpha,m}^{\sim}$, 由 (4.3.10), $x\notin F_n$ $(n=1,2,\cdots,m-1)$, 由 (4.3.11), $x\in W_{\alpha,m}$.

现证 $\{W_{\alpha,n}:\alpha\in A,\ n\in\mathbb{N}\}$ 是局部有限且 σ 离散的. 对每一 $x\in X$, 由 (4.3.6), $x\in$ 某 U_{α_0,n_0}^{*}, 由 (4.3.7)

$$S_{1/2^{n_0+4}}(x)\subset U_{\alpha_0,n_0}^{+}\subset U_{\alpha_0,n_0}^{+-}\subset F_{n_0}.$$

所以对 $n>n_0$, $S_{1/2^{n_0+4}}(x)\cap W_{\alpha,n}=\varnothing$ $(\alpha\in A)$; 对 $n\leqslant n_0$, 由 (4.3.9), $S_{1/2^{n+3}}(x)$ 至多与一个 $U_{\alpha,n}^{\sim}$ 相交, 而

$$S_{1/2^{n_0+4}}(x)\subset S_{1/2^{n+3}}(x),\ W_{\alpha,n}\subset U_{\alpha,n}^{\sim},$$

故对 $n\leqslant n_0$, $S_{1/2^{n_0+4}}(x)$ 至多与一个 $W_{\alpha,n}$ 相交. 所以开覆盖 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{W_{\alpha,n}:\alpha\in A\}$ 是 σ 离散的. 由于 $S_{1/2^{n_0+4}}(x)$ 仅与 $\mathscr{W}$ 中的至多 n_0 个元素相交, 故 $\mathscr{W}$ 是局部有限的. 显然, $W_{\alpha,n}\subset U_\alpha$, $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

注记　定理 4.3.3 对伪度量空间也成立.

由上述定理及仿紧空间的定义 (定义 3.5.5), 得下述重要定理.

定理 4.3.4 度量空间是仿紧空间.

由于紧空间是仿紧空间, 结合定理 4.3.4, 仿紧空间类包含两大类重要的拓扑空间: 紧空间类和度量空间类. 这奠定了仿紧空间在一般拓扑学中及其他有关学科中的重要地位. 在第 5 章中, 将对仿紧空间做较多的介绍.

在度量空间 (X,ρ) 中, 对每一个 $n\in\mathbb{N}$, 开球族 $\mathscr{U}_n=\{S_{1/n}(x):x\in X\}$ 覆盖 X. 由定理 4.3.3, $\mathscr{U}_n$ 具有 σ 离散开加细覆盖 $\mathscr{V}_n$, 可以证明 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$ 是 X 的 σ 离散基 (定理 4.3.5). 但当验证 $\mathscr{V}$ 是基时, 对每一 $x\in X$ 及每一包含点 x 的开集 U, 存在 $S_{1/n}(x)\subset U$, 至于是否存在 $\mathscr{V}_n$ 中包含点 x 的元素 V, 使 $V\subset S_{1/n}(x)$, 由 $\mathscr{V}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$ 的定义不能保证上述包含关系. 为此引入如下概念.

设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的覆盖 (集族), 对 $x\in X$, 记 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U})=\cup\{U:U\in\mathscr{U},\ x\in X\}$; 对 $A\subset X$, 记 $\mathrm{st}(A,\mathscr{U})=\cup\{U:U\in\mathscr{U},\ U\cap A\neq\varnothing\}$.

定义 4.3.2 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖. 开覆盖 $\mathscr{V}$ 称为**点星加细** [184] (point-star refines) $\mathscr{U}$, 如果 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{V}):x\in X\}$ 加细 $\mathscr{U}$; 称为**星加细** [398] (star refines) $\mathscr{U}$, 如果 $\{\mathrm{st}(V,\mathscr{V}):V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$.

定理 4.3.5 度量空间具有 σ 离散基.

证明 设 (X,ρ) 是度量空间. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{S_{1/2^n}(x):x\in X\}$. 显然, 对每一 $x\in X$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset S_{1/n}(x)$①. 由定理 4.3.3, $\mathscr{U}_n$ 具有 σ 离散开加细覆盖 $\mathscr{V}_n$. 由于 $\mathscr{V}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 对每一 $x\in X$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 对每一 $x\in X$ 及每一包含 x 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in S_{1/n}(x)\subset U$, 取 $\mathscr{V}_n$ 中任一包含点 x 的开集 V, 则 $V\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset S_{1/n}(x)$, 所以 $x\in V\subset U$. 因此 $\mathscr{V}$ 是 X 的 σ 离散基. 证完.

在 Uyrsohn 度量化定理 (定理 4.3.1) 证明中, 首先由 Tychonoff 定理 (定理 2.3.4) 得到正规性, 为了证明下述 Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6), 这里类似地仿照 Tychonoff 定理的证法建立下述引理.

引理 4.3.1 具有 σ 局部有限基的正则空间是正规空间.

证明 设 X 是正则空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基. 设 A,B 是不相交的闭集. 由正则性, 对每一 $x\in A$, 存在 $\mathscr{B}$ 中的开集 U_x 使 $x\in U_x$ 且 $\overline{U}_x\cap B=\varnothing$, 置 $\mathscr{U}=\{U_x:x\in A\}$, $\mathscr{U}$ 覆盖 A. 类似地可得 $\mathscr{V}=\{V_y:y\in B\}$ 覆盖 B, 这里 $y\in V_y$, $V_y\in\mathscr{B}$ 且 $\overline{V}_y\cap A=\varnothing$. 由于 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 中的元都取自 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$, 可写成 $\mathscr{U}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_n$, $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 这里 $\mathscr{U}_n$, $\mathscr{V}_n$ 都是局部有限的, 置

$$U_n=\cup\{U:U\in\mathscr{U}_n\},\ V_n=\cup\{V:V\in\mathscr{V}_n\}.$$

① 若置 $\mathscr{U}_n'=\{S_{1/n}(x):x\in X\}$, 此式说明 $\mathscr{U}_n$ 点星加细 $\mathscr{U}_n'$.

由局部有限性 (引理 3.5.2),

$$\overline{U}_n = \cup\{\overline{U} : U \in \mathscr{U}_n\},\ \overline{V}_n = \cup\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}_n\}.$$

所以 $\overline{U}_n$ 与 B 不交, $\overline{V}_n$ 与 A 不交 $(n \in \mathbb{N})$ (以下证法同定理 2.3.4), 置

$$U'_n = U_n - \cup\{\overline{V}_k : k \leqslant n\},\ V'_n = V_n - \cup\{\overline{U}_k : k \leqslant n\},$$

则

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n,\ V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n$$

是分别包含 A, B 两不相交的开集. 证完.

下面要引用本章开始时引入的伪度量.

引理 4.3.2　设 $(X, \mathscr{T})$ 是 T_0 空间, $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 上的可数个伪度量. 每一 $\rho_n(x,y) \leqslant 1$ $(x,\ y \in X)$ 且满足如下条件:

(i) 每一 $\rho_n : X \times X \to \mathbb{R}$ 是连续函数 (关于 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$);

(ii) 对每一 $x \in X$, 每一不空的闭集 $A \subset X$ 使 $x \notin A$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使

$$D_n(x, A) = \inf\{\rho_n(x,a) : a \in A\} > 0,$$

则空间 X 可度量化且 X 上的度量

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x,y)$$

导出的度量拓扑重合于 $\mathscr{T}$.

证明　先证 $\rho(x,y)$ 是集 X 上的度量. 显然满足度量公理的 (M2) 和 (M3) 且 $\rho(x,x) = 0$ $(x \in X)$. 因 X 是 T_0 空间, 对不同的点 $x, y \in X$, 或者 $x \notin \overline{\{y\}}$, 或者 $y \notin \overline{\{x\}}$ (定理 2.2.1). 如 $x \notin \overline{\{y\}}$, 由 (ii) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使

$$D_n(x, \overline{\{y\}}) = \inf\{\rho_n(x,a) : a \in \overline{\{y\}}\} > 0.$$

从而 $\rho_n(x,y) > 0$, $\rho(x,y) > 0$. 所以 ρ 是集 X 上的度量.

现证 ρ 导出的度量拓扑就是 $\mathscr{T}$. 由定理 4.1.4, 只要证明

$$D(x, A) = 0 \text{ 当且仅当 } x \in \overline{A},$$

按定理 4.1.4, $\overline{A} = \{x : D(x,A) = 0\}$ 中的 $\overline{A}$ 是关于集 X 上的度量 ρ 所导出的度量拓扑的闭包, 而上式的 $\overline{A}$ 是关于空间 $(X, \mathscr{T})$ 的闭包.

设 $x \notin \overline{A}$, 则由 (ii) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $D_n(x,\overline{A}) = r > 0$, 从而

$$D(x,A) \geqslant D(x,\overline{A}) \geqslant r/2^n > 0.$$

相反, 由 (i) 每一伪度量 $\rho_n : X \times X \to \mathbb{R}$ (关于 $(X,\mathscr{T})$) 连续, 从而 ρ 也连续 (由一致收敛性). 从而由定理 4.1.3 的证明知 $f(x) = D(x,A)$ 在 $(X,\mathscr{T})$ 上连续. 所以, 设 $x \in \overline{A}$, 则 $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \{0\}$ (按 $x \in A \Rightarrow D(x,A) = 0$, 所以 $f(A) = \{0\}$). 这就是 $D(x,A) = 0$. 证完.

定理 4.3.6 (Nagata-Smirnov 度量化定理[315, 364]) 拓扑空间 X 可度量化, 当且仅当 X 是正则的且具有 σ 局部有限基.

证明 必要性的证明可由定理 4.1.5 和定理 4.3.5 得到, 因为离散集族是局部有限的. 下证充分性.

设正则空间 X 具有基 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$, $\mathscr{B}_n = \{B_{\alpha_n}\}_{\alpha_n \in A_n}$ 是局部有限的. 对每一对正整数 n, m 及每一 $\alpha_n \in A_n$, 置

$$V_{\alpha_n,m} = \cup\{B_{\alpha_m} : B_{\alpha_m} \in \mathscr{B}_m,\ \overline{B}_{\alpha_m} \subset B_{\alpha_n}\}. \tag{4.3.12}$$

由局部有限性, $\overline{V}_{\alpha_n,m} \subset B_{\alpha_n}$. 由引理 4.3.1, X 是正规的. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $f_{\alpha_n,m} : X \to [0,1]$ 使 $f_{\alpha_n,m}(X - B_{\alpha_n}) \subset \{0\}$, $f_{\alpha_n,m}(\overline{V}_{\alpha_n,m}) \subset \{1\}$. 由 $\mathscr{B}_n$ 的局部有限性, 对每一点 $x \in X$ 存在开邻域 $U(x)$ 及有限集 $A_n(x) \subset A_n$ 使 $U(x) \cap B_{\alpha_n} = \varnothing$, $\alpha_n \in A_n - A_n(x)$. 考虑积空间 $X \times X$ 的开覆盖 $\{U(x) \times U(y)\}_{x,y\in X}$, 对每一个 $U(x) \times U(y)$ 定义连续函数 $g_{n,m} : U(x) \times U(y) \to \mathbb{R}$ 使

$$g_{n,m}(x_1,x_2) = \sum\{|f_{\alpha_n,m}(x_1) - f_{\alpha_n,m}(x_2)| : \alpha_n \in A_n(x) \cup A_n(y)\},$$

其中 $(x_1,x_2) \in U(x) \times U(y)$. 由于当 $\alpha_n \notin A_n(x) \cup A_n(y)$ 时, $f_{\alpha_n,m}$ 在 $U(x)$ 及 $U(y)$ 上为零, 上述等式可改写为

$$g_{n,m}(x_1,x_2) = \sum\{|f_{\alpha_n,m}(x_1) - f_{\alpha_n,m}(x_2)| : \alpha_n \in A_n\},$$

其中 $(x_1,x_2) \in U(x) \times U(y)$. 注意到, 若 $g'_{n,m} : U(x') \times U(y') \to \mathbb{R}$ 是形如上述方式定义的函数, 且 $(x_1,x_2) \in (U(x) \times U(y)) \cap (U(x') \times U(y'))$, 易知

$$g_{n,m}(x_1,x_2) = g'_{n,m}(x_1,x_2).$$

从而依下式定义的函数 $\rho_{n,m} : X \times X \to \mathbb{R}$ 是确切的, 这里

$$\rho_{n,m}(x_1,x_2) = g_{n,m}(x_1,x_2),\ \text{当}\ (x_1,x_2) \in U(x) \times U(y).$$

易证 $\rho_{n,m}$ 是连续的, 置

$$\rho'_{n,m}(x_1,x_2) = \min\{1, \rho_{n,m}(x_1,x_2)\},$$

则 $\rho'_{n,m}$ 是集 X 上的伪度量且 $\rho'_{n,m}(x_1,x_2)\leqslant 1$ $(x_1,x_2\in X)$.

到此得到集 X 上的可数个伪度量 $\{\rho'_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$. 由以上构造过程, 这些伪度量满足引理 4.3.2 的条件 (i). 下证满足条件 (ii). 对每一 $x\in X$ 及不空闭集 $A\subset X$, 使 $x\notin A$, 存在开集 B, $B'\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B'\subset\overline{B'}\subset B$, $A\subset X-B$. 显然, 可以作为 $B=B_{\alpha_n}\in\mathscr{B}_n$, $B'=B_{\alpha_m}\in\mathscr{B}_m$, 这里 $\alpha_n\in A_n$, $\alpha_m\in A_m$, 由 (4.3.12), $B_{\alpha_m}\subset V_{\alpha_n,m}$, 故存在 $f_{\alpha_n,m}$ 使

$$f_{\alpha_n,m}(x)=1;\quad f_{\alpha_n,m}(a)=0\ (a\in A).$$

从而 $g_{n,m}(x,a)\geqslant 1$, $\rho_{n,m}(x,a)\geqslant 1$ 及 $\rho'_{n,m}(x,a)=1(a\in A)$. 所以 $\inf\limits_{a\in A}\{\rho'_{n,m}(x,a)\}=1$. 到此证明了可数个伪度量满足引理 4.3.2 的条件 (ii).

由引理 4.3.2, 知 X 可度量化. 证完.

由定理 4.3.5 和定理 4.3.6, 得下述定理.

定理 4.3.7 (Bing 度量化定理[46]) 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且具有 σ 离散基.

定理 4.3.6 和定理 4.3.7 建立的度量化定理统称为 **Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理** (Bing-Nagata-Smirnov metrization theorem).

4.4 可度量化空间在某些映射下的像

本节主要叙述有关可度量化空间在闭映射或开映射下的像的一些结果.

熟知度量空间满足第一可数公理, 而前面的例 4.1.5 指出度量空间在连续闭映射下的像未必满足第一可数公理, 从而未必是可度量化的. 因此, 要使度量空间在闭映射下的像保持可度量化, 必须对映射或像空间附加一些条件.

下面的例子说明度量空间在连续开映射下的像也未必是可度量化的.

例 4.4.1 (连续开映射不保持可度量性) 考察通常平面的子空间

$$X=\{(0,0)\}\cup\left\{\left(0,\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right):i\in\mathbb{N},\ i\leqslant j\in\mathbb{N}\right\}$$
$$\cup\left\{\left(1,\frac{1}{i}\right):i\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\left(1,\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right):i\in\mathbb{N},\ i\leqslant j\in\mathbb{N}\right\}.$$

把第二坐标相同的两点合为一点, 即把上式中

$$\left\{\left(0,\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right):i\in\mathbb{N},\ i\leqslant j\in\mathbb{N}\right\}$$

中的点与

$$\left\{\left(1,\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right):i\in\mathbb{N},\ i\leqslant j\in\mathbb{N}\right\}$$

中的相应点重合, 其他的点仍旧, 在所得集上给以商拓扑, 所得空间记作 Y. 下证商映射 q 是开映射.

设 $A \subset X$ 是开集. $q^{-1}(q(A))$ 是由增添一些孤立点于 A 而形成的, 故 $q^{-1}(q(A))$ 仍是开集, 从而 (商映射的定义) $q(A)$ 是开集.

易知 Y 是 T_2 空间. 下证 Y 不是正则空间. 取空间 Y 的闭子集 $F = \{(1, 1/i) : i \in \mathbb{N}\}$, 空间 Y 中的点 $(0,0) \notin F$. 设 U, V 是空间 Y 中任意一对开子集满足 $(0,0) \in U$, $F \subset V$, 下证 $U \cap V \neq \varnothing$. 因 $(0,0) \in U$, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使当 $j \geqslant i \geqslant i_0$ 时,

$$(0, 1/i + 1/i \cdot 1/j) \in q^{-1}(U).$$

因 $F \subset V$, 存在 $j_0 \geqslant i_0$ 使当 $j \geqslant j_0$ 时,

$$(1, 1/i_0 + 1/i_0 \cdot 1/j) \in q^{-1}(V).$$

置 $y = 1/i_0 + 1/i_0 \cdot 1/j_0$, 则有 $(0, y) \in q^{-1}(U)$ 及 $(1, y) \in q^{-1}(V)$. 从而 $q(0, y) = q(1, y) \in U \cap V$. 证完.

设 X, Y 是拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$ 称为**有限对一的** (finite-to-one), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是有限集. 注意, 在例 4.4.1 中的商映射 q, 对每一 $y \in Y$, $q^{-1}(y)$ 是单点集或两点集, 此例说明有限对一的连续开映射未必能保持可度量化性.

引理 4.4.1[278] 设拓扑空间 X 的每一开覆盖具有局部有限的闭加细覆盖, 则空间 X 的每一开覆盖具有局部有限的开加细覆盖, 也就是 X 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 取局部有限闭覆盖 $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $x \in X$ 选取开邻域 $V(x)$ 仅与 $\mathscr{A}$ 中的有限个元相交, 设 $\mathscr{F}$ 是一局部有限闭覆盖, 加细开覆盖 $\{V(x)\}_{x \in X}$. 对每一 $s \in S$, 置

$$W_s = X - \cup\{F : F \in \mathscr{F},\ F \cap A_s = \varnothing\}.$$

显然, W_s 是包含 A_s 的开集 (由 $\mathscr{F}$ 的局部有限性). 此外, 对每一 $s \in S$, 每一 $F \in \mathscr{F}$,

$$W_s \cap F \neq \varnothing \text{ 当且仅当 } A_s \cap F \neq \varnothing. \tag{4.4.1}$$

对每一 $s \in S$, 取 $U(s) \in \mathscr{U}$ 使 $A_s \subset U(s)$ 且设 $V_s = W_s \cap U(s)$, $\{V_s\}_{s \in S}$ 是一开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 由于每一 $x \in X$ 具有邻域仅与 $\mathscr{F}$ 的有限个元相交, 而 $\mathscr{F}$ 的每一个元素 (包含在某 $V(x)$ 内) 仅与 $\mathscr{A}$ 的有限个元素相交, 由 (4.4.1) 仅与有限个 W_s 相交, 从而仅与有限个 V_s 相交. 故知覆盖 $\{V_s\}_{s \in S}$ 是局部有限的. 证完.

注记 引理的证明表明: 对空间 X 中的每一局部有限集族 $\{A_s\}_{s \in S}$, 存在 X 的局部有限开集族 $\{V_s\}_{s \in S}$ 使每一 $A_s \subset V_s$, $s \in S$.

集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为**点有限的** (point-finite), 如果对每一 $x\in X$, $x\in U_\alpha$ 仅对有限个 $\alpha\in A$ 成立. 显然, 局限有限集族是点有限的.

引理 4.4.2[106] 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正规空间 X 的点有限开覆盖, 则存在开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$ $(\alpha\in A)$.

证明 设 $\mathscr{T}$ 为 X 上的拓扑, $\varPhi$ 为满足下列条件的映射 $f:A\to\mathscr{T}$ 全体:

$$\bigcup_{\alpha\in A}f(\alpha)=X \text{ 并且对任意 } \alpha\in A, \text{ 有 } f(\alpha)=U_\alpha \text{ 或者 } \overline{f(\alpha)}\subset U_\alpha.$$

在集 $\varPhi$ 上定义序 “$<$”: 设 $f_1,f_2\in\varPhi$, 规定 $f_1<f_2$, 如果对任意 $\alpha\in A$, $f_1(\alpha)\supset f_2(\alpha)$ 且在 $\overline{f_1(\alpha)}\subset U_\alpha$ 时, $f_1(\alpha)=f_2(\alpha)$. 易知 $\varPhi$ 形成偏序集. 任取 $\varPhi$ 中的全序子集 $\varPsi=\{f_s:s\in S\}$. 下证 $\varPsi$ 有上界.

定义 $f_0(\alpha)=\bigcap_{s\in S}f_s(\alpha)$, $\alpha\in A$. 下证 $f_0\in\varPhi$. 由 $<$ 的定义, 可以看出 $f_0(\alpha)$ 是开集并且 $f_0(\alpha)=U_\alpha$ 或者 $\overline{f_0(\alpha)}\subset U_\alpha$. 于是只要证明 $\bigcup_{\alpha\in A}f_0(\alpha)=X$.

对每一 $x\in X$, 由 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的点有限性, x 仅属于有限个 U_α. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}=\{\alpha\in A:x\in U_\alpha\}$. 如存在 α_i $(1\leqslant i\leqslant k)$, 使 $f_0(\alpha_i)=U_{\alpha_i}$, 则 $x\in f_0(\alpha_i)$. 否则, 对任意 i $(1\leqslant i\leqslant k)$, 有 $\overline{f_0(\alpha_i)}\subset U_{\alpha_i}$, 仍然由 $<$ 的定义, 存在 $s_i\in S$, 使 $s>s_i$ 时, 有 $f_0(\alpha_i)=f_s(\alpha_i)$. 令 $s_0=\max\{s_1,\cdots,s_k\}$, 则 $f_0(\alpha_i)=f_{s_0}(\alpha_i)(1\leqslant i\leqslant k)$. 由于 $\{f_{s_0}(\alpha):\alpha\in A\}$ 覆盖 X, $x\in U_\alpha$ 仅当 $\alpha\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 且 $f_{s_0}(\alpha)\subset U_\alpha$, 因此 $x\in\bigcup_{i=1}^k f_{s_0}(\alpha_i)=\bigcup_{i=1}^k f_0(\alpha_i)$. 这就证明了 $\bigcup_{\alpha\in A}f_0(\alpha)=X$. 于是 $f_0\in\varPhi$. 从而 f_0 是 $\varPsi$ 的上界.

由 Zorn 引理, $\varPhi$ 中有极大元 f. 下面证明对任意 $\alpha\in A$, 有 $\overline{f(\alpha)}\subset U_\alpha$, 从而引理 4.4.2 得证. 否则, 存在 $\alpha_0\in A$ 使 $\overline{f(\alpha_0)}\not\subset U_{\alpha_0}$. 这时, $f(\alpha_0)=U_{\alpha_0}$. 令 $F=X-\cup\{f(\alpha):\alpha\neq\alpha_0\}$, 则 F 为闭集并且 $F\subset f(\alpha_0)$. 由正规性, 存在开集 V, 使 $F\subset V\subset\overline{V}\subset f(\alpha_0)=U_{\alpha_0}$. 定义映射 $f':A\to\mathscr{T}$ 为

$$f'(\alpha)=\begin{cases}V, & \alpha=\alpha_0,\\ f(\alpha), & \alpha\neq\alpha_0,\end{cases}$$

则 $f'\in\varPhi$ 并且 $f'>f$, 这与 f 的极大性矛盾. 证完.

引理 4.4.3 完备映射保持局部有限集族.

证明 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的完备映射, $\mathscr{U}$ 是 X 中的局部有限集族. 下证 $\mathscr{V}=\{f(U):U\in\mathscr{U}\}$ 是 Y 中的局部有限集族.

对每一 $y\in Y$, 每一 $x\in f^{-1}(y)$, 存在开邻域 $U(x)$ 仅与有限个 $U\in\mathscr{U}$ 相交, 因 $f^{-1}(y)$ 是紧的, 有限个 $U(x)$ 覆盖了 $f^{-1}(y)$, 设这有限个 $U(x)$ 的并为 V_y, $V_y\supset f^{-1}(y)$. 因 f 是连续的闭映射, 由推论 1.5.1, 存在开集 W_y 使 $V_y\supset W_y\supset f^{-1}(y)$, 且 $f(W_y)$ 是 Y 中的开集及 $W_y=f^{-1}(f(W_y))$, W_y 仅与有限个 $U\in\mathscr{U}$ 相交. $f(W_y)$

与某 $f(U)$ 相交当且仅当 W_y 与这一 U 相交, 故点 y 的邻域 $f(W_y)$ 仅与有限个 $f(U)$ 相交. 证完.

注记 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{U}$ 称为**局部可数的** (locally countable), 如果对每一 $x \in X$, 存在 x 的邻域仅与可数个 $U \in \mathscr{U}$ 相交. 如果上述引理中的 f 是连续的闭映射, 且 $f^{-1}(y)$ 具有 Lindelöf 性质, 由完全类似的证法可以得到这样的映射保持局部可数集族.

引理 4.4.4 完备映射保持正规仿紧性.

证明 设 f 是正规仿紧空间 X 到拓扑空间 Y 上的完备映射, 显然 Y 是正规空间 (习题 2.12). 设 $\mathscr{V}$ 是 Y 的开覆盖, $f^{-1}(\mathscr{V}) = \{f^{-1}(V)\}_{V\in\mathscr{V}}$ 是 X 的开覆盖. 由仿紧性, 存在局部有限开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ 加细 $f^{-1}(\mathscr{V})$. 由正规性及引理 4.4.2, 存在闭覆盖 $\mathscr{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ 使 $F_s \subset U_s$, $s \in S$. $\mathscr{F}$ 是局部有限的, 由引理 4.4.3, $\{f(F_s)\}_{s\in S}$ 是空间 Y 的局部有限闭覆盖加细 $\mathscr{V}$, 由引理 4.4.1, 知 Y 是仿紧空间. 证完.

引理 4.4.5 设 K 是度量空间 (X,ρ) 的紧子集, 开集 $U \supset K$, 则存在 $r > 0$ 使 $S_r(K) \subset U$, 这里 $S_r(K) = \cup\{S_r(x) : x \in K\}$.

证明 置 $f(x) = D(x, X-U)$. 由定理 4.1.3, $f : X \to [0,\infty)$ 是连续映射. 由定理 4.1.4 知在 K 上 $f(x) > 0$, 熟知紧集 K 上的实值连续函数达到上确界、下确界, 故存在 $r > 0$ 使 $f(x) \geqslant r$, $x \in K$. 从而 $S_r(K) \subset U$. 证完.

定义 4.4.1[299] 拓扑空间 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为空间 X 的一个**展开** (development), 如果对每一 $x \in X$, 每一包含 x 的开集 U, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i) \subset U$. 具有展开的空间称为**可展空间** (developable space).

易知度量空间是可展空间. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{W}_i = \{S_{1/2^i}(x) : x \in X\}$, 则 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个展开.

引理 4.4.6 设可展空间 X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限开加细覆盖, 则 X 具有 σ 局部有限基.

证明 设 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个展开. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 存在 σ 局部有限开覆盖 $\mathscr{B}_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{i,j}$ 加细 $\mathscr{W}_i$, 每一 $\mathscr{B}_{i,j}$ 是局部有限开集族. 置 $\mathscr{B} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_i$, $\mathscr{B}$ 是 σ 局部有限开集族. 下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基. 对每一 $x \in X$, 每一包含 x 的开集 U, 由定义 4.4.1, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i) \subset U$. 因 $\mathscr{B}_i$ 加细 $\mathscr{W}_i$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_i) \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i) \subset U$. 故存在 $B \in \mathscr{B}_i$ 使 $x \in B \subset U$. 证完.

为了便于下列定理证明的叙述, 介绍饱和集的概念. 称集 $S \subset X$ 是关于映射 $f : X \to Y$ 的**饱和集** (saturated set), 如果 $S = f^{-1}(f(S))$, 这时若 $f^{-1}(y) \cap S \neq \varnothing$, 则 $f^{-1}(y) \subset S$.

定理 4.4.1[308, 375] 完备映射保持可度量化性.

证明 设 f 是度量空间 (X,ρ) 到拓扑空间 Y 上的完备映射. 对每一 $y \in Y$,

$i \in \mathbb{N}$, 置

$$U_i(y) = S_{1/i}(f^{-1}(y)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} S_{1/i}(x)$$

$$= \{x' : \text{存在 } x \in f^{-1}(y), \text{ 使 } \rho(x, x') < 1/i\}, \tag{4.4.2}$$

$$W_i(y) = Y - f(X - U_i(y)), \tag{4.4.3}$$

$$V_i(y) = f^{-1}(W_i(y)) \subset U_i(y). \tag{4.4.4}$$

因为 $f^{-1}(y) \subset U_i(y)$, 所以 $y \in Y - f(X - U_i(y)) = W_i(y)$. 由于 f 是闭映射, $W_i(y)$ 是 Y 中包含点 y 的开集, $V_i(y)$ 是 X 中包含 $f^{-1}(y)$ 的开集, 且由 (4.4.3), (4.4.4) 可知 $V_i(y)$ 是包含在 $U_i(y)$ 内的最大的饱和集, 即 $f^{-1}(z) \subset U_i(y) \Rightarrow f^{-1}(z) \subset V_i(y)$. 由 (4.4.2), (4.4.3), (4.4.4), 显然对每一 $y \in Y$, $j \geqslant i$, 有

$$U_j(y) \subset U_i(y), \ W_j(y) \subset W_i(y), \ V_j(y) \subset V_i(y). \tag{4.4.5}$$

对每一 $i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{W}_i = \{W_i(y)\}_{y \in Y}$ 是 Y 的开覆盖. 下证开覆盖序列 $\{\mathscr{W}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是空间 Y 的一个展开. 为此, 先证对每一 $y \in Y$, 集族

$$\{W_i(y)\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ 是 } y \text{ 的邻域基}. \tag{4.4.6}$$

设 V 是 y 的开邻域, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. 因 $f^{-1}(y)$ 紧, 由引理 4.4.5, 存在 $i \in \mathbb{N}$, 使

$$S_{1/i}(f^{-1}(y)) = U_i(y) \subset f^{-1}(V).$$

由 (4.4.4), $V_i(y) \subset f^{-1}(V)$, 从而 $W_i(y) = f(V_i(y)) \subset V$, (4.4.6) 得证. 下证

$$\exists\, j \in \mathbb{N} \text{ 使 } \mathrm{st}(y, \mathscr{W}_j) \subset W_i(y). \tag{4.4.7}$$

由 (4.4.3), (4.4.4), $f^{-1}(y) \subset V_{2i}(y)$. 因 $f^{-1}(y)$ 紧, 由引理 4.4.5, 存在 $j \geqslant 2i$ 使

$$U_j(y) \subset V_{2i}(y). \tag{4.4.8}$$

设 y 属于 $\mathscr{W}_j$ 中的某一元 $W_j(z)$, 要证 $W_j(z) \subset W_i(y)$, 从而 (4.4.7) 得证. 由 (4.4.4),

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_j(z)) = V_j(z) \subset U_j(z).$$

对每一 $x \in f^{-1}(y) \subset U_j(z)$, 由 (4.4.2), 存在 $x' \in f^{-1}(z)$, 使 $\rho(x, x') < 1/j$, 从而 $f^{-1}(z) \cap U_j(y) \neq \varnothing$. 由 (4.4.8) 及 $V_{2i}(y)$ 是饱和集, 得

$$f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y). \tag{4.4.9}$$

任取 $t \in W_j(z)$, 因 $f(V_j(z)) = W_j(z)$, $f^{-1}(t) \cap V_j(z) \neq \varnothing$. 因 $V_j(z)$ 是饱和集, $f^{-1}(t) \subset V_j(z) \subset U_j(z)$. 而由 (4.4.2), $f^{-1}(z) \subset U_j(z)$, 故有

$$\forall\, x \in f^{-1}(t),\ \exists\, x' \in f^{-1}(z) \Rightarrow \rho(x,x') < 1/j \leqslant 1/2i. \tag{4.4.10}$$

由 (4.4.9) 及 (4.4.4), $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y) \subset U_{2i}(y)$, 故对每一 $x' \in f^{-1}(z)$, 存在 $x'' \in f^{-1}(y)$ 使 $\rho(x',x'') < 1/2i$. 结合 (4.4.10) 式得 $\rho(x,x'') < 1/i$. 从而 $f^{-1}(t) \subset U_i(y)$. 由于 $V_i(y)$ 是包含在 $U_i(y)$ 内的最大的饱和集, 所以 $f^{-1}(t) \subset V_i(y)$, 从而 $t \in W_i(y)$. 由 t 的任意性, $W_j(z) \subset W_i(y)$. (4.4.7) 得证.

由 (4.4.6), (4.4.7) 知 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 Y 的一个展开. 由于度量空间是仿紧的(定理 4.3.4), 由引理 4.4.4, Y 是仿紧的. 由引理 4.4.6 及定理 4.3.6, Y 是可度量化空间. 证完.

引理 4.4.7[283] 设 f 是 T_1 空间 X 到满足第一可数公理的空间 Y 上的连续闭映射, 则 X 上的任一实值连续函数在每一边缘 $\partial f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ 上有界.

证明 首先给出满足第一可数公理的一个等价刻画: "对每一 $x \in X$, 存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}$, 任取 $x_n \in U_n(x)$, 序列 $\{x_n\}$ 以 x 为聚点." 读者容易自己证明 (习题 4.13).

用反证法. 如若不然, 存在实值连续函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 及 $y \in Y$, 使 h 在 $\partial f^{-1}(y)$ 上无界, 则可取序列 $\{x_n\} \subset \partial f^{-1}(y)$ 使

$$|h(x_{n+1})| > |h(x_n)| + 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

置

$$V_n = \{x : x \in X,\ |h(x) - h(x_n)| < 1/2\},$$

则 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是离散开集族, 且 $x_n \in V_n$. 设 $\{U_n(y)\}$ 是点 y 的满足第一可数公理的开邻域序列. 下面取 $z_n \in V_n \cap f^{-1}(U_n(y))$ 使所有的 $f(z_n)$ 是不同的. 取 $z_1 = x_1$, 设已取得 $z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}$ 满足上述条件, 置

$$W_n = (V_n \cap f^{-1}(U_n(y))) - \bigcup_{k=2}^{n-1} f^{-1}(f(z_k)).$$

因为 f 是连续闭映射, X 是 T_1 的, 所以 $f^{-1}(f(z_k))$ 是闭集, 从而 W_n 是 x_n 的开邻域. 由于 x_n 是 $f^{-1}(y)$ 的边缘点, 于是 $W_n - f^{-1}(y)$ 不空. 取 $z_n \in W_n - f^{-1}(y)$. 这 z_n 显然满足条件. 置 $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, Z 的任何子集是闭集. 因 f 是闭映射, $f(Z) = \{f(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ 的任何子集都闭于 Y, 即序列 $\{f(z_n)\}$ 无聚点. 但是 $f(z_n) \in U_n(y)$ $(n \in \mathbb{N})$, 这与 Y 满足第一可数公理矛盾. 证完.

注记 上述引理中的 "满足第一可数公理" 可以代以 "可数紧", 结论也成立(由定理 3.5.2 得矛盾).

设 X, Y 都是拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$ 称为**紧映射** (compact mapping) (**边缘紧映射** (boundary-compact mapping)), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ $(\partial f^{-1}(y))$ 是 X 的紧子集. 完备映射就是连续的闭、紧、满映射 (定义 3.3.1).

引理 4.4.8 设 f 是 T_1 空间 X 到拓扑空间 Y 上的边缘紧的连续闭映射, 则存在闭集 $F \subset X$ 使 $f|_F$ 是 F 到 Y 上的完备映射.

证明 因 f 是连续的闭映射, Y 是 T_1 的, $f^{-1}(y)$ 闭于 X, $\partial f^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$. 当 y 是 Y 的孤立点时, $\{y\}$ 同时是开集, $f^{-1}(y)$ 既开且闭, $\partial f^{-1}(y) = \varnothing$ (定理 1.3.10), 这时任取 $p_y \in f^{-1}(y)$. 设 Y 中孤立点所成集为 E, 置

$$F = \cup\{\{p_y\} : y \in E\} \cup (\cup\{\partial f^{-1}(y) : y \in Y - E\}).$$

下证 F 是闭集. 设 $x \notin F$, x 必属于某一 $f^{-1}(y)$. 这时, 如 $y \in E$, 则 $f^{-1}(y)$ 是开集, $f^{-1}(y) - \{p_y\}$ 是包含点 x 的开集 (因单点集 $\{p_y\}$ 是闭集) 与 F 不交; 如 $y \in Y - E$, 则 $f^{-1}(y) - \partial f^{-1}(y)$ 是包含点 x 的开集 (因为 $A - \partial A = A^\circ$) 与 F 不交. 故 F 是空间 X 的闭集.

易证 f 在闭集 F 上的限制 $f|_F$ 是 F 到 Y 上的连续闭映射, 由于每一 $y \in Y$ 关于 $f|_F$ 的逆像或者是紧集 $\partial f^{-1}(y)$ 或者是单点集 $\{p_y\}$, 所以 $f|_F$ 是完备映射. 证完.

注记 上述引理可叙述为更一般的形式 (其证明也完全类似): 设 f 是 T_1 空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续映射, 则存在闭集 $F \subset X$ 使 $f|_F : F \to Y$ 是连续的满映射且对于每一 $y \in Y$, $(f|_F)^{-1}(y)$ 或者是单点集, 或者是非空集 $\partial f^{-1}(y)$.

定理 4.4.2 (Morita-Hanai-Stone 定理[308, 375]) 设 f 是度量空间 (X, ρ) 到拓扑空间 Y 上的连续闭映射, 则下列论断等价:

(i) 空间 Y 可度量化;

(ii) 空间 Y 满足第一可数公理;

(iii) f 是边缘紧的.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), 显然; (ii) $\Rightarrow$ (iii), 由引理 4.4.7 及定理 3.5.6 的证法知 $\partial f^{-1}(y)$ 是可数紧的, 然后由定理 4.1.8 知 $\partial f^{-1}(y)$ 是紧的; (iii) $\Rightarrow$ (i), 由引理 4.4.8 及定理 4.4.1 得证. 证完.

引理 4.4.9 连续的开映射保持第一可数性.

证明 设 f 是满足第一可数公理的空间 X 到空间 Y 上的连续开映射. 对每一 $y \in Y$, 任取 $x \in f^{-1}(y)$, 设 $\{U_n(x)\}$ 是点 x 的可数邻域基. 因 f 是连续开映射, 易证 $\{f(U_n(x))\}$ 是点 y 的可数邻域基. 证完.

注记 由以上证明可知连续开映射保持邻域基的势. 注意, 证明中曾 "任取点 $x \in f^{-1}(y)$", A. Arhangel'skiĭ[17] 曾定义一种弱于开映射的映射, 称为**几乎开映射** (almost open mapping): 如果对每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 对 x 的每一邻域

$U(x)$, $f(U(x))$ 是 y 的邻域. 显然, 连续的几乎开映射保持邻域基的势 (习题 4.19), 特别保持第一可数性.

定理 4.4.3[39] 既开且闭的连续映射保持可度量化性.

证明 由定理 4.4.2 及引理 4.4.9 得证. 证完.

定理 4.4.4 (Hanai-Ponomarev 定理[177, 335]) 每一个满足第一可数公理的 T_0 空间是某一度量空间在连续开映射下的像.

证明 设 X 是满足第一可数公理的 T_0 空间. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的所有的开集构成的集族. 利用指标集 A 构造广义贝尔零维空间 $N(A)$, 这是一度量空间, 度量 ρ 的定义见例 4.1.2. 为了叙述方便起见, 记空间 $N(A)$ 中的点 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) = \{\alpha_n\}$. 取空间 $N(A)$ 的子集

$$S = \{\{\alpha_n\} : \{U_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ 形成某一点 } x \in X \text{ 的开邻域基}\}.$$

定义映射 $f : S \to X$, 使 $f(\alpha) = x$, 这里 $\alpha = \{\alpha_n\} \in S$ 而 $\{U_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 $x \in X$ 的邻域基 (由于 X 是 T_0 的, f 是一映射). 因为 X 满足第一可数公理, f 是满映射.

在证明 f 是连续的开映射之前, 先证明对任一 $\alpha = \{\alpha_n\} \in S$, 任一 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$f(S_{1/k}(\alpha)) = \bigcap_{n=1}^{k} U_{\alpha_n}, \tag{4.4.11}$$

这里 $S_{1/k}(\alpha) = \{\alpha' \in S : \rho(\alpha, \alpha') < 1/k\}$. 设 $\alpha' = \{\alpha'_n\} \in S$ 满足 $\rho(\alpha, \alpha') < 1/k$, 由 ρ 的定义知, 当 $n \leqslant k$ 时, $\alpha_n = \alpha'_n$, 由 S 的定义, $f(\alpha')$ 的邻域基应是 $\{U_{\alpha'_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, 所以 $f(\alpha') \in \bigcap_{n=1}^{k} U_{\alpha'_n} = \bigcap_{n=1}^{k} U_{\alpha_n}$, 从而 $f(S_{1/k}(\alpha)) \subset \bigcap_{n=1}^{k} U_{\alpha_n}$. 另一方面, 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{k} U_{\alpha_n}$, 选取开集序列 $\{U_{\beta_j} : j \geqslant k+1\}$ 作为点 x 的邻域基, 则 $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots) \in S$, $f(\alpha') = x$ 且 $\rho(\alpha, \alpha') < 1/k$ (由 ρ 的定义), 所以 $x \in f(S_{1/k}(\alpha))$. (4.4.11) 式得证.

下证 f 是连续的. 设 U 是点 $f(\alpha) = x$ 的任一开邻域, 这里 $\alpha = \{\alpha_n\}$. 由 f 的定义, $\{U_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域基, 存在 U_{α_i} 使 $x \in U_{\alpha_i} \subset U$. 由 (4.4.11), $f(S_{1/i}(\alpha)) \subset U_{\alpha_i} \subset U$, 从而 f 是连续的.

下证 f 是开映射. 由于 $\{S_{1/k}(\alpha) : k \in \mathbb{N},\ \alpha \in S\}$ 是子空间 S 的基, 对任一 $\alpha \in S$, 任一 $k \in \mathbb{N}$, 由 (4.4.11), $f(S_{1/k}(\alpha))$ 是开集, 所以 f 是开映射.

综上所述, 证明了 f 是 $N(A)$ 的子空间到空间 X 上的连续开映射. 证完.

由引理 4.4.9 和定理 4.4.4 可知: 在 T_0 空间中, 满足第一可数公理的空间可以刻画为度量空间在连续开映射下的像.

4.5 一致空间

一致空间可以作为介于拓扑空间与度量空间之间的一类空间. 自从 1938 年 A.

Weil [409] 引进一致空间以来, 关于它的理论可以独立于拓扑空间理论之外, 但与拓扑空间有密切联系. N. Bourbaki [57] 曾在书中以大量篇幅阐述其理论. 这里仅作简单介绍. 为了适应近代一般拓扑学的需要, 这里基本上采用 1940 年 J. W. Tukey[398] 的理论, 最后论证两种理论之间的关系.

前面曾对拓扑空间 X 的覆盖引进点星加细、星加细等概念 (定义 4.3.2). 下面将对集 X 引用这些概念.

设 $\mathscr{U}$ 是集 X 的覆盖. 对 $x \in X$, 记 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}) = \cup\{U : U \in \mathscr{U},\ x \in U\}$; 对 $A \subset X$, 记 $\mathrm{st}(A,\mathscr{U}) = \cup\{U \in \mathscr{U} : U \cap A \neq \varnothing\}$.

设 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 是集 X 的覆盖, 如果对 $\mathscr{V}$ 的每一元 V 存在 $U \in \mathscr{U}$ 使 $V \subset U$, 则称覆盖 $\mathscr{V}$ 加细覆盖 $\mathscr{U}$, 记作 $\mathscr{V} < \mathscr{U}$; 如果覆盖 $\{\mathrm{st}(V,\mathscr{V}) : V \in \mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$, 则称 $\mathscr{V}$ 星加细 $\mathscr{U}$, 记作 $\mathscr{V} \overset{*}{<} \mathscr{U}$.

设 $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 是集 X 的覆盖, 称 $\mathscr{U} \wedge \mathscr{V} = \{U \cap V : U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V}\}$ 为覆盖 $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 的交. 这规定也适用于有限个覆盖的情况.

定义 4.5.1　设 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 是集 X 上的覆盖 $\mathscr{U}$ 所成的族, 如果满足下列条件:

(U1) 对 X 的覆盖 $\mathscr{U}$, 如存在 $\alpha \in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha < \mathscr{U}$, 则 $\mathscr{U} \in \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$;

(U2) 对任意 $\alpha, \beta \in A$, 存在 $\gamma \in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\beta$;

(U3) 对每一 $\alpha \in A$, 存在 $\beta \in A$ 使 $\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha$;

(U4) 对任意 $x, y \in X$ $(x \neq y)$, 存在 $\alpha \in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha$ 中没有一个元同时包含点 x 与 y, 则称 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 是集 X 上的一个**一致结构** (uniformity), 集 X 连同它的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 称为**一致空间** (uniform space), 可以记为 $(X, \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\})$. 为简便起见仍记为 X. 一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 的子族 $\{\mathscr{U}_\beta : \beta \in B\}$ $(B \subset A)$ 称为**一致结构的基** (basis of uniformity), 如果对每一 $\alpha \in A$, 存在 $\beta \in B$ 使 $\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha$.

定理 4.5.1　集 X 的覆盖所形成的族 $\{\mathscr{U}_\beta : \beta \in B\}$ 是集 X 上的某一个一致结构的基当且仅当满足定义 4.5.1 的 (U2)~(U4).

证明　设 $\Phi' = \{\mathscr{U}_\beta : \beta \in B\}$ 是 X 上一致结构 $\Phi = \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 的基. 对 $\beta, \beta' \in B$, 因 $\Phi' \subset \Phi$, $\beta, \beta' \in A$, 由于 Φ 满足 (U2), 存在 $\gamma \in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\beta$, $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_{\beta'}$. 因 Φ' 是 Φ 的基, 存在 $\gamma' \in B$ 使 $\mathscr{U}_{\gamma'} < \mathscr{U}_\gamma$, 从而 $\mathscr{U}_{\gamma'} < \mathscr{U}_\beta$, $\mathscr{U}_{\gamma'} < \mathscr{U}_{\beta'}$. 所以 Φ' 满足 (U2). 类似地可证 Φ' 满足 (U3), (U4).

相反, 设 $\Phi' = \{\mathscr{U}_\beta : \beta \in B\}$ 满足 (U2)~(U4). 置

$$\Phi = \{\mathscr{U} : \exists\, \beta \in B \text{ 使 } \mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}\},$$

这里 $\mathscr{U}$ 是 X 的覆盖. 对任意 $\mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_{\alpha'} \in \Phi$, 由 Φ 的定义, 存在 $\beta, \beta' \in B$, 使 $\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_{\beta'} < \mathscr{U}_{\alpha'}$. 因 Φ' 满足 (U2), 存在 $\gamma \in B$ 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\beta$, $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_{\beta'}$, 从而

存在 $\mathscr{U}_\gamma \in \Phi$ 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_{\alpha'}$. 所以 Φ 满足 (U2). 类似地可证 Φ 满足 (U3), (U4). 显然, Φ 满足 (U1), 故 Φ 是 X 上的一致结构. 证完.

例 4.5.1 指出度量空间是一致空间.

例 4.5.1 设 (X,ρ) 是度量空间, 取由开球组成的覆盖

$$\mathscr{U}_n = \{S_{1/3^n}(x) : x \in X\},\ n \in \mathbb{N}.$$

显然有 $\mathscr{U}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{U}_n$ $(n \in \mathbb{N})$. 从而易知 $\Phi' = \{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足 (U2), (U3). 因 X 是 T_1 的, 对 $x, y \in X$, $x \neq y$, 存在 $S_\varepsilon(x)$ 使 $y \notin S_\varepsilon(x)$. 取 $n \in \mathbb{N}$ 使 $1/3^n < \varepsilon$, 则 $y \notin S_{1/3^n}(x)$, 由于 $\mathrm{st}(S_{1/3^{n+1}}(x), \mathscr{U}_{n+1}) \subset S_{1/3^n}(x)$, 所以 $\mathscr{U}_{n+1}$ 中没有一个元同时包含点 x 与 y, 所以 Φ' 满足 (U4). 由定理 4.5.1, Φ' 是一致结构的基, 从而 $\Phi = \{\mathscr{U} :$ 存在 $\mathscr{U}_n \in \Phi'$ 使 $\mathscr{U}_n < \mathscr{U}\}$ 是 X 上的一致结构. 所以 (X,ρ) 是一致空间.

例 4.5.2 指出拓扑群也是一致空间.

例 4.5.2 (拓扑群) 群 (group) G 是一集, 对任意 $x, y \in G$, 有 $xy \in G$ 与之对应 (xy 称为 x, y 的乘积) 且满足如下条件:

(G1) $(xy)z = x(yz)$, $x, y, z \in G$;

(G2) 存在 $e \in G$ 使 $xe = ex = x$ 对每一 $x \in G$ 成立;

(G3) 对每一 $x \in G$, 存在 $x^{-1} \in G$ 使 $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

元素 e 称为群 G 的单位元, x^{-1} 称为元素 x 的逆元. 易知单位元、逆元是惟一的.

拓扑群(topological group) G 是一个群同时又是 T_1 拓扑空间且满足如下条件:

(TG1) $f(x,y) = xy$ 是 $G \times G \to G$ 的连续映射;

(TG2) $g(x) = x^{-1}$ 是 $G \to G$ 的连续映射.

设 $A, B \subset G$, 记 $A^{-1} = \{x^{-1} : x \in A\}$, $AB = \{xy : x \in A,\ y \in B\}$, 当 A 或 B 是单点集 $\{x\}$ 或 $\{y\}$ 时, 则后一情况记为 xB 或 Ay.

设 $\mathscr{B}$ 是单位元 e 的邻域基, 则对每一 $B \in \mathscr{B}$, $\mathscr{U}_B = \{xB : x \in G\}$ 是 G 的覆盖. 置 $\Phi = \{\mathscr{U}_B : B \in \mathscr{B}\}$. 为了证明拓扑群 G 是一致空间, 只要证明 Φ 是 G 上的一致结构的基.

由邻域基的条件 (NB3) (见定理 1.2.3), 知满足 (U2). 为了证明 Φ 满足 (U3), 只要证明

$$\text{对每一 } B \in \mathscr{B},\ \text{存在 } B_1 \in \mathscr{B} \text{ 使 } \mathrm{st}(xB_1, \mathscr{U}_{B_1}) \subset xB,\ x \in G. \tag{4.5.1}$$

置 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^{-1} x_3$. 由 (TG1), (TG2) 易知 $f : G \times G \times G \to G$ 是连续映射, 而 $f(e,e,e) = e$, 由于 f 在点 (e,e,e) 的连续性, 对 e 的任何邻域 $B \in \mathscr{B}$, 存在 e 的邻域 $B_1 \in \mathscr{B}$ 使 $f(B_1 \times B_1 \times B_1) = B_1 B_1^{-1} B_1 \subset B$. 设 xB_1 与某 $x_1 B_1 \in \mathscr{U}_{B_1}$ 相交. 下证 $x_1 B_1 \subset xB$, 从而 $\mathrm{st}(xB_1, \mathscr{U}_{B_1}) \subset xB$, (4.5.1) 式得证. 因 $xB_1 \cap x_1 B_1 \neq \varnothing$,

存在 b_0, $b_1 \in B_1$ 使 $xb_0 = x_1b_1$, $x_1 = xb_0b_1^{-1}$, 对 x_1B_1 的任一元 x_1b (b 是 B_1 的任一元), 有

$$x_1b = xb_0b_1^{-1}b \in xB_1B_1^{-1}B_1 \subset xB.$$

所以 $x_1B_1 \subset xB$, (4.5.1) 式得证. Φ 满足 (U3).

对 G 的不同元素 x,y, $x^{-1}y \neq e$. 因 G 是 T_1 的, 存在 e 的邻域 $B \in \mathscr{B}$ 使 $x^{-1}y \notin B$. 由 (TG1), (TG2), $g(x_1,x_2) = x_1^{-1}x_2$ 是 $G\times G \to G$ 的连续映射, 而 $g(e,e)=e$, 由于 g 在点 (e,e) 的连续性, 对 e 的邻域 B, 存在 e 的邻域 $B_1 \in \mathscr{B}$ 使 $g(B_1\times B_1) = B_1^{-1}B_1 \subset B$. 下证 $\mathscr{U}_{B_1}$ 满足 (U4) 的要求. 如若不然, x,y 同属于 $\mathscr{U}_{B_1}$ 的某一元 x_0B_1, 即存在 $b_1,b_2 \in B_1$ 使 $x = x_0b_1$, $y = x_0b_2$, 则

$$\begin{aligned} x^{-1}y &= (x_0b_1)^{-1}(x_0b_2) = b_1^{-1}x_0^{-1}x_0b_2 \\ &= b_1^{-1}b_2 \in B_1^{-1}B_1 \subset B. \end{aligned}$$

这是矛盾的. 到此证明了 Φ 满足 (U4). 证完.

由定理 4.5.1, Φ 是 G 上的一致结构的基, 从而拓扑群 G 是一致空间.

下面叙述一致空间与拓扑空间的关系.

定理 4.5.2 设 X 是一致空间, $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 是一致结构 (或一致结构的基). 置

$$\mathscr{T} = \{U : U \in X,\ \forall\, x \in U,\ \exists\, \alpha \in A \text{ 使 } \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha) \subset U\}, \tag{4.5.2}$$

则 $\mathscr{T}$ 是 X 上的拓扑.

证明 显然, $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$, 且 $\mathscr{T}$ 关于任意并封闭的 (即满足 (O1), (O3)). 下证满足 (O2). 设 U_1, $U_2 \in \mathscr{T}$, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. 对每一 $x \in U_1\cap U_2$, 因 $U_1 \in \mathscr{T}$, 存在 $\alpha_1 \in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_1}) \subset U_1$; 因 $U_2 \in \mathscr{T}$, 存在 $\alpha_2 \in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_2}) \subset U_2$. 由 (U2), 存在 $\gamma \in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_{\alpha_1}$, $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_{\alpha_2}$. 故有

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\gamma) \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_1}) \cap \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_2}) \subset U_1 \cap U_2.$$

证完.

定义 4.5.2 由定理 4.5.2 中 (4.5.2) 式定义的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为由 X 上的**一致结构导出的拓扑** (topology induced by an uniformity).

在上述意义下, 一致空间是拓扑空间, $\mathscr{T}$ 的元素是这拓扑空间的开集.

定理 4.5.3 设 $\mathscr{T}$ 是集 X 上的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 导出的拓扑, 则

(i) $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha) : \alpha \in A\}$ 形成拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中点 x 的邻域基;

(ii) 存在仅由开覆盖组成的这一致结构的基.

证明 (i) 对每一开集 U 及任意点 $x \in U$, 由定理 4.5.2 的 (4.5.2), 存在 $\alpha \in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha) \subset U$, 所以只要证明 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$ 包含着一个含点 x 的开集. 置

$$V = \{x' : \exists\, \beta \in A \text{ 使 } \mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta) \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)\}. \tag{4.5.3}$$

显然, $x \in V \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$, 下证 V 是开集. 由 (4.5.2) 只要证

$$\text{对 } V \text{ 的每一点 } x',\ \text{存在 } \gamma \in A \text{ 使 } \mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma) \subset V. \tag{4.5.4}$$

对 V 的每一点 x', 由 (4.5.3), 存在 $\beta \in A$ 使 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta) \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$. 由 (U3), 存在 $\gamma \in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma \overset{*}{<} \mathscr{U}_\beta$. 对任何 $x'' \in \mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma)$, 存在 $U_\gamma \in \mathscr{U}_\gamma$, 使 x', $x'' \in U_\gamma$. 因 $\mathscr{U}_\gamma \overset{*}{<} \mathscr{U}_\beta$ 及 $x'' \in U_\gamma$, $\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma) \subset \mathrm{st}(U_\gamma,\mathscr{U}_\gamma) \subset$ 某 $U_\beta \in \mathscr{U}_\beta$. 因 $x' \in U_\gamma \subset U_\beta$, 故有 $\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma) \subset \mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta)$. 从而 $\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma) \subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$. 由 (4.5.3), $x'' \in V$, 由 x'' 的任意性, $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma) \subset V$, (4.5.4) 式得证.

(ii) 对一致结构中的每一 $\mathscr{U}_\alpha$ $(\alpha \in A)$, 置

$$\mathscr{U}_\alpha^\circ = \{U^\circ : U \in \mathscr{U}_\alpha\}.$$

要证 $\{\mathscr{U}_\alpha^\circ : \alpha \in A\}$ 是 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 的基. 为此只要证明每一个 $\mathscr{U}_\alpha^\circ \in \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$.

由 (U3), 取 $\beta \in A$ 使 $\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha$, 下证 $\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha^\circ$, 从而由 (U1) 得证. 因 $\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha$, 对每一 $V \in \mathscr{U}_\beta$, 存在 $U \in \mathscr{U}_\alpha$ 使 $\mathrm{st}(V,\mathscr{U}_\beta) \subset U$, 从而对每一点 $x \in V$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\beta) \subset U$. 由 (i), $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\beta)$ 是点 x 的邻域 (包含着包含点 x 的一个开集), 所以 x 是 U 的内点, 即 $x \in U^\circ$. 从而 $V \subset U^\circ$, 故有 $\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha^\circ$. 证完.

定理 4.5.4 设 $\mathscr{T}$ 是集 X 上的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 导出的拓扑, 则拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是完全正则空间.

证明 由定理 4.5.3 的 (i), $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha) : \alpha \in A\}$ 是点 $x \in X$ 的邻域基, 由 (U4) 知对 $x, y \in X$, $x \neq y$, 存在 $\alpha \in A$ 使 $y \notin \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$. 所以 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_1 空间. 设 $x \in X$, F 是 X 的闭子集, 且 $x \notin F$. 由定理 4.5.3 的 (ii), 可以在一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 中选取开覆盖序列: $\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \cdots$, 使

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_0) \subset X - F,\ \mathscr{U}_n \overset{*}{<} \mathscr{U}_{n-1}\ (n \in \mathbb{N}).$$

定义开集 $U(k/2^n)$ $(k = 1, 2, \cdots, 2^n - 1; n \in \mathbb{N})$ 如下:

$$\begin{aligned} &U(1/2) \ = \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_1), \\ &U(1/2^2) = \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_2),\ U(3/2^2) = \mathrm{st}(U(1/2),\mathscr{U}_2), \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots \end{aligned}$$

一般地说, 当 $U(k/2^n)(k = 1, 2, \cdots, 2^n - 1)$ 已定义, 则可定义 $U(k'/2^{n+1})$ 如下:

$$U(k'/2^{n+1}) = \begin{cases} U(k/2^n), & k' = 2k, \\ \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1}), & k' = 1, \\ \mathrm{st}(U(k/2^n),\mathscr{U}_{n+1}), & k' = 2k+1,\ k > 0. \end{cases}$$

因为 $\mathscr{U}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{U}_n$, 所以对 $U \subset X$, 有 $\mathrm{st}(\mathrm{st}(U, \mathscr{U}_{n+1}), \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(U, \mathscr{U}_n)$, 且由 $\mathscr{U}_n$ 是开覆盖, 于是 $\overline{\mathrm{st}(U, \mathscr{U}_{n+1})} \subset \mathrm{st}(\mathrm{st}(U, \mathscr{U}_{n+1}), \mathscr{U}_{n+1})$. 由此可以证明:

$$x \in U(k/2^n) \subset \overline{U(k/2^n)} \subset U((k+1)/2^n) \subset \overline{U((k+1)/2^n)} \subset X - F.$$

此外, 置 $U(1) = X$, 并令 $f(x) = \inf\{r : x \in U(r)\}$. 利用类似于 Urysohn 引理 (定理 2.4.1) 中的证法, 可证明 f 是 X 到 $[0,1]$ 的连续函数且 $f(x) = 0$, $f(F) \subset \{1\}$, 所以 X 是完全正则空间. 证完.

定理 4.5.5 设 $(X, \mathscr{T})$ 是完全正则空间, 则 X 上存在导出拓扑 $\mathscr{T}$ 的一致结构的基.

证明 对每一点 $x \in X$ 及点 x 的每一开邻域 U, 可以构造连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使 $f(x) = 0$, $f(X - U) \subset \{1\}$, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{U}(n, x, U) = \{f^{-1}(S'_n(r)) : r \in [0,1]\},$$

这里

$$S'_n(r) = [0,1] \cap (r - 1/3^n, r + 1/3^n).$$

由例 4.5.1 及 f 的连续性, 易知 $\mathscr{U}(n, x, U)$ 是 X 的开覆盖且满足

$$\mathscr{U}(n+1, x, U) \overset{*}{<} \mathscr{U}(n, x, U) \ (n \in \mathbb{N}). \tag{4.5.5}$$

此外, 可证

$$\mathrm{st}(x, \mathscr{U}(1, x, U)) \subset U. \tag{4.5.6}$$

因 $\mathscr{U}(1, x, U) = \{f^{-1}(S'_1(r)) : r \in [0,1]\}$, 而 $S'_1(r) = [0,1] \cap (r - 1/3, r + 1/3)$. 由于

$$r \in [0, 1/3) \Leftrightarrow 0 \in (r - 1/3, r + 1/3) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S'_1(r)),$$

所以

$$\mathrm{st}(x, \mathscr{U}(1, x, U)) = \cup\{f^{-1}(S'_1(r)) : r \in [0, 1/3)\}.$$

上式右端按 f 的像包含于 $[0,1)$, 从而上式右端包含于 U. (4.5.6) 式得证. 置

$$\Phi = \{\mathscr{U}(n, x, U) : x \in X, U \ \text{是}\ x \ \text{的开邻域},\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$\Psi = \{\mathscr{U}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{U}_k : \mathscr{U}_i \in \Phi,\ i = 1, 2, \cdots, k;\ k \in \mathbb{N}\}.$$

由 (4.5.5) 易知 Ψ 满足 (U2), (U3)①. 因 X 是 T_1 的, 由 (4.5.6), (4.5.5) 易知 Ψ 满足 (U4), 所以 Ψ 是 X 上的一致结构的基. 由 (4.5.2) 式 (见定理 4.5.2) 及 (4.5.6) 知 Ψ

① 一般地说, 如 $\mathscr{V}_i \overset{*}{<} \mathscr{U}_i \ (i = 1, 2, \cdots, k)$, 则 $\mathscr{V}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{V}_k \overset{*}{<} \mathscr{U}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{U}_k$.

导出的拓扑就是 $\mathscr{T}$. 事实上, 设 Ψ 导出的拓扑为 $\mathscr{T}'$, 对每一 $U \in \mathscr{T}$, 每一 $x \in U$, 由 (4.5.6) 及 (4.5.2) 知 $U \in \mathscr{T}'$; 反之, 对每一 $U' \in \mathscr{T}'$, 每一 $x' \in U'$, 由 (4.5.2) 及每一 $\mathrm{st}(x', \mathscr{U}) \in \mathscr{T}$, 因 $\mathscr{U} \in \Psi$ 是开于 $\mathscr{T}$ 的覆盖, 故 $U' \in \mathscr{T}$. 证完.

类似于拓扑空间的可度量化, 引入如下概念.

定义 4.5.3 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 称为**可一致化** (uniformizable), 如果存在 X 上的一致结构, 这一致结构导出拓扑 $\mathscr{T}$.

由定理 4.5.4 和定理 4.5.5 得下述定理, 比拓扑空间度量化定理简单.

定理 4.5.6 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 可一致化当且仅当此空间是完全正则的.

对任意集 X, 称积集 $X \times X$ 的子集 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ 为 $X \times X$ 的**对角线** (diagonal); 称 $X \times X$ 的子集 D 之包含 Δ 且满足条件 "对 $x, y \in X$, $(x, y) \in D \Rightarrow (y, x) \in D$" 者为对角线 Δ 的**对称域** (symmetric entourage). 设 D 是 Δ 的对称域, 记 $D \circ D = \{(x, y) : 存在\ z \in X, 使\ (x, z), (z, y) \in D\}$.

定理 4.5.7 设 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 是集 X 的一致结构 (或某一致结构的基), 对每一覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$ $(\alpha \in A)$, 置

$$D_\alpha = \cup\{U \times U : U \in \mathscr{U}_\alpha\}, \ \mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in A\},$$

则每一 D_α 是 Δ 的对称域且 $\mathscr{D}$ 满足如下条件:

(i) 如 $D_\alpha, D_\beta \in \mathscr{D}$, 则存在 $D_\gamma \in \mathscr{D}$ 使 $D_\gamma \subset D_\alpha \cap D_\beta$;

(ii) 对每一 $D_\alpha \in \mathscr{D}$, 存在 $D_\beta \in \mathscr{D}$ 使 $D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha$;

(iii) $\bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha = \Delta$.

证明 每一 D_α 是 Δ 的对称域是明显的. 下证 $\mathscr{D}$ 满足上述条件, 为此先给下列两式:

$$\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha \Rightarrow D_\beta \subset D_\alpha; \tag{4.5.7}$$

$$\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha \Rightarrow D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha. \tag{4.5.8}$$

(4.5.7) 式显然成立. 下证 (4.5.8) 式, 设 $(x, y) \in D_\beta \circ D_\beta$, 则存在 $z \in X$, 使 (x, z), $(z, y) \in D_\beta$, 从而存在 $U_\beta \in \mathscr{U}_\beta$ 使 $(x, z) \in U_\beta \times U_\beta$, 得 $x, z \in U_\beta$. 同理, 存在 $U_{\beta'} \in \mathscr{U}_\beta$ 使 $z, y \in U_{\beta'}$, 于是 $U_\beta \cap U_{\beta'} = \varnothing$. 因 $\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha$, $U_\beta \cup U_{\beta'} \subset$ 某 $U_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$. 所以 $x, y \in U_\alpha$, $(x, y) \in U_\alpha \times U_\alpha \subset D_\alpha$. (4.5.8) 式得证.

设 $D_\alpha, D_\beta \in \mathscr{D}$, 由 (U2), 对 $\alpha, \beta \in A$, 存在 $\gamma \in A$, 使 $\mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\alpha, \mathscr{U}_\gamma < \mathscr{U}_\beta$. 由 (4.5.7), $D_\gamma \subset D_\alpha$, $D_\gamma \subset D_\beta$, 从而 $D_\gamma \subset D_\alpha \cap D_\beta$. $\mathscr{D}$ 满足 (i). 由 (U3) 及 (4.5.8) 式知 $\mathscr{D}$ 满足 (ii). 下证 $\mathscr{D}$ 满足 (iii). 如若不然, 对 $x \neq y$ 而有 $(x, y) \in \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha$, 则 (x, y) 属于每一个 D_α, 也就是每一个 $\mathscr{U}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ 中有元 U_α 使 $x, y \in U_\alpha$, 这与 (U4) 矛盾. 证完.

定理 4.5.8 (度量化引理)　设 $D_0, D_1, \cdots, D_i, \cdots$ 是积集 $X \times X$ 的对角线 $\varDelta$ 的对称域且满足

$$D_0 = X \times X,\ D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subset D_i\ (i \in \mathbb{N}), \tag{4.5.9}$$

则集 X 上存在伪度量 ρ 使

$$D_i \subset \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant 1/2^i\} \subset D_{i-1}\ (i \in \mathbb{N}).$$

证明　定义映射 $f : X \times X \to [0, 1]$ 使

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} D_i, \\ 1/2^i, & (x, y) \in D_i - D_{i+1} (i = 0, 1, \cdots), \end{cases}$$

则有

$$f(x, x) = 0,\ f(x, y) = f(y, x). \tag{4.5.10}$$

对任意 $x, y \in X$, 定义 $\rho(x, y)$ 为所有数 $\sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1}, x_i)$ 的最大下界, 这里 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 是 X 的任意有限个点且 $x_0 = x,\ x_k = y$. 由 (4.5.10), $\rho(x, x) = 0$ 及 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, 且由 ρ 的定义知满足三角不等式. 所以 ρ 是 X 上的伪度量 (注意, 如果 $\{D_i\}_{i=0}^{\infty}$ 更满足 $\bigcap_{i=0}^{\infty} D_i = \varDelta$, 则由 $f(x, y)$ 的定义可知, 从而得到的 ρ 是 X 上的度量).

为了证明余下的部分, 可先证明下式:

$$\frac{1}{2} f(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant f(x, y). \tag{4.5.11}$$

(4.5.11) 式的右半部分 (第二个 "$\leqslant$") 可由 ρ 定义中的 "下界" 得到. 为了证明 (4.5.11) 式的左半部分 (第一个 "$\leqslant$") 只要证明式 (4.5.12)

$$\frac{1}{2} f(x, y) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1}, x_i) \tag{4.5.12}$$

对 X 的任意有限点组 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ (这里 $x_0 = x,\ x_k = y$) 成立. 这时, (4.5.11) 式的左半部分可由 (4.5.12) 及 ρ 的定义 ("最大" 下界) 而得到. 下证 (4.5.12) 式成立. 用归纳法, 对 $k = 1$, (4.5.12) 式显然成立. 设 $k < m$ 时, (4.5.12) 式成立, 现证 $k = m$ 情况. 考察点组 $x_0, x_1, \cdots, x_m$, 这里 $x_0 = x,\ x_m = y$, 并设 $a = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$, 当 $a \geqslant 1/2$, 由于 $f(x, y) \leqslant 1$, (4.5.12) 式对 $k = m$ 成立. 故下设 $a < 1/2$.

(i) $a > 0$. 显然, 或者 $f(x_0, x_1) \leqslant a/2$, 或者 $f(x_{m-1}, x_m) \leqslant a/2$. 由于关于 x, y 的对称性, 不妨假设 $f(x_0, x_1) \leqslant a/2$, 设 j 是最大正整数使

$$\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2},$$

那么

$$\sum_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1}, x_i) > \frac{a}{2},$$

从而

$$\sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2}.$$

由归纳法的假设, (4.5.12) 式对 $k < m$ 成立, 故有

$$\frac{1}{2} f(x_0, x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2},\ f(x_0, x_j) \leqslant a,$$

$$\frac{1}{2} f(x_{j+1}, x_m) \leqslant \sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2},\ f(x_{j+1}, x_m) \leqslant a.$$

此外, 由于 $a = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$, 所以 $f(x_j, x_{j+1}) \leqslant a$. 设 l 是使 $1/2^l \leqslant a$ 的最小正整数, 而 $a < 1/2$, 于是 $l \geqslant 2$. 由 f 的定义, $f(x_0, x_j)$ 等的值是 $1/2^i$ 型的数及 l 的最小值, 上述三式可分别改写为

$$f(x_0, x_j) \leqslant 1/2^l,\ f(x_j, x_{j+1}) \leqslant 1/2^l,\ f(x_{j+1}, x_m) \leqslant 1/2^l.$$

从而有

$$(x_0, x_j) \in D_l,\ (x_j, x_{j+1}) \in D_l,\ (x_{j+1}, x_m) \in D_l$$

(一般地说, 易验证 $f(x, y) \leqslant 1/2^i \Leftrightarrow (x, y) \in D_i$). 于是由 (4.5.9), $(x_0, x_m) = (x, y) \in D_{l-1}$, 从而 $f(x, y) \leqslant 1/2^{l-1} \leqslant 2a$, 即 $f(x, y)/2 \leqslant a$. 所以 (4.5.12) 式在 $a > 0$ 时对 $k = m$ 成立.

(ii) $a = 0$. 这时对 $i = 1, 2, \cdots, m$, $f(x_{i-1}, x_i) = 0$. 从而由 f 的定义, $(x_{i-1}, x_i) \in D_j$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$. 故有 $(x, y) \in D_j \circ D_j \circ \cdots \circ D_j$ (m 个 D_j) 对 $j = 0, 1, 2, \cdots$ 成立. 由 (4.5.9), $(x, y) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$. 所以 $f(x, y) = 0$. (4.5.12) 式在 $a = 0$ 时对 $k = m$ 成立. 到此 (4.5.12) 式得证. 从而 (4.5.11) 式得证.

现在证明本定理的余下部分, 置 $E = \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant 1/2^i\}$. 若 $(x, y) \in E$, 则 $\rho(x, y) \leqslant 1/2^i$, 由 (4.5.11) 左半, $f(x, y)/2 \leqslant 1/2^i$, 即 $f(x, y) \leqslant 1/2^{i-1}$, $(x, y) \in D_{i-1}$, 所以 $E \subset D_{i-1}$. 另一方面, 若 $(x, y) \in D_i$, 则 $f(x, y) \leqslant 1/2^i$, 由 (4.5.11) 右半, $\rho(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant 1/2^i$, $(x, y) \in E$, 所以 $D_i \subset E$. 证完.

定义 4.5.4 一致空间 X 称为**可度量化** (metrizable), 如果 X 上存在度量 ρ 使由开球组成的覆盖 $\mathscr{U}_n = \{S_{1/n}(x) : x \in X\}$ 的可数族 $\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 形成这一致结构的基.

定理 4.5.9 (一致空间度量化定理) 一致空间可度量化当且仅当具有由可数个覆盖形成的一致结构的基.

证明 必要性是显然的 (见例 4.5.1). 下证充分性.

设 $\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 上的一致结构, $\{\mathscr{U}_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是这一致结构的可数基. 置 $D_\alpha = \cup\{U \times U : U \in \mathscr{U}_\alpha\}$, 由于 $\mathscr{U}_\beta \overset{*}{<} \mathscr{U}_\alpha \Rightarrow D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha$ (定理 4.5.7 的 (4.5.8) 式), 可以选取 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 中的元 $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, 使 $\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}} \overset{*}{<} \mathscr{U}_{\alpha_i}$ 及 $D_i = \cup\{U \times U : U \in \mathscr{U}_{\alpha_i}\}$, 满足 $D_{i+1} \circ D_{i+1} \circ D_{i+1} \subset D_i$ 且 $\mathscr{U}_{\alpha_i} < \mathscr{U}_i$. 由定理 4.5.8, 存在 X 上的度量 ρ (因 $\{\mathscr{U}_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是一致结构的基, 由定理 4.5.7 的 (iii) 及 $\mathscr{U}_{\alpha_i} < \mathscr{U}_i$ 知 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} D_i = \Delta$), 满足

$$\left\{(x,y) : \rho(x,y) \leqslant \frac{1}{2^{i+1}}\right\} \subset D_i \ (i \in \mathbb{N}). \tag{4.5.13}$$

下证

$$\{S_{1/2^{i+2}}(x) : x \in X\} < \mathscr{U}_i \ (i \in \mathbb{N}). \tag{4.5.14}$$

对每一 $y \in S_{1/2^{i+2}}(x)$, $\rho(x,y) < 1/2^{i+2}$, 由 (4.5.13), $(x,y) \in D_{i+1}$. 从而 $x, y \in$ 某 $U \in \mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}$. 所以 $S_{1/2^{i+2}}(x) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_{i+1}})$. 由于 $\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}} \overset{*}{<} \mathscr{U}_{\alpha_i}$, $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}) \subset$ 某 $U' \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$, 所以 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}) : x \in X\} < \mathscr{U}_{\alpha_i} < \mathscr{U}_i$. 从而 (4.5.14) 得证. 从而易知, $\{\{S_{1/n}(x) : x \in X\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 的基. 由定义 4.5.4 得证. 证完.

由定理 4.4.9, 容易得到下述经典的 Alexandroff-Urysohn 度量化定理.

定理 4.5.10 (Alexandroff-Urysohn 度量化定理[8]) 拓扑空间 X 可度量化, 当且仅当 X 是 T_0 的且存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(i) $\mathscr{U}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{U}_n (n \in \mathbb{N})$;

(ii) $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 $x \in X$ 的邻域基.

证明 必要性是明显的. 下证充分性. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 由 (i), 开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (U2), (U3). 由于 X 是 T_0 的及 (ii), $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (U4), 所以 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 组成 X 上的一致结构的基 (定理 4.5.1). 由定理 4.5.2 的 (4,5.2) 式, 可知这一致结构导出 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$, $(X, \mathscr{T})$ 是可一致化空间 (定义 4.5.3). 由定理 4.5.9 得证. 证完.

一致空间是拓扑空间, 可以考察子空间、积空间与相应的一致结构关系.

定理 4.5.11 可一致化空间的子空间是可一致化空间.

证明 设一致空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 导出拓扑 $\mathscr{T}$, $X' \subset X$. 置 $\mathscr{U}'_\alpha = \{U \cap X' : U \in \mathscr{U}_\alpha\}$, 显然 $\{\mathscr{U}'_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 X' 上的一致结构的基, 且此基导出子空间 X' 上的相对拓扑. 证完.

定理 4.5.12 可一致化空间的任意积空间是可一致化空间.

证明 对每一 $\gamma \in \Gamma$, 设 $(X_\gamma, \mathscr{T}_\gamma)$ 是可一致化空间, 具有一致结构 $\{\mathscr{U}^\gamma_\alpha : \alpha \in A_\gamma\}$ 导出拓扑 $\mathscr{T}_\gamma$. 置

$$\begin{aligned}\Phi = \{&\mathscr{U}^{\gamma_1}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathscr{U}^{\gamma_k}_{\alpha_k} \times \prod\{X_\gamma : \gamma \neq \gamma_i,\ i = 1, 2, \cdots, k\} : \\ &\alpha_i \in A_{\gamma_i},\ \gamma_i \in \Gamma,\ i = 1, 2, \cdots, k;\ k \in \mathbb{N}\},\end{aligned}$$

这里

$$\mathscr{U}_{\alpha_1}^{\gamma_1}\times\cdots\times\mathscr{U}_{\alpha_k}^{\gamma_k}=\{U_{\alpha_1}^{\gamma_1}\times\cdots\times U_{\alpha_k}^{\gamma_k}:U_{\alpha_i}^{\gamma_i}\in\mathscr{U}_{\alpha_i}^{\gamma_i},\ i=1,2,\cdots,k\}.$$

容易验证 Φ 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 上的一致结构的基且导出此积拓扑. 证完.

定义 4.5.5[398] 拓扑空间的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**正规覆盖** (normal covering), 如果存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\mathscr{U}_{n+1}\overset{*}{<}\mathscr{U}_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 及 $\mathscr{U}_1<\mathscr{U}$.

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间, $\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 X 上的一致结构导出拓扑 $\mathscr{T}$. 由 (U3) 及定理 4.5.3 的 (ii), 每一 $\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in A)$ 是正规覆盖. 设 Φ' 是空间 $(X,\mathscr{T})$ 的所有正规覆盖的全体. 由正规覆盖的定义, Φ 满足 (U1), (U3). 因 $\Phi'\supset\Phi$(Φ 满足 (U4)), Φ' 满足 (U4). 由定理 4.5.5 证明中的方法, Φ' 中元 (正规覆盖) 的有限交仍是正规覆盖, 即 Φ' 关于有限交是封闭的, 故 Φ' 满足 (U2), 所以 Φ' 也是 X 上的一致结构. 由于 $(X,\mathscr{T})$ 是可一致化空间, 从而是完全正则的, 由定理 4.5.5 的证明知 Φ' 导出拓扑 $\mathscr{T}$①. 由于 $\Phi\subset\Phi'$, 可以称 Φ' 是导出拓扑 $\mathscr{T}$ 的最精的一致拓扑结构.

由上述分析可知一致化的拓扑空间的一致结构不是惟一的.

定理 4.5.13 设可一致化的拓扑空间是紧的, 则一致结构是惟一的.

证明 只要证明: "设 $\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 上导出拓扑 $\mathscr{T}$ 的任一一致结构, 则 X 上的所有开覆盖全体 Ψ 形成这一致结构的基." 为此, 只要证明: "对任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 $\alpha\in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}$". 这样, 由 (U1), $\Psi\subset\Phi$, 然后, 由定理 4.5.3 的 (ii), Ψ 形成 Φ 的基. 用反证法. 设不然, 对任何 $\alpha\in A$, 存在 $\mathscr{U}_\alpha$ 中的元素 U_α 不能包含在 $\mathscr{U}$ 的任一元素中. 任取点 $x_\alpha\in U_\alpha$, 则 $\mathrm{st}(x_\alpha,\mathscr{U}_\alpha)$ 不能包含在 $\mathscr{U}$ 的任一元素中. 对 $\alpha,\beta\in A$, 规定 $\alpha>\beta$ 当且仅当 $\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}_\beta$, 则 A 成为定向集. 置 $\varphi(\alpha)=x_\alpha$ $(\alpha\in A)$, $\varphi(A;>)$ 形成网, $\varphi(\alpha)=x_\alpha$ $(\alpha\in A)$ 是网的元素. 因 $(X,\mathscr{T})$ 紧, 此网有聚点 x (习题 3.8). 因 $\mathscr{U}$ 是覆盖, $x\in$ 某 $U\in\mathscr{U}$. 由于 $\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 导出拓扑 $\mathscr{T}$, 存在 $\alpha_0\in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_0})\in U\in\mathscr{U}$ (定理 4.5.3 的 (i)). 取 $\alpha\in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha\overset{*}{<}\mathscr{U}_{\alpha_0}$, 易知 $\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha),\mathscr{U}_\alpha)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_0})$. 因 x 是网 $\varphi(A;>)$ 的聚点, $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$ 是 x 的邻域, 由定义 1.4.7, 存在 $\beta>\alpha$ 使 $x_\beta=\varphi(\beta)\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$. 因 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}_\alpha$ $(\beta>\alpha)$,

$$\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{U}_\beta)\subset\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{U}_\alpha)\subset\ \mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha),\mathscr{U}_\alpha)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_0})\subset U.$$

这与 x_β 的定义矛盾. 证完.

定义 4.5.6 一致空间 X 到一致空间 Y 内的映射 f 称为**一致连续的** (uniformly continuous), 如果对 Y 上的一致结构中的每一个元素 (覆盖) $\mathscr{V}$, $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是

① 按定理 4.5.5 证明中的 Ψ 的元应是正规覆盖, 故 $\Psi\subset\Phi'$. 设 Φ 导出的拓扑为 $\mathscr{T}'$, 证明全同此定理证明的最后部分, 唯这里的 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U})$ 未必属于 $\mathscr{T}$, 但因 $\mathscr{U}$ 是正规覆盖, 存在开覆盖 $\mathscr{U}_1<\mathscr{U}$, 故 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U})$ 是 x 的关于 $\mathscr{T}$ 的邻域, 相应的结论仍成立.

X 上的一致结构中的元素 (覆盖).

易知一致连续映射的复合映射是一致连续的. 如果一致空间 X 到一致空间 Y 的一致连续映射 f 是一一对应的, 且逆映射 f^{-1} 也是一致连续的, 则称 f 为**一致同构** (uniform isomorphism). 这时 X, Y 称为**一致同构的** (uniformly isomorphic).

定理 4.5.14 一致空间 X 到一致空间 Y 内的一致连续映射是连续映射.

证明 设 X, Y 上的一致结构分别是 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$, $\{\mathscr{V}_\beta : \beta \in B\}$. 设 V 是 Y 中的开集, 要证 $U = f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 对任一 $x \in U$, $f(x) \in V$, 由定理 4.5.2 的 (4.5.2) 式, 存在 $\beta \in B$, 使 $\mathrm{st}(f(x), \mathscr{V}_\beta) \subset V$. 由一致连续性, $f^{-1}(\mathscr{V}_\beta) \in \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$. 由于一般地有 $\mathrm{st}(y, \mathscr{V}) \subset V \Leftrightarrow \mathrm{st}(f^{-1}(y), f^{-1}(\mathscr{V})) \subset f^{-1}(V)$, $\mathrm{st}(x, f^{-1}(\mathscr{V}_\beta)) \subset \mathrm{st}(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(\mathscr{V}_\beta)) \subset f^{-1}(V) = U$. 由上述 (4.5.2) 式, 知 U 是 X 中的开集. 证完.

定理 4.5.15 设 f 是一致空间 X 到一致空间 Y 内的连续映射, 且 X 的一致结构是由所有正规覆盖的全体组成, 则 f 是一致连续的.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是 Y 上一致结构中的元, $\mathscr{V}$ 应是一正规覆盖 (定义 4.5.5), 即存在 Y 的开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\mathscr{V}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{V}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 及 $\mathscr{V}_1 < \mathscr{V}$, 从而易知 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 的覆盖, $f^{-1}(\mathscr{V}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ 是 X 的开覆盖且 $f^{-1}(\mathscr{V}_{n+1}) \overset{*}{<} f^{-1}(\mathscr{V}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ 及 $f^{-1}(\mathscr{V}_1) < f^{-1}(\mathscr{V})$. 所以 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是正规覆盖. 由假设, $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 的一致结构中的元素. 所以 f 是一致连续的. 证完.

推论 4.5.1 紧的一致空间 X 到一致空间 Y 内的连续映射是一致连续的.

证明 上述定理 4.5.15 的证明实质在于 X 上的一致结构是最精的, 而定理 4.5.13 说明紧空间 X 上的一致结构是惟一的, 从而是最精的. 证完.

前面所述基本上是 Tukey 的理论. 在定理 4.5.7 中微露 Weil 理论的端倪, 下面再引入与之有关的定理.

定理 4.5.16 设 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 $X \times X$ 的对角线 $\varDelta$ 的对称域 D 所成的族, 且满足定理 4.5.7 中的条件 (i)~(iii). 置 $\mathscr{U}(D_\alpha) = \{D_\alpha[x] : x \in X\}$, 这里 $D_\alpha[x] = \{y : y \in X, (x, y) \in D_\alpha\}$. 则 $\varPhi = \{\mathscr{U}(D_\alpha) : \alpha \in A\}$ 满足条件 (U2)~(U4), 从而 $\varPhi$ 形成 X 上的一致结构的基.

证明 对 $\alpha, \beta \in A$, $D_\alpha, D_\beta \in \mathscr{D}$, 由 (i) 存在 $\gamma \in A$ 使 $D_\gamma \subset D_\alpha \cap D_\beta$, 对每一 $x \in X$, 由于 $D_\gamma[x] \subset (D_\alpha \cap D_\beta)[x] = D_\alpha[x] \cap D_\beta[x]$, $\mathscr{U}(D_\gamma) < \mathscr{U}(D_\alpha)$ 及 $\mathscr{U}(D_\gamma) < \mathscr{U}(D_\beta)$. 所以 $\varPhi$ 满足 (U2). 对每一 $\alpha \in A$, 由 (ii) 存在 $\beta \in A$ 使

$$D_\beta \circ D_\beta \circ D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha.$$

取定 $\mathscr{U}(D_\beta) = \{D_\beta[x] : x \in X\}$ 的元 $D_\beta[x]$. 设 $D_\beta[x] \cap D_\beta[y] \neq \varnothing$, 设 $z' \in D_\beta[x] \cap D_\beta[y]$, 则 $(x, z') \in D_\beta$, $(z', y) \in D_\beta$, 故有 $(x, y) \in D_\beta \circ D_\beta$. 对任意的 $z \in D_\beta[y]$, 即 $(y, z) \in D_\beta$, 有

$$(x,z) \in (D_\beta \circ D_\beta) \circ D_\beta \subset D_\beta \circ D_\beta \circ D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha,$$

于是 $z \in D_\alpha[x]$, 即 $D_\beta[y] \subset D_\alpha[x]$. 从而 $\mathscr{U}(D_\beta) \overset{*}{<} \mathscr{U}(D_\alpha)$, 所以 Φ 满足 (U3). 设 $x, y \in X$, $x \neq y$, 由 (iii), $(x,y) \notin \bigcap_{\alpha \in A} D_\alpha$. 存在 $\alpha \in A$ 使 $(x,y) \notin D_\alpha$. 由 (ii) 存在 $\beta \in A$ 使 $D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha$, 所以 $(x,y) \notin D_\beta \circ D_\beta$. 从而对每一 $z \in X$, $x \in D_\beta[z]$, $y \in D_\beta[z]$ 不能同时成立. 于是 $\mathscr{U}(D_\beta)$ 中没有一个元素同时包含 x 与 y, 所以 Φ 满足 (U4). 从而 Φ 形成 X 上的一致结构的基. 证完.

下面是 Weil 关于一致结构的定义:

"设 $\mathscr{D}$ 是 $X \times X$ 的对角线 Δ 的对称域 D 所成族, 如果满足下列条件:

(i) 对 Δ 的对称域 D, 如果存在 $D_\alpha \in \mathscr{D}$ 使 $D_\alpha \subset D$, 则 $D \in \mathscr{D}$;

(ii) 如果 $D_\alpha, D_\beta \in \mathscr{D}$, 则 $D_\alpha \cap D_\beta \in \mathscr{D}$;

(iii) 对每一 $D_\alpha \in \mathscr{D}$, 存在 $D_\beta \in \mathscr{D}$ 使 $D_\beta \circ D_\beta \subset D_\alpha$;

(iv) $\cap \mathscr{D} = \Delta$,

则称 $\mathscr{D}$ 是集 X 上的一个一致结构. 集 X 连同它的一致结构 $\mathscr{D}$ 称为一致空间, 记作 $(X, \mathscr{D})$. 一致结构 $\mathscr{D}$ 的子族 $\mathscr{D}'$ 称为 $\mathscr{D}$ 的基 (一致结构的基), 如果对每一 $D \in \mathscr{D}$, 存在 $D' \in \mathscr{D}'$ 使 $D' \subset D$." 从而易知 $X \times X$ 的对角线 Δ 的对称域 D 所成的族 $\mathscr{D}'$ 是 X 上的某一个一致结构的基当且仅当 $\mathscr{D}'$ 满足上述 Weil 定义中的条件 (iii), (iv) 及下述条件:

(ii′) 如果 $D_\alpha, D_\beta \in \mathscr{D}'$, 则存在 $D_\gamma \in \mathscr{D}'$ 使 $D_\gamma \subset D_\alpha \cap D_\beta$.

注意, 这里的条件 (ii′), (iii), (iv) 就是定理 4.5.7 中的条件 (i), (ii), (iii). 所以, 由定理 4.5.7 可知:

"如果 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 Tukey 意义下的一致结构 (定义 4.5.1), 置 $D_\alpha = \cup\{U \times U : U \in \mathscr{U}_\alpha\}$, 则 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 Weil 意义下的一致结构的基." 此外, 定理 4.5.16 指出:

"如果 $\mathscr{D} = \{D_\alpha : \alpha \in A\}$ 是 Weil 意义下的一致结构, 置

$$D_\alpha[x] = \{y : y \in X,\ (x,y) \in D_\alpha\},\ \mathscr{U}(D_\alpha) = \{D_\alpha[x] : x \in X\},$$

则 $\{\mathscr{U}(D_\alpha) : \alpha \in A\}$ 是 Tukey 意义下的一致结构的基."

以上说明关于一致空间的两种理论间的关系.

按 Weil 的定义, 一致连续映射可以定义为 (可与定义 4.5.6 比较):

"一致空间 X 到一致空间 Y 内的映射 f 称为**一致连续的** (uniformly continuous), 如果对 Y 上的一致结构中的每一个元素 (对角线 Δ 的对称域) D, $\phi^{-1}(D)$ 是 X 上的一致结构中的元素 (对角线 Δ 的对称域), 这里 $\phi(x,y) = (f(x), f(y))$."

在度量空间 (X, ρ), Weil 意义下的一致结构的基可由

$$\{\{(x,y) : \rho(x,y) < 1/n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

表示. 从而有

"度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (X',ρ') 内的映射 f 称为一致连续的, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\rho(x,y)<\delta$ 时, 有 $\rho'(f(x),f(y))<\varepsilon$."

习 题 4

4.1 考察定义 $[a,b]$ 上的实值连续函数所成的集 C. 对任意两个函数 $f,g\in C$, 定义

$$\rho(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|:x\in[a,b]\}.$$

试证 ρ 是 C 上的度量.

这一度量空间称为**连续函数空间** (continuous function space), 记作 $C[a,b]$, 或简记为 C.

4.2 考察在 $[a,b]$ 上的勒贝格平方可积的函数所成的集 L_2. 对任意两个函数 $f,g\in L_2$, 定义

$$\rho(f,g)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x}.$$

试证 ρ 是 L_2 上的度量.

这一度量空间称为**勒贝格可积函数空间** (Lebesgue integrable function space), 记作 $L_2[a,b]$, 或简记为 L_2.

4.3 设 A 是度量空间 (X,ρ) 的子集, $d(A)$ 是 A 的直径. 证明:

(i) $d(A)=d(\overline{A})$;

(ii) 如 A 是紧集, 则存在 $x,y\in A$, 使 $d(A)=\rho(x,y)$.

4.4 度量空间 (X,ρ) 的点列 $\{x_n\}$ 称为收敛于点 $x\in X$, 如果数列 $\{\rho(x,x_n)\}$ 收敛于零. 试证点 $x\in\overline{A}$ 当且仅当存在 A 中的点列收敛于 x.

4.5 证明度量空间 (X,ρ) 中的网 $\{\varphi(\delta):\delta\in\varDelta\}$ 收敛于点 x 当且仅当网 $\{\rho(\varphi(\delta),x):\delta\in\varDelta\}$ 收敛于零.

4.6 设 (X,ρ), (Y,σ) 是度量空间. 在度量拓扑下, X 到 Y 内的映射 f 是连续的当且仅当对每一 $x\in X$, 每一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0, \rho(x,x')<\delta\Rightarrow\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

4.7 集合 X 上的两个度量 ρ_1,ρ_2 称为**等价的** (equivalent), 如果 ρ_1,ρ_2 导出 X 上相同的拓扑.

试证 X 上的度量 ρ_1,ρ_2 是等价的, 当且仅当对每一 $x\in X$, 每一点列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(x,x_n)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(x,x_n)=0$.

4.8 试证对每一度量空间 (X,ρ),

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

是 X 上的度量, 且 ρ_1 与 ρ 是等价的.

4.9 设 f 是定义在非负实数集上的实值连续函数且满足: (i) f 是不减的; (ii) $f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$; (iii) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$. 设 (X,ρ) 是度量空间, 定义 $\rho'(x,y)=f(\rho(x,y))$. 试证 (X,ρ') 是度量空间且 ρ, ρ' 是等价的.

4.10 试证 A 是空间 X 的无处稠密子集当且仅当 $X-\overline{A}$ 稠密于 X.

4.11 试证度量空间 (X,ρ) 是全有界的当且仅当对 $\varepsilon>0$, 存在由直径小于 ε 的子集组成的有限覆盖.

4.12 试证在完全度量空间, 可数个不包括内点的闭集的并不包含内点.

4.13 证明下列论断等价:

(i) X 满足第一可数公理;

(ii) 对每一 $x\in X$, 存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $x_n\in U_n(x)\Rightarrow\{x_n\}\to x$;

(iii) 对每一 $x\in X$, 存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $x_n\in U_n(x)\Rightarrow\{x_n\}$ 以 x 为聚点.

4.14 试证具有 σ 局部有限基的正则空间是完备空间 (即每一闭集是 G_δ 集).

4.15 设 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2),\cdots,(X_k,\rho_k)$ 是度量空间. 对积集 $X_1\times\cdots\times X_k$ 的两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_k),$$

定义

$$\rho(x,y)=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)+\cdots+\rho_k(x_k,y_k).$$

试证 ρ 是积集上的度量且导出积拓扑.

4.16 试证 T_2 紧空间可度量化当且仅当它具有可数基.

4.17 (Moore 度量化定理 [15, 300, 378]) T_0 空间 X 可度量化当且仅当 X 有开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}$, 使对任意 $x\in X$, $\{\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n),\mathscr{U}_n):n\in\mathbb{N}\}$ 是点 x 的邻域基.

4.18 试证 T_2 局部紧空间的可数个开的稠密子集的交是稠密子集 (即 T_2 局部紧空间是贝尔空间).

4.19 试证连续的几乎开映射保持邻域基的势 (从而几乎开的连续闭映射保持可度量化性).

4.20 空间 X 到空间 Y 的映射 f 是几乎开的, 当且仅当满足下述条件之一:

(i) 对每一 $y\in Y$, 存在 $x\in f^{-1}(y)$, x 具有开邻域基 $\mathscr{U}=\{U\}$, 使 $f(U)$ $(U\in\mathscr{U})$ 是 Y 中的开集;

(ii) 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 则 $\{\mathrm{Int}f(U):U\in\mathscr{U}\}$ 是 Y 的开覆盖.

4.21 正规空间 X 称为 **totally 正规的** (totally normal [111]), 如果 X 的每一开集 G 是开的 F_σ 子族 $\{G_\alpha\}$ 的并, 且 $\{G_\alpha\}$ 在 G 中是局部有限的 (即对每一 $x\in G$, 存在 x 的邻域 $U(x)$ 仅与 $\{G_\alpha\}$ 中有限个元素相交). 试证明:

(i) 完备正规空间是 totally 正规的;

(ii) T_2 遗传仿紧空间 (即每一子空间是仿紧的) 是 totally 正规的 [111];

(iii) totally 正规空间的子空间是 totally 正规的 (从而 totally 正规空间是遗传正规空间, 即完全正规空间).

4.22 空间 X 到空间 Y 的映射 f 称为**拟开的** (quasi-open), 如果 X 的不空开集 U 的像 $f(U)$ 的内核不空 (即 $\mathrm{Int}f(U)\neq\varnothing$). 试证: 设 $f:X\to Y$ 是拟开映射, E 是 Y 中的稠密子集, 则 $f^{-1}(E)$ 是 X 中的稠密子集.

4.23 试证拟开的连续映射保持贝尔空间.

4.24 集 X 上的两个度量 ρ_1,ρ_2 称为**一致等价的** (uniformly equivalent), 如果对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$ 使对任意 $x,x'\in X$ 有

$$\rho_1(x,x')<\delta_1\Rightarrow\rho_2(x,x')<\varepsilon\ \text{及}\ \rho_2(x,x')<\delta_2\Rightarrow\rho_1(x,x')<\varepsilon.$$

显然, 一致等价的度量是等价的. 试给出数直线上的两个度量, 它们是等价的, 但不是一致等价的.

4.25 试验证定理 4.1.9 中的度量 ρ' 一致等价于度量 ρ, 习题 4.8 中的度量 ρ_1 一般说不一致等价于 ρ.

4.26 设 ρ_i, σ_i 是集 $X_i(i=1,2,\cdots)$ 上的一致等价的度量且都界于 1(即对任何 $x,x'\in X_i$, $\rho_i(x,x')\leqslant 1$, $\sigma_i(x,x')\leqslant 1$). 置

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i),\ \sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sigma_i(x_i,y_i).$$

试验证 ρ,σ 是 $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ 上的一致等价度量.

4.27 设 f 是度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (Y,σ) 的一致连续映射. 设 (X,ρ) 是全有界的, 则 (Y,σ) 是全有界的.

4.28 设度量空间 (X,ρ) 是全有界的, 而度量 ρ 一致等价于 X 上的另一度量 σ, 则度量空间 (X,σ) 是全有界的,

4.29 一致空间 X 称为**全有界的一致空间** (totally bounded uniform space), 如果它的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 中的每一个覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$ 具有有限子覆盖. 一致空间 X 上的滤子 $\mathscr{F}$ 称为**柯西滤子** (Cauchy filter), 如果对每一 $\mathscr{U}_\alpha$ 存在 $F\in\mathscr{F}$ 及 $U\in\mathscr{U}_\alpha$ 使 $F\subset U$. 一致空间 X 上的网 $\varphi(\varDelta;>)$ 称为**柯西网** (Cauchy net), 如果对每一 $\mathscr{U}_\alpha$ 存在 $U\in\mathscr{U}_\alpha$ 使这网终留于 U. 一致空间 X 称为**完全的一致空间** (complete uniform space), 如果 X 上的每一柯西滤子收敛. 试证:

(i) 完全的一致空间 X 的子空间 E 是完全的一致空间当且仅当 E 闭于 X;

(ii) 一致空间 X 是紧的当且仅当 X 是全有界的且完全的一致空间;

(iii) 一致空间 X 是完全的一致空间当且仅当 X 上的每一柯西网收敛;

(iv) 一致空间是全有界的一致空间当且仅当它的一致结构具有由有限覆盖组成的基.

4.30(Birkhoff-Kakutani 度量化定理 [47, 226]) 拓扑群是可度量化的当且仅当它是第一可数空间.

4.31(Weil 度量化定理 [409]) 一致空间 X 可度量化当且仅当 X 在 Weil 意义下的一致结构具有可数基.

第5章　仿紧空间

在 3.5 节曾引入仿紧空间 (定义 3.5.5), 它是紧空间与度量空间的共同推广. 在 3.5 节中证明了仿紧空间的一些性质 (定理 3.5.7～ 定理 3.5.10). 在 4.3 节的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6 和定理 4.3.7) 及 4.4 节的 Morita-Hanai-Stone 定理 (定理 4.4.2) 都与仿紧性概念有联系, 足以说明仿紧空间的重要性. 如同仿紧性, 通过空间的每一开覆盖或可数开覆盖具有特定性质的开或闭加细覆盖所描述的拓扑性质统称为**覆盖性质** (covering property). 在本章中较系统地叙述仿紧空间和可数仿紧空间的性质. 将在第 6 章叙述除仿紧空间外的其他覆盖性质.

5.1　仿紧空间的刻画

定理 5.1.1[278]　设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限开加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖具有局部有限加细覆盖;

(iv) X 的每一开覆盖具有局部有限闭加细覆盖.

上述定理可由下列两引理及引理 4.4.1 得证.

引理 5.1.1　每一 σ 局部有限开覆盖具有局部有限加细覆盖.

证明　设 $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 是某空间的 σ 局部有限开覆盖, 每一 $\mathscr{U}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 是局部有限开集族. 置 $\mathscr{V}_1 = \mathscr{U}_1$, $\mathscr{V}_n = \{U - \bigcup_{k<n} \mathscr{U}_k^* : U \in \mathscr{U}_n\}(n \geqslant 2)$, 这里 $\mathscr{U}_k^* = \cup\{U : U \in \mathscr{U}_k\}$. 容易验证 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限加细覆盖. 证完.

引理 5.1.2　设 X 是正则空间, 每一开覆盖具有局部有限加细覆盖, 则也具有局部有限闭加细覆盖.

证明　设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的任一开覆盖. 对每一 $x \in X$, $x \in$ 某 U_α. 由正则性, 存在 x 的开邻域 V_x 使 $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_\alpha$. 置 $\mathscr{V} = \{V_x\}_{x\in X}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖. 由假设, 存在局部有限覆盖 $\mathscr{W} = \{W_\beta\}_{\beta\in B}$ 加细 $\mathscr{V}$, 则 $\{\overline{W}_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限闭加细覆盖. 证完.

定理 5.1.1 的证明　(i) $\Rightarrow$ (ii), 显然; (ii) $\Rightarrow$ (iii), 由引理 5.1.1; (iii) $\Rightarrow$ (iv), 由引理 5.1.2; (iv) $\Rightarrow$ (i), 由引理 4.4.1 得证. 证完.

推论 5.1.1[301]　正则 Lindelöf 空间是仿紧空间.

回忆前面定义 4.3.2 的点星加细及星加细概念.

定理 5.1.2[278, 374]　设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖具有点星开加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖具有星开加细覆盖;

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖.

上述定理可由下列三引理得证.

引理 5.1.3　如果 X 的每一开覆盖具有局部有限闭加细覆盖, 则也具有点星开加细覆盖.

证明　设 $\{F_t\}_{t\in T}$ 是 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限闭加细覆盖. 对每一 $t\in T$, 存在 $\alpha(t)\in A$ 使 $F_t\subset U_{\alpha(t)}$. 置

$$T(x)=\{t:t\in T,x\in F_t\}\ (x\in X);$$

$$V(x)=\bigcap_{t\in T(x)}U_{\alpha(t)}\cap\Big(X-\bigcup_{t\notin T(x)}F_t\Big).\tag{5.1.1}$$

由 $\{F_t\}_{t\in T}$ 的局部有限性, 知 $T(x)$ 是 T 的有限子集, $V(x)$ 是包含 x 的开集, $\mathscr{V}=\{V(x)\}_{x\in X}$ 是 X 的开覆盖. 下证 $\mathscr{V}$ 点星加细 $\mathscr{U}$.

对 $x_0\in X$, 取定 $t_0\in T(x_0)$, 由 (5.1.1) 知: 如 $x_0\in V(x)$, 而 $x_0\in F_{t_0}$, 则 $t_0\in T(x)$, 从而 $V(x)\subset U_{\alpha(t_0)}$, 所以

$$\mathrm{st}(x_0,\mathscr{V})=\cup\{V(x):V(x)\in\mathscr{V},x_0\in V(x)\}\subset U_{\alpha(t_0)}.$$

证完.

引理 5.1.4　设覆盖 $\mathscr{U}=\{A_s\}_{s\in S}$ 是覆盖 $\mathscr{V}=\{B_t\}_{t\in T}$ 的点星加细覆盖, 而 $\mathscr{V}$ 是覆盖 $\mathscr{W}=\{C_w\}_{w\in W}$ 的点星加细覆盖, 则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{W}$ 的星加细覆盖.

证明　考察某固定的 $s_0\in S$. 对每一 $x\in A_{s_0}$ $(A_{s_0}\in\mathscr{U})$, 取 $t(x)\in T$ 使

$$A_{s_0}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\subset B_{t(x)},\tag{5.1.2}$$

从而

$$\mathrm{st}(A_{s_0},\mathscr{U})=\bigcup_{x\in A_{s_0}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\subset\bigcup_{x\in A_{s_0}}B_{t(x)}.\tag{5.1.3}$$

取某固定的 $x_0\in A_{s_0}$, 由 (5.1.2), $x_0\in B_{t(x)}$ $(\forall\ x\in A_{s_0})$, 所以

$$\bigcup_{x\in A_{s_0}}B_{t(x)}\subset\ \mathrm{st}(x_0,\mathscr{V}).\tag{5.1.4}$$

由 (5.1.3) 及 (5.1.4), 有

$$\mathrm{st}(A_{s_0},\mathscr{U})\subset \ \mathrm{st}\ (x_0,\mathscr{V})\subset \text{某 } C_w\in\mathscr{W}.$$

证完.

引理 5.1.5 如果 X 的每一开覆盖具有星开加细覆盖, 则 X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$ 是空间 X 的开覆盖. 置 $\mathscr{U}_0=\mathscr{U}$, 设 $\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2,\cdots$ 是 X 的开覆盖序列满足下列条件:

$$\mathscr{U}_{n+1} \text{ 星加细 } \mathscr{U}_n \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{5.1.5}$$

对每一 $s\in S$ 及每一 $n=1,2,\cdots$, 置

$$U_{s,n}=\{x:\ \text{存在 } x \text{ 的邻域 } V \text{使 } \mathrm{st}(V,\mathscr{U}_n)\subset U_s\}. \tag{5.1.6}$$

对每一 $n=1,2,\cdots$, 显然 $\{U_{s,n}\}_{s\in S}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖. 下面证明

$$x\in U_{s,n} \text{ 及 } y\notin U_{s,n+1}\Rightarrow \text{ 不存在 } U\in\mathscr{U}_{n+1} \text{ 使 } x,y\in U. \tag{5.1.7}$$

由 (5.1.5), 对每一 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$, 存在 $W\in\mathscr{U}_n$ 使 $\mathrm{st}(U,\mathscr{U}_{n+1})\subset W$. 如果 $x\in U\cap U_{s,n}$, 则 $W\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U_s$, 所以 $\mathrm{st}(U,\mathscr{U}_{n+1})\subset U_s$. 由 (5.1.6), $U\subset U_{s,n+1}$, 从而 $y\notin U_{s,n+1}\Rightarrow y\notin U$.

把集 S 良序化, 置

$$V_{s,n}=U_{s,n}-\overline{\bigcup_{s'<s}U_{s',n+1}}. \tag{5.1.8}$$

对任意不同的 $s_1,s_2\in S$, 按 $s_1<s_2$ 或 $s_2<s_1$, 由 (5.1.8) 分别得

$$V_{s_2,n}\subset X-U_{s_1,n+1} \text{ 或 } V_{s_1,n}\subset X-U_{s_2,n+1}.$$

如果 $x\in V_{s_1,n}$, $y\in V_{s_2,n}$, 则由 (5.1.7), 不存在 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$ 使 $x,y\in U$, 即 $U\cap V_{s_1,n}\neq\varnothing\Rightarrow U\cap V_{s_2,n}=\varnothing$, 所以对每一 $n=1,2,\cdots$, 开集族 $\{V_{s,n}\}_{s\in S}$ 是离散的.

下证 $\{V_{s,n}\}_{s\in S,n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的覆盖. 对任一 $y\in X$, 对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\{U_{s,n}\}_{s\in S}$ 是覆盖. 设 s_n 是 S 中的最小元之使 $y\in U_{s,n}$ 者, 把 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的最小元记作 $s(y)$, 取 n 是对应于 $s(y)=s_n$ 的某一正整数. 从而 $y\in U_{s(y),n}$, $y\notin U_{s,n+2}$ $(s<s(y))$. 对任何 $x\in U_{s,n+1}$ $(s<s(y))$, 由 (5.1.7) 不存在 $U\in\mathscr{U}_{n+2}$ 使 $x,y\in U$. 所以

$$\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_{n+2})\cap\Big(\bigcup_{s<s(y)}U_{s,n+1}\Big)=\varnothing.$$

由 (5.1.8), $y \in V_{s(y),n}$. 证完.

定理 5.1.2 的证明 (i) ⇒ (ii), 由定理 5.1.1 的 (iv) 及引理 5.1.3; (ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (iv), 分别由引理 5.1.4 和引理 5.1.5; (iv) ⇒ (i), 由定理 5.1.1 的 (ii) 得证. 证完.

定义 5.1.1[398] T_1 空间 X 称为**满正规空间** (fully normal space), 如果 X 的每一开覆盖具有星开加细覆盖.

定理 5.1.3[374] 空间 X 是满正规空间当且仅当 X 是 T_2 仿紧空间.

证明 必要性. 由引理 5.1.5 知 X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖, 从而更是 σ 局部有限的. 易证满正规空间是正规的 (习题 5.3), 从而是正则的. 由定理 5.1.1 知 X 是 T_2 仿紧的.

充分性. T_2 仿紧空间是正则的, 由定理 5.1.2 的 (iii) 知 X 是满正规的. 证完.

1940 年, Tukey[398] 引入满正规空间并证明度量空间是满正规的. 1948 年, Stone[374] 证明满正规性等价于 T_2 仿紧性 (定理 5.1.3), 从而得到度量空间是仿紧空间 (定理 4.3.4), 解决了 1944 年 Dieudonné[106] 引入仿紧性时提出的问题, 奠定了仿紧性在拓扑学和分析学中的重要地位. 不仅如此, Stone 在证明定理 5.1.3 时所用的方法技巧性很强. 在覆盖性质理论的论证中, 历来学者如 Michael, Burke, Worrell, Junnila 等都继承、发展、深化了 Stone 的技巧 [69]. 本书第一次介绍 Stone 的技巧是在定理 4.3.3, 在那里是用开球体现其证法的, 较有直观性, 便于理解. 目的是要早一些得到度量空间是仿紧空间这一重要结论, 使本书的前四章自成体系. 这里是第二次介绍 Stone 的证法 (引理 5.1.5). 读者可与定理 4.3.3 对看, 更好地深入理解, 逐步掌握其技巧. 引理 5.1.5 的证明较定理 4.3.3 的证明简短一些. 这是因这里只要证具有 σ 离散开加细覆盖而由定理 5.1.1 得证. 而在定理 4.3.3 必须构造既是 σ 离散又是局部有限的开加细覆盖而由仿紧性的定义得证.

Michael 在得到定理 5.1.1 后曾提出 T_2 仿紧性能否为闭映射所保持. 接着他在 1957 年引入闭包保持集族的概念 [280], 证明了:

“在正则空间中, X 是仿紧空间, 当且仅当 X 的每一开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖.”

从而解决了所提出的问题 (见定理 5.2.1). 后来, 他在 1959 年又引入垫状加细概念改进了上述结果 [281].

定义 5.1.2[280] 集族 $\mathscr{U}$ 称为**闭包保持的** (closure-preserving), 如果对任一 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, $(\cup\{U : U \in \mathscr{U}'\})^- = \cup\{\overline{U} : U \in \mathscr{U}'\}$. 可数个闭包保持集族的并称为 **$\sigma$ 闭包保持的** (σ-closure-preserving).

我们在第 3 章曾证明过, 局部有限集族 $\mathscr{U}$ 具有定义 5.1.2 的性质 (见引理 3.5.2), 所以局部有限集族 ⇒ 闭包保持集族, 其逆不真. 对闭包保持的闭集族 $\mathscr{U}$ 及空间的闭集 F, $\{U \cap F : U \in \mathscr{U}\}$ 仍是闭包保持的 (读者自证, 习题 5.5).

定义 5.1.3[281] 集族 $\mathscr{V}$ 称为**垫状于** (cushioned in) 集族 $\mathscr{U}$, 如果存在映射 $f:\mathscr{V}\to\mathscr{U}$, 使对每一 $\mathscr{V}'\subset\mathscr{V}$, $(\cup\{V:V\in\mathscr{V}'\})^-\subset\cup\{f(V):V\in\mathscr{V}'\}$. 集族 $\mathscr{V}$ 称为 **σ 垫状于** (σ-cushioned in) 集族 $\mathscr{U}$, 如果 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 且每一个 $\mathscr{V}_n$ 垫状于 $\mathscr{U}$.

当 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 时, $\mathscr{V}$ 垫状于 $\mathscr{U}$, 可置 $V_\alpha=\cup\{V:V\in\mathscr{V},\ f(V)=U_\alpha\}$, 则 $\mathscr{V}'=\{V_\alpha\}$ 仍垫状于 $\mathscr{U}$, 这时有 $f(V_\alpha)=U_\alpha$, 称 $\mathscr{V}'$ **精确地** (precisely) 垫状于 $\mathscr{U}$.

当空间的覆盖 $\mathscr{V}$ 垫状于覆盖 $\mathscr{U}$ 时, 称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的**垫状加细覆盖** (cushioned covering of refinement) 或 $\mathscr{V}$ **垫状加细** (cushioned refine) $\mathscr{U}$.

设 $\mathscr{W}$ 是开覆盖 $\mathscr{U}$ 的闭包保持闭加细覆盖, 则 $\mathscr{W}$ 也同时是 $\mathscr{U}$ 的垫状加细覆盖, 只要把 $f:\mathscr{W}\to\mathscr{U}$ 确定为对每一 $W\in\mathscr{W}$, $f(W)$ 是包含 W 的 $\mathscr{U}$ 中的某 U. 在正则空间, 开覆盖 $\mathscr{U}$ 总存在开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使 $\mathscr{V}$ 中每一元 V 的闭包 $\overline{V}$ 包含在 $\mathscr{U}$ 的某一元 U 中, 所以在正则空间 X, 每一开覆盖具有闭包保持加细覆盖蕴含每一开覆盖具有垫状加细覆盖.

定理 5.1.4[280, 281] 设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持开加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖;

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状开加细覆盖;

(v) X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖.

为了证明上述定理 5.1.4, 先证明下述引理. 这引理的证明技巧很强, 是前面所述 Stone 技巧的发展.

引理 5.1.6[281] 设 T_1 空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖, 则 X 是仿紧空间.

证明 容易证明每一开覆盖具有垫状加细覆盖蕴含 T_4 分离公理 (习题 5.7 或定理 5.1.5), 所以 T_1 空间 X 是正规的. 因此只要证明 X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖, 从而由定理 5.1.2 的 (iv) 得证. 下面先证具有 σ 互不相交开加细覆盖, 然后由正规性过渡到 σ 离散开加细覆盖.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的开覆盖, 把指标集 A 良序化. 下面对每一 $i\in\mathbb{N}$ 构造 $\mathscr{U}$ 的精确垫状加细覆盖 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$, 使对每一 $\alpha\in A$ 及 $i\in\mathbb{N}$ 满足:

$$\Big(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,i}\Big)^-\cap C_{\alpha,i+1}=\varnothing, \tag{5.1.9}$$

$$C_{\alpha,i}\cap\Big(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,i+1}\Big)^-=\varnothing. \tag{5.1.10}$$

由假设, 取 $\{C_{\alpha,1}\}_{\alpha\in A}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的精确垫状加细覆盖. 设对 $i=1,2,\cdots,n$ 已构造 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的垫状加细覆盖 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 满足 (5.1.9) 及 (5.1.10). 下面构造

$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$. 对每一 $\alpha\in A$, 置

$$U_{\alpha,n+1}=U_\alpha-\Big(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n}\Big)^-, \tag{5.1.11}$$

则 $\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖, 这是因为对 $x\in X$, 取 $\mathscr{U}$ 中包含 x 的第一个 U_α, 由于 $\{C_{\alpha,n}\}_{\alpha\in A}$ 垫状加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n})^-\subset\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$, 所以 $x\in U_{\alpha,n+1}$. 由假设, 取 $\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$ 的精确垫状加细覆盖 $\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$, 则由 (5.1.11) 可知 $(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n})^-\cap C_{\alpha,n+1}=\varnothing$ (因 $C_{\alpha,n+1}\subset U_{\alpha,n+1}$). 故满足 (5.1.9), 至于 (5.1.10), 由 (5.1.11) 可知 $C_{\alpha,n}$ 与所有 $\beta>\alpha$ 的 $U_{\beta,n+1}$ 不交, 而 $(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})^-\subset\bigcup_{\beta>\alpha}U_{\beta,n+1}$, 故 $C_{\alpha,n}\cap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})^-=\varnothing$, 满足 (5.1.10).

对每一 α 及 i, 置

$$V_{\alpha,i}=X-\Big(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_{\beta,i}\Big)^-,$$

则 $V_{\alpha,i}$ 是开集且对 $\alpha\neq\beta$, $V_{\alpha,i}\cap V_{\beta,i}=\varnothing$. 由于 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖, $V_{\alpha,i}\subset C_{\alpha,i}\subset U_\alpha$. 下面要证明 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,\ i\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X 的覆盖, 这样, $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,\ i\in\mathbb{N}\}$ 成为 $\mathscr{U}$ 的 σ 互不相交开加细覆盖. 对每一 $x\in X$, 由于每一 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ $(i\in\mathbb{N})$ 都是 X 的覆盖, 置

$$\alpha_i=\min\{\alpha\in A:x\in C_{\alpha,i}\},$$

并取正整数 k 使

$$\alpha_k=\min\{\alpha_i:i\in\mathbb{N}\}.$$

下面证明 $x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 首先由 α_k 的定义知 $x\in C_{\alpha_k,k}$. 由 (5.1.10) (让 $i=k$),

$$x\notin\Big(\bigcup_{\beta>\alpha_k}C_{\beta,k+1}\Big)^-. \tag{5.1.12}$$

由于 $\{C_{\alpha,k+2}\}_{\alpha\in A}$ 也是覆盖, 由 α_k 的定义, 存在某些 $\alpha\geqslant\alpha_k$ 使 $x\in C_{\alpha,k+2}$. 由 (5.1.9) (让 $i=k+1$), $x\notin(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,k+1})^-$. 由于 $(\bigcup_{\beta<\alpha_k}C_{\beta,k+1})^-\subset(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,k+1})^-$, 所以

$$x\notin\Big(\bigcup_{\beta<\alpha_k}C_{\beta,k+1}\Big)^-. \tag{5.1.13}$$

由 (5.1.12) 及 (5.1.13), 知 $x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 到此证明了 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,\ i\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 σ 互不相交开加细覆盖.

为了完成证明, 由假设, 存在开覆盖 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,\ i\in\mathbb{N}\}$ 的精确垫状加细覆盖 $\{D_{\alpha,i}:\alpha\in A,\ i\in\mathbb{N}\}$. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 有

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A}D_{\alpha,i}\Big)^-\subset\bigcup_{\alpha\in A}V_{\alpha,i},$$

因 X 是正规的, 存在开集 G_i 使

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A} D_{\alpha,i}\Big)^- \subset G_i \subset \overline{G}_i \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_{\alpha,i}.$$

置 $\mathscr{W}_i = \{V_{\alpha,i}\cap G_i : \alpha\in A\}$, 则 $\mathscr{W}_i$ 是离散开集族 (读者自证, 见习题 2.30). 从而 $\mathscr{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细覆盖. 证完.

定理 5.1.4 的证明 我们按下列顺序证: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) 及 (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v).

(i) $\Rightarrow$ (ii). 由定理 5.1.1 的 (ii) 及局部有限集族是闭包保持的而得证.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设空间 X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持开加细覆盖 $\mathscr{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$, 每一 $\mathscr{V}_i$ 是闭包保持的. 因 X 是正则的, 可作为每一 $\{\overline{V} : V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$. 显然, 每一 $\{\overline{V} : V\in\mathscr{V}_i\}$ 也是闭包保持的. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 置 $H_i = \cup\mathscr{V}_i$, H_i 是开集, 并设

$$\mathscr{W}_i = \Big\{\overline{V} - \bigcup_{n<i} H_n : V\in\mathscr{V}_i\Big\},\quad \mathscr{W} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_i.$$

由于 $\overline{V} - \bigcup_{n<i} H_n = \overline{V}\cap(X - \bigcup_{n<i} H_n)$, $X - \bigcup_{n<i} H_n$ 是闭集, 而 $\{\overline{V} : V\in\mathscr{V}_i\}$ 是闭包保持的, 所以 $\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的 (习题 5.5), 从而对任何 $r\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{i\leqslant r}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的. 现在要证 $\mathscr{W}$ 是闭包保持的. 设 $\mathscr{W}'\subset\mathscr{W}$, $x\in(\cup\mathscr{W}')^-$. 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 $x\in H_m$. 对每一 $W\in\mathscr{W}'\cap\mathscr{W}_i$ $(i>m)$, $W\cap H_m = \varnothing$. 所以 $x\in(\cup(\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i)))^-$. 由于 $\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的, 所以存在 $W\in\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i)\subset\mathscr{W}'$, 使 $x\in\overline{W} = W$. 到此证明了 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持闭加细覆盖.

(iii) $\Rightarrow$ (v). $\mathscr{U}$ 的每一闭包保持闭加细覆盖同时是垫状加细覆盖.

(v) $\Rightarrow$ (i). 由引理 5.1.6 得证.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). 显然, (iv) $\Rightarrow$ (v) 的证法类似于 (ii) $\Rightarrow$ (iii) (读者自己完成). 证完.

T_2 仿紧性蕴含正规性, 满足 T_4 分离公理. 其实它满足更强形式的分离公理.

定义 5.1.4[46] T_1 空间 X 称为**集态正规空间** (collectionwise normal space), 如果对 X 的每一离散闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 存在互不相交的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 使对每一 $\alpha\in A$, $F_\alpha\subset U_\alpha$.

注记 显然, 集态正规空间是正规的. 由习题 2.30 知上述定义中的 "互不相交" 可改为 "离散".

在引理 5.1.6 的证明开始时指出每一开覆盖具有垫状加细覆盖蕴含 T_4 分离公理, 其实有下列更强的结果.

定理 5.1.5 设 T_1 空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖, 则 X 是集态正规空间.

证明 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的离散闭集族. 不妨设对 $\alpha\neq\beta$, $F_\alpha\neq F_\beta$. 对 $\alpha\in A$, 置 $U_\alpha = X - \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta$, 则 $F_\alpha\subset U_\alpha$, 且对 $\alpha\neq\beta$, $F_\alpha\cap U_\beta = \varnothing$. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X

的开覆盖, 由假设, 存在垫状加细覆盖 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 置 $V_\alpha = X - (\bigcup_{\beta\neq\alpha} C_\beta)^-$, 下面验证 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是所要求的开集族. 因 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha} C_\beta)^- \subset \bigcup_{\beta\neq\alpha} U_\beta$, 而 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha} U_\beta)\cap F_\alpha = \varnothing$, 所以 $F_\alpha \subset V_\alpha$, $\alpha \in A$. 此外, 对不同的 $\alpha, \alpha' \in A$, $(\bigcup_{\beta\neq\alpha} C_\beta) \cup (\bigcup_{\beta\neq\alpha'} C_\beta) = X$, 所以 $V_\alpha \cap V_{\alpha'} = \varnothing$. 到此证明了 X 是集态正规空间. 证完.

推论 5.1.2[46] T_2 仿紧空间是集态正规空间.

证明 由定理 3.5.8 和定理 5.1.4 的 (v) 立刻得证. 证完.

注记 读者容易证明每一星加细开覆盖是垫状加细覆盖 (习题 5.9). 由定理 5.1.3 可知满正规性 (定义 5.1.1) 蕴含集态正规性.

定义 5.1.5[278] 从拓扑空间 X 到单位区间 $I = [0,1]$ 内一族连续函数 $\Phi = \{\varphi_s\}_{s\in S}$ 称为 X 的**单位分解** (partition of unity), 如果对每一 $x \in X$, $\sum_{s\in S} \varphi_s(x) = 1$, 其中 $\sum_{s\in S} \varphi_s(x) = 1$ 理解为仅有可数个 $s \in S$ 使 $\varphi_s(x) \neq 0$, 且所构成的级数收敛于 1. 单位分解称为局部有限的, 如果 $\{\varphi_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ 所形成 X 的覆盖是局部有限的. 单位分解称为从属于此空间的覆盖 $\mathscr{U}$, 如果 $\{\varphi_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖.

定理 5.1.6 (单位分解定理 [278]) 设 X 是 T_2 空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$;

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

上述刻画不仅在拓扑学中且在分析与微分几何中有很大用处. 此刻画的证明可通过下列两引理得证.

引理 5.1.7 正规空间 X 的每一局部有限开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正规空间 X 的局部有限开覆盖. 由正规性, 存在闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使对每一 $\alpha \in A$, $F_\alpha \subset U_\alpha$ (引理 4.4.2). 由 Urysohn 引理 (定理 2.4.1), 对每一 $\alpha \in A$, 存在连续函数 $f_\alpha : X \to [0,1]$ 使 $f_\alpha(x) = 0$, $x \in X - U_\alpha$; $f_\alpha(x) = 1$, $x \in F_\alpha$. 置 $f(x) = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$, 由于 $\mathscr{U}$ 是局部有限的及 f_α 的定义知 f 是 X 到实数空间 $\mathbb{R}$ 内的连续函数. 由于 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的覆盖, f 在 X 上处处不为零. 置 $\varphi_\alpha = f_\alpha/f$, 则 $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 上的单位分解. 由于 $\{\varphi_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的且加细 $\mathscr{U}$, 故 Φ 是局部有限的且从属于 $\mathscr{U}$. 证完.

引理 5.1.8 设空间 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有 X 上的单位分解 Φ 从属于 $\mathscr{U}$, 则 $\mathscr{U}$ 具有 σ 局部有限开加细覆盖.

证明 设 $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 上的单位分解从属于 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$, 所以 $\{\varphi_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $\alpha \in A$, 把开集 $\varphi_\alpha^{-1}((0,1])$ 分解为

如下可数个开集的并:

$$\varphi_\alpha^{-1}((0,1]) = \cup\{\varphi_\alpha^{-1}((1/i,1]) : i \geqslant 2\} \quad (\alpha \in A).$$

置

$$V_{\alpha,i} = \varphi_\alpha^{-1}((1/i,1]), \quad \mathscr{V} = \{V_{\alpha,i} : i \geqslant 2,\ \alpha \in A\},$$

则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖. 下证对每一 $i \geqslant 2$, $\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的, 从而 $\mathscr{V}$ 是 σ 局部有限的.

设 $x_0 \in X$, i 是某不小于 2 的正整数. 要找出 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 使 $U(x_0)$ 仅与 $\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 中有限个元相交. 因 $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是单位分解, $\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(x_0) = 1$, 可以选取 A 的有限子集 A' 使 $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x_0) > 1 - 1/i$. 由连续性, 存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使对每一 $x \in U(x_0)$, $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x) > 1 - 1/i$. $U(x_0)$ 只能与有限个 $V_{\alpha,i}$ $(\alpha \in A')$ 相交. 如若不然, $U(x_0) \cap V_{\beta,i} \neq \varnothing$, $\beta \notin A'$, 则对 $x' \in U(x_0) \cap V_{\beta,i}$, 将有 $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x') + \varphi_\beta(x') > 1$. 矛盾. 证完.

定理 5.1.6 的证明 (ii) ⇒ (iii) 是平凡的, 只要证明 (iii) ⇒ (i) ⇒ (ii).

(i) ⇒ (ii). 因 T_2 仿紧空间是正规的 (定理 3.5.8), 由引理 5.1.7 得证.

(iii) ⇒ (i). 由引理 5.1.8 知 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有 σ 局部有限开加细覆盖. 只要证明满足 (iii) 的空间 X 是正则的, 则由定理 5.1.1 得证. 为此, 下证满足 (iii) 的 T_1 空间是完全正则空间.

对于点 $x_0 \in X$ 及闭集 $F \subset X$ 使 $x_0 \notin F$, 开覆盖 $\mathscr{U} = \{X - F,\ X - \{x_0\}\}$ 具有单位分解 $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 从属于 $\mathscr{U}$. 取 $\alpha_0 \in A$, 使 $\varphi_{\alpha_0}(x_0) = a > 0$, 注意此时 $\varphi_{\alpha_0}^{-1}((0,1]) \subset X - F$ 而 $\varphi_{\alpha_0}(x) = 0$, $x \in F$. 置 $f(x) = 1 - \min\{1, \varphi_{\alpha_0}(x)/a\}$, 则 $f(x_0) = 0$; $f(x) = 1, x \in F$. 故 X 是完全正则空间. 证完.

以上关于仿紧空间的四个刻画 (定理 5.1.1、定理 5.1.2、定理 5.1.4 和定理 5.1.6) 都是在正则空间或 T_2 空间情况下做出的. 下面仿紧空间的两个刻画是不以任何分离公理为前提的, 分别由 Mack[271] 和 Junnila[219, 220] 得到的. 它们的证明要引入较多概念. 这里仅做介绍以备后面引用. 证明参见文献 [219], [220], [271].

定义 5.1.6 拓扑空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**定向的** (**全序的**、**良序的**), 如果按集的包含关系是定向的 (全序的、良序的). 开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**内核保持的** (interior-preserving), 如果对每一非空的 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, $\cap\mathscr{U}'$ 是开集.

定理 5.1.7[271] 下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一良序开覆盖具有局部有限开加细覆盖;

(iii) X 的每一定向开覆盖具有局部有限开加细覆盖;

(iv) X 的每一定向开覆盖具有局部有限闭加细覆盖.

注记　这里的 (iv) 不同于定理 5.1.1 中的 (iv), 这里不要求正则性.

定理 5.1.8[219, 220]　下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) X 的每一内核保持定向开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖, 且这覆盖的元 (闭集) 的内核之集覆盖 X;

(iii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖, 且这覆盖的元 (闭集) 的内核之集覆盖 X;

(iv) X 的每一全序开覆盖具有局部有限加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x \in X$, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x, \mathscr{V}))$.

5.2　仿紧空间的映射性质

约定　本章 5.2~5.6 节及习题 5 中的映射都是连续满映射.

定理 5.2.1 (Michael 定理 [281])　闭映射保持 T_2 仿紧空间.

证明　利用习题 5.8 及定理 5.1.4 的 (iii) 即可得证. 证完.

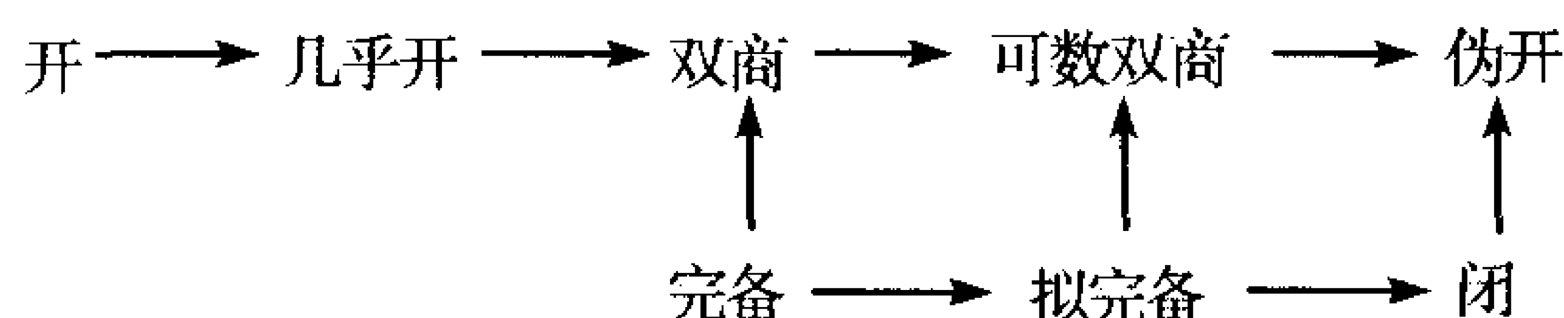
Michael 为了解决闭映射保持 T_2 仿紧性, 引入闭包保持集族证明了相应的定理 5.1.4 中的 (iii). 这一方法被后来许多学者采用.

上述定理 5.2.1 说明 "闭映射保持 T_2 仿紧性", 至于不加分离公理的仿紧性能否为闭映射保持? 文献中未见提过. 由于 5.1 节关于仿紧性的四个刻画是在分离公理的前提下得到的, 由此刻画所得的映射定理难免附加分离公理. 要想得到不加分离公理的仿紧性的映射定理, 必须仰仗不加分离公理的仿紧性的刻画, 如前节末介绍的 Mack 和 Junnila 的刻画. Mack[271] 根据他的刻画 [定理 5.1.7 的 (iv)] 证明了 "完备映射保持仿紧性" [注意, 由于不加分离性公理, 无法利用定理 5.1.1 的 (iv) 证明这结果]. Worrell[414] 在以高度技巧证明了 "闭映射保持弱仿紧性" (定理 6.2.2) 后, 宣称用类似的技巧可以证明 "既开且闭的映射保持仿紧性" 及 "T_1 仿紧空间在边缘紧的闭映射下的像是仿紧空间". 高国士 [136] 证明了 "几乎开、闭映射保持仿紧性" 以改进 Worrell 的结果并正式提出: 闭映射能否保持仿紧性 (不加分离公理)? 高国士的文章发表后, 吴利生认为稍加改动可将 "几乎开" 改为 "双商", 如下面的定理 5.2.2 所述.

定义 5.2.1　拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 称为**双商的**[285] (bi-quotient), 如果对每一 $y \in Y$ 及 X 的任一开集族 $\mathscr{U}$, $\cup\mathscr{U} \supset f^{-1}(y)$, 则存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ 使 $y \in \mathrm{Int} f(\cup\mathscr{U}')$ (当 $\mathscr{U}$ 是 X 的任一可数开集族时, 则称 f 为**可数双商的**[359] (countably bi-quotient)); f 称为**伪开的**[19] (pseudo-open), 如果对每一 $y \in Y$ 及 X 的开集 U, $U \supset f^{-1}(y)$, 则 $y \in \mathrm{Int} f(U)$; f 称为**拟完备的**[306] (quasi-perfect),

如果 f 是闭的, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数紧集 (当 $f^{-1}(y)$ 是紧集时, 称为完备映射, 见定义 3.3.1).

容易验证上述映射有下列蕴含关系:



相反的蕴含关系均不成立.

定理 5.2.2 设 $f: X \to Y$ 是由仿紧空间 X 到空间 Y 上的双商闭映射, 则 Y 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的定向开覆盖, 则 $f^{-1}(\mathscr{V}) = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ 是空间 X 的定向开覆盖. 由定理 5.1.8 之 (iii), 存在闭包保持闭覆盖 $\mathscr{U}$ 加细 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 且 $\{\mathrm{Int}U : U \in \mathscr{U}\}$ 覆盖 X. 因开覆盖 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是定向的, 可以设 $\mathscr{U}$ 关于有限并是封闭的. 因 f 是闭映射, $f(\mathscr{U}) = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$ 是空间 Y 的闭包保持闭覆盖 (习题 5.8), 显然加细 $\mathscr{V}$. $\{\mathrm{Int}U : U \in \mathscr{U}\}$ 是 X 的开覆盖. 因 f 是双商的, 对每一 $y \in Y$, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$ 使

$$y \in \mathrm{Int}f(\cup\{\mathrm{Int}U : U \in \mathscr{U}'\}) \subset \mathrm{Int}f(\cup\mathscr{U}').$$

因 $\mathscr{U}$ 关于有限并封闭, 存在某 $U \in \mathscr{U}$ 使 $U = \cup\mathscr{U}'$, 从而 $y \in \mathrm{Int}f(U)$. 到此证明了空间 Y 的定向开覆盖 $\mathscr{V}$ 具有闭包保持闭加细覆盖 $f(\mathscr{U}) = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$ 且这覆盖的元的内核之集覆盖 Y. 由定理 5.1.8 之 (iii), Y 是仿紧空间. 证完.

由于开映射、几乎开映射、完备映射都是双商映射, 故有下述推论.

推论 5.2.1 [136] 几乎开、闭映射保持仿紧性.

推论 5.2.2 [414] 开、闭映射保持仿紧性.

推论 5.2.3 [271] 完备映射保持仿紧性.

关于 Worrell 的另一结果 "边缘紧的闭映射保持 T_1 仿紧性", 其实可由推论 5.2.3 导得, 只要利用引理 4.4.8 把边缘紧闭映射过渡为完备映射并利用仿紧空间的闭子空间是仿紧的, 即由推论 5.2.3 得证.

至于高国士 [136] 提出的问题: 闭映射能否保持仿紧性 (不加分离公理)? 林寿否定地回答了这个问题 [244]. 他构作一个反例, 说明即使是 T_1 仿紧空间也不能被闭映射所保持. 这一有趣的反例放在后面介绍 (见例 6.2.1), 因为此例涉及许多尚未引入的概念, 且对后面也有用处.

由于此反例的出现, 上述定理 5.2.2 显得更有意义, 不仅是当前此方面的最好结果, 此后被改进的可能性也不多了. 有可能讨论的问题是可数双商的闭映射是否保持仿紧性 (不加分离公理).

此外, 仿紧性被完备映射的逆像所保持. 下面证明更强的结果.

设 X, Y 都是拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$ 称为 **Lindelöf 映射** (Lindelöf mapping), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

定理 5.2.3[132] 设 f 是正则空间 X 到仿紧空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射, 则 X 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 X 的开覆盖, 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的. $f^{-1}(y)$ 为 $\mathscr{U}$ 中可数个元覆盖. 记 $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{y,i} = U_y$. 由推论 1.5.1, 存在开集 V_y 使 $f^{-1}(y) \subset V_y \subset U_y$ 及 $V_y = f^{-1}(f(V_y))$ 且 $f(V_y)$ 是 Y 中开集. 置 $W_y = f(V_y)$, 则 $\{W_y\}_{y \in Y}$ 是空间 Y 的开覆盖. 因 Y 仿紧, $\{W_y\}_{y \in Y}$ 具有局部有限开加细覆盖 $\{O_\beta\}_{\beta \in B}$. 取定 $\{W_y\}_{y \in Y}$ 中包含 O_β 的一个开集为 $W_{y(\beta)}$, 则 $f^{-1}(O_\beta) \subset f^{-1}(W_{y(\beta)}) = V_{y(\beta)} \subset U_{y(\beta)}$. $\{f^{-1}(O_\beta)\}_{\beta \in B}$ 是局部有限的. $\mathscr{V}_i = \{f^{-1}(O_\beta) \cap U_{y(\beta),i}\}_{\beta \in B}$ 也是局部有限的. 从而 $\mathscr{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限开加细覆盖. 因 X 正则, 由定理 5.1.1 得证. 证完.

推论 5.2.4[176] 设 f 是空间 X 到仿紧空间 Y 上的完备映射, 则 X 是仿紧空间.

证明 因完备映射是闭 Lindelöf 映射, 在完备映射的条件下定理 5.2.3 中 X 是正则的假设可去掉. 证完.

推论 5.2.5 空间 X 是仿紧空间当且仅当 X 在完备映射下的像是仿紧空间.

证明 结合推论 5.2.3 和推论 5.2.4 得证. 证完.

5.3 仿紧空间的遗传性

在 2.2 节分离公理中述及空间的遗传性是指空间的任何子空间具有此空间的性质, 并指出满足 T_0, T_1, T_2, T_3 分离公理的空间 (从而正则空间) 都具有遗传性, 而正规空间不具有遗传性 (例 2.2.4). 设 $\mathscr{P}$ 是一个拓扑性质, 如果具有 $\mathscr{P}$ 的空间的任何闭子空间 (或开子空间) 也具有 $\mathscr{P}$, 则称性质 $\mathscr{P}$ 或具有性质 $\mathscr{P}$ 的空间具有**闭遗传性** (closed hereditary property) (**或开遗传性** (open hereditary property)). 正规空间具有闭遗传性 (习题 2.11) 且开遗传性 $\Rightarrow$ 遗传性 (定理 2.2.7 的证明).

仿紧空间的闭子空间是仿紧的 (定理 3.5.7), 故仿紧空间具有闭遗传性, 至于是否具有遗传性? 考察前面的例 2.2.4, $[0, \omega_1]$, $[0, \omega]$ 及其积 $[0, \omega_1] \times [0, \omega]$ 都是 T_2 紧空间, 从而正规仿紧空间. 这积空间具有 T_2 而非正规的子空间, 显然这子空间必非仿紧的 (定理 3.5.8). 所以仿紧空间不具有遗传性, 但也有开遗传性 $\Rightarrow$ 遗传性.

命题 5.3.1[106] 设仿紧空间 X 的任一开子空间是仿紧的, 则 X 的任何子空间是仿紧的 (即 X 是遗传仿紧空间).

证明 设 $M \subset X$ 是仿紧空间 X 的任何子空间, $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族关于子空间 M 的开集覆盖 M. 存在 X 中的开集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使 $V_\alpha = U_\alpha \cap M$, $\alpha \in A$. 置 $G = \cup\mathscr{U}$, $G \supset M$. $\mathscr{U}$ 覆盖开集 G, 由假设, $\mathscr{U}$ 关于子空间 G 具有局部有限开加细覆盖 $\mathscr{W}$, 则 $\{W \cap M : W \in \mathscr{W}\}$ 是关于子空间 M 的局部有限开覆盖, 显然加细 $\mathscr{V}$. 故子空间 M 是仿紧的. 证完.

定理 5.3.1[278] T_2 仿紧空间的 F_σ 子空间是仿紧空间 (即 T_2 仿紧性是 **F_σ 遗传性** (F_σ-hereditary property)).

证明 设 M 是 T_2 仿紧空间 X 的 F_σ 子空间. 置 $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, F_n $(n \in \mathbb{N})$ 是闭集. 设 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是子空间 M 的开覆盖, 存在 X 中的开集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $V_\alpha = U_\alpha \cap M$, $\alpha \in A$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X - F_n\}$ 是空间 X 的开覆盖, 存在局部有限开加细覆盖 $\mathscr{W}_n$. 置

$$\mathscr{B}_n = \{W \cap M : W \in \mathscr{W}_n,\ W \cap F_n \neq \varnothing\}, \quad \mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n.$$

$\mathscr{B}$ 是关于子空间 M 的 σ 局部有限开覆盖, 加细 $\mathscr{V}$. 因 T_2 仿紧空间是正则的, M 也是正则的. 由定理 5.1.1 的 (ii) 知 M 是仿紧的. 证完.

注记 上述定理 5.3.1 中 $\mathscr{B}_n$ 的局部有限性不仅是关于子空间 M 且是关于空间 X. 另外, 葛英 [157] 构造例子表明 T_1 仿紧性未必是 F_σ 遗传性.

4.1 节曾引入完备空间 (每一开集是 F_σ 集, 见定义 4.1.3) 及完备正规空间, 结合命题 5.3.1 及定理 5.3.1 得下述推论.

推论 5.3.1[108] 完备的 T_2 仿紧空间是遗传仿紧空间 (或完备正规的仿紧空间是遗传仿紧空间).

上述推论中的完备性可稍减弱使成为遗传仿紧空间的必要与充分条件.

定义 5.3.1[241] 集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为**遗传闭包保持的** (hereditarily closure-preserving), 如果对 $\alpha \in A$, 任取 $H_\alpha \subset F_\alpha$, $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是闭包保持的. 可数个遗传闭包保持集族的并称为 **σ 遗传闭包保持的** (σ-hereditarily closure-preserving).

显然, 局部有限集族 $\Rightarrow$ 遗传闭包保持集族 $\Rightarrow$ 闭包保持集族. 闭包保持而非遗传闭包保持集族的例见例 5.5.1.

定理 5.3.2[130, 428] 设 X 是 T_2 仿紧空间, 则下列论断等价:

(i) X 是遗传仿紧空间;

(ii) X 的每一开集 G 是一族开 F_σ 集的并, 且这集族在 G 中是局部有限的;

(iii) X 的每一开集 G 是一族开 F_σ 集的并, 且这集族在 G 中是 σ 遗传闭包保持的.

证明 只要证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 及 (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) ⇒ (ii). 设 G 是 T_2 仿紧空间 X 的开集. X 是正则的 (定理 3.5.8). 对每一 $x \in G$, 存在 x 的开邻域 $U(x)$, 使 $\overline{U(x)} \subset G$. $\{U(x)\}_{x\in G}$ 覆盖 G. 由 (i), X 是遗传仿紧的, 存在关于 G 的局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 加细 $\{U(x)\}_{x\in G}$. G 是 T_2 仿紧的, 从而是正规的 (定理 3.5.8), 存在关于 G 的闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha \in A$ (引理 4.4.2), 从而存在关于 G 的开 F_σ 覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $F_\alpha \subset G_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha \in A$ (习题 2.14). 因 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 在 G 中局部有限, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 也在 G 中局部有限. 由于 G 是开集且 $G_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{U}_\alpha \subset \overline{U(x)} \subset G$, 所以 G_α 是空间 X 的开 F_σ 集, $G = \cup\{G_\alpha : \alpha \in A\}$.

(iii) ⇒ (i). 只要证明空间 X 的任一开子集 G 是仿紧的, 由命题 5.3.1 得证. 设 X 的任一开集 G 可表为 $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\bigcup_{\alpha_i\in A_i} X_{\alpha_i})$, 每一 X_{α_i} 是 X 中的开 F_σ 集且 $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$ 在 G 中遗传闭包保持. 设 $\mathscr{U}$ 是 G 的开覆盖. 置

$$\mathscr{U}_{\alpha_i} = \{U \cap X_{\alpha_i} : U \in \mathscr{U}\} \quad (\alpha_i \in A_i; i \in \mathbb{N}).$$

$\mathscr{U}_{\alpha_i}$ 是开 F_σ 集 X_{α_i} 的开覆盖. 由定理 5.3.1 的证明及这定理的注记, 知 $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ 具有在 X 中 σ 局部有限, 从而也在 G 中 σ 局部有限的开加细覆盖 $\mathscr{V}_{\alpha_i} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_{\alpha_i,j}$, 对每一 $j \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V}_{\alpha_i,j}$ 在 G 中局部有限的, 从而闭包保持的. 由于 $\mathscr{V}^*_{\alpha_i,j} = \cup\{V : V \in \mathscr{V}_{\alpha_i,j}\} \subset X_{\alpha_i}$, 而 $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$ 在 G 中遗传闭包保持的, 所以

$$\mathscr{V} = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{\alpha_i\in A_i} \mathscr{V}_{\alpha_i,j} \Big)$$

是 G 的 σ 闭包保持开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 因 T_2 仿紧空间是正则的, G 是正则子空间. 由定理 5.1.4 的 (ii), 知 G 是仿紧空间, 从而 X 是遗传仿紧空间. 证完.

Dowker[111] 曾引入 totally 正规空间 (见习题 4.21). 这是满足定理 5.3.2 的 (ii) 的正规空间. 故有下述推论.

推论 5.3.2[130] T_2 仿紧空间是遗传仿紧空间当且仅当它是 totally 正规空间.

注记 定理 5.3.2 中的 "遗传闭包保持" 不能减弱为 "闭包保持" (见习题 5.19).

5.4 仿紧空间的可积性

1944 年, Dieudonné[106] 引入仿紧空间后, Sorgenfrey[371] 于 1947 年给出两个仿紧空间的积不是仿紧空间的例子. 此例见第 2 章的例 2.3.3 (Sorgenfrey 直线)、例 2.3.4 (Sorgenfrey 平面). 这两个例子在第 2 章中是用来说明两个 Lindelöf (正规) 空间的积未必是 Lindelöf (正规) 空间的, 也为这里说明两个仿紧空间的积不是仿紧空间做准备.

Sorgenfrey 直线是正则 Lindelöf 空间, 从而是仿紧空间 (推论 5.1.1), 而 Sorgenfrey 平面 (Sorgenfrey 直线与它自身的积) 是正则的, 但不是正规的, 从而不是仿紧的 (定理 3.5.8).

基于上述情况, 仿紧空间的可积性很差. 要使两个仿紧空间的积是仿紧的, 必须至少对其中一个空间附加条件. Dieudonné[106] 直接证明下述定理 5.4.1 (习题 5.20), 这里通过映射定理做简易证明.

定理 5.4.1 [106] 仿紧空间与紧空间的积是仿紧空间.

证明 设 X 是仿紧空间, Y 是紧空间. 积空间 $X \times Y$ 到空间 X 上的投影 $p: X \times Y \to X$ 是完备映射 (定理 3.3.1). 由推论 5.2.4, 知 $X \times Y$ 是仿紧空间. 证完.

拓扑空间 X 称为 **σ 紧的** (σ-compact), 如果它是可数个紧子空间的并.

定理 5.4.2 [278] T_2 仿紧空间与正则 σ 紧空间的积是仿紧空间.

证明 设 X 是 T_2 仿紧空间, Y 是正则 σ 紧空间. 由于 σ 紧空间是 Lindelöf 空间, 所以 Y 是仿紧空间 (推论 5.1.1), 从而是 Tychonoff 空间, 于是存在空间 Y 的 Stone-Čech 紧化 βY. 由定理 5.4.1, 知 $X \times \beta Y$ 是仿紧空间. 由于 T_2 空间的紧子集是闭集 (推论 3.1.5), Y 是 βY 的 F_σ 子集, 从而 $X \times Y$ 是 $X \times \beta Y$ 的 F_σ 子集, 而 $X \times Y$ 是 T_2 的, 由定理 5.3.1 知 $X \times Y$ 是仿紧空间. 证完.

仿紧空间是紧空间与度量空间的共同推广. 仿紧空间与紧空间的积是仿紧的 (定理 5.4.1), 仿紧空间与度量空间的积怎样? 答案是否定的, 见例 5.4.1.

例 5.4.1 (Michael 直线 [282]) 存在 T_2 遗传仿紧空间与某度量空间的积不是正规的, 从而不是仿紧的.

取闭区间 $[0,1]$, 其中有理点集记作 Q, 无理点集记作 I. 对 $[0,1]$ 除赋以通常拓扑外, 更规定 I 中的每一单点集是开的. 这样得到的拓扑空间记作 X. 显然 X 是正则的. 下证 X 是遗传仿紧的.

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{U}'$ 覆盖 Q, 则

$$\mathscr{U}' \cup \{\{x\} : x \in X - \cup\mathscr{U}'\}$$

是 σ 离散开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 以上证法对 X 的任何子空间成立, 故由定理 5.1.2 知 X 是遗传仿紧的. 设 I 是具有通常拓扑的实直线的子空间, 显然可度量化. 下面用纲方法证明 $X \times I$ 不是正规的.

取 $X \times I$ 中的不相交闭集 $A = Q \times I$, $B = \{(x,x) : x \in I\}$. 只要证包含 B 的任何开集 U, 有 $A \cap \overline{U} \neq \varnothing$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$I_n = \{x : x \in I,\ \{x\} \times S'_{1/n}(x) \subset U\},$$

这里 $S'_{1/n}(x) = \{y : y \in I,\ \rho(x,y) < 1/n\}$, ρ 是数直线上的通常度量. 显然, $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, 因无理数集 I 是第二纲的 (例 1.3.2), 所以有某一 $\mathrm{Int}(\overline{I}_n) \neq \varnothing$ (关于 $[0,1]$ 中通常拓扑的闭包, 内核), 于是 $\overline{I}_n$ 包含 $[0,1]$ 中的有理点, 即 $Q \cap \overline{I}_n \neq \varnothing$. 取

点 $x \in Q \cap \overline{I}_n$ 及 $y \in I$ 使 $\rho(x,y) < 1/2n$. 由于 $(x,y) \in A$, 只要证对 x 在 X 中的任一邻域 V 及 y 在 I 中的任一邻域 W, 有 $(V \times W) \cap U \neq \varnothing$.

由 X 中拓扑, $V = G \cup K$, 这里 G 是通常拓扑的开集, $K \subset I$, 点 $x \in Q$, 是有理点, x 不属于 K 而属于 G, 而 x 又属于 $\overline{I}_n$, 所以存在 $x' \in G \cap I_n$ 使 $\rho(x',x) < 1/2n$, 所以 $(x',y) \in V \times W$, 且

$$\rho(x',y) \leqslant \rho(x',x) + \rho(x,y) < 1/2n + 1/2n = 1/n.$$

由 I_n 的构造知 $(x',y) \in U$. 所以 $(V \times W) \cap U \neq \varnothing$. 证完.

例 5.4.1 非常有用, 上述构造方法更可借鉴. 通常把数直线 $\mathbb{R}$ 除通常拓扑外更赋以每一无理点是孤立点所得拓扑空间称为 **Michael 直线** (Michael line).

注记　上例中的空间 X 不是 Lindelöf 的, 为了得到 Lindelöf 性质可把 $[0,1]$ 中的无理点集 I 用 $[0,1]$ 中的某不可数集 I' 代替, 这不可数集 I' 的紧集都是可数集. 这样的集合是存在的, 称为 Bernstein 集, 见文献 [239] p. 422, 或儿玉之宏 (Y. Kodama) 与永见启应 (K. Nagami) 的《位相空间论》[233] 中的定理 13.5. 然后让此不可数集的每一点是孤立点. 这样得到的空间 X' 是 Lindelöf 的. 至于原来 X 的遗传仿紧性仍保持, 相应的积空间 $X' \times I'$ 仍不是正规的. 这里的空间 X, X' 都不是完备正规的, 因为 Michael[278] 证明: 完备正规的仿紧空间与度量空间的积是完备正规仿紧空间 (习题 5.22). 由推论 5.3.2 知 X, X' 都是 totally 正规空间. 所以 totally 正规性严格弱于完备正规性.

下面利用积空间给出仿紧空间的 (外部的) 刻画.

定理 5.4.3 (Tamano 定理 [383, 384])　设 X 是 Tychonoff 空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间;

(ii) 对 X 的每一 T_2 紧化 cX, 积 $X \times cX$ 是正规空间;

(iii) 积 $X \times \beta X$ 是正规空间;

(iv) 存在 X 的一个紧化 cX 使积 $X \times cX$ 是正规空间.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii) 由定理 5.4.1 得到. (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) 是显然的. 下证 (iv) $\Rightarrow$ (i).

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是空间 X 的开覆盖. 对每一 $\alpha \in A$, 取空间 cX 的开集 V_α 使 $U_\alpha = X \cap V_\alpha$. 由于 $Z = cX - \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ 是 $cX - X$ 的紧子集, 对角线 $\varDelta \subset X \times X$ 及 $X \times Z$ 是正规空间 $X \times cX$ 的不相交的一对闭子集, 所以存在由 $X \times cX$ 到 $I = [0,1]$ 的连续函数 $f : X \times cX \to I$ 使 $f(\varDelta) \subset \{0\}$, $f(X \times Z) \subset \{1\}$. 置

$$\rho(x,y) = \sup_{z \in cX} \{|f(x,z) - f(y,z)|\}. \tag{5.4.1}$$

ρ 是集 X 上的伪度量. 下面证明由 ρ 导出的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 粗于 X 上的原来拓扑 $\mathscr{T}_2$, 即 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

对固定的 $x_0 \in X$, 每一 $x' \in cX$ 及 $\varepsilon > 0$, 由 f 的连续性, 存在 (x_0, x') 在 $X \times cX$ 中的开邻域 $G \times H$ 使

$$f(G \times H) \subset (f(x_0, x') - \varepsilon/3,\ f(x_0, x') + \varepsilon/3),$$

即 $d(f(G \times H)) < \varepsilon$ ($d(D)$ 表示集 $D \subset I$ 的直径, 定义 4.1.4). G 开于 X, H 开于 cX, cX 紧, 所以有限个 H 盖住 cX, 故有

$$d(f(G_i \times H_i)) < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, k), \tag{5.4.2}$$

使 $\{x_0\} \times cX \subset \bigcup_{i=1}^k (G_i \times H_i)$, $x_0 \in \bigcap_{i=1}^k G_i$. 对每一 $x \in \bigcap_{i=1}^k G_i$, 由 (5.4.1),

$$\rho(x, x_0) = \sup_{x' \in cX} \{|f(x, x') - f(x_0, x')|\}.$$

对任一 $x' \in cX$, $x' \in$ 某 H_i, 由 (5.4.2) 知 $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, 从而

$$\bigcap_{i=1}^k G_i \subset S_\varepsilon(x_0) = \{y : y \in X,\ \rho(x_0, y) < \varepsilon\}.$$

这说明关于 ρ 的所有开球属于 $\mathscr{T}_2$, 所以 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

由 Stone 定理 4.3.3 的注记, 集 X 的覆盖 $\{S_{1/2}(x)\}_{x \in X}$ 具有一个关于拓扑 $\mathscr{T}_1$ 的局部有限开加细覆盖 $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$, 也是关于空间 X 上的原来拓扑 $\mathscr{T}_2$ 的局部有限开加细覆盖. 对每一 $x \in X$, $y \in S_{1/2}(x)$, 有

$$f(x, y) = |f(x, y) - f(y, y)| \leqslant \rho(x, y) < 1/2.$$

所以对任何 $y \in \overline{S_{1/2}(x)}$ (关于 cX 的闭包), $f(x, y) \leqslant 1/2$. 对 $\beta \in B$, 有 $x \in X$ 使 $W_\beta \subset S_{1/2}(x)$, 由于对每一 $z \in Z$, $f(x, z) = 1$, 从而 $\overline{W}_\beta \cap Z = \varnothing$, 于是 $\overline{W}_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. $\overline{W}_\beta$ 是紧集, 存在有限集 $A(\beta) \subset A$, 使 $\overline{W}_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A(\beta)} V_\beta$, 从而 $W_\beta \subset X \cap \overline{W}_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A(\beta)} U_\beta$. 容易验证 $\{W_\beta \cap U_\alpha : \beta \in B,\ \alpha \in A(\beta)\}$ 是空间 X 的局部有限开覆盖, 加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. 因而 X 是仿紧空间. 证完.

由定理 5.4.1 和定理 5.4.3 得下述定理.

定理 5.4.4 空间 X 是 T_2 仿紧空间当且仅当对每一 T_2 紧空间 Y, 积空间 $X \times Y$ 是正规空间.

5.5 仿紧空间的和定理

关于仿紧空间的和定理, 下面先给出拓扑和的情况 (读者可回忆第 3 章引入的拓扑和概念, 定义 3.1.3).

定理 5.5.1 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族不相交的拓扑空间, 每一 X_α $(\alpha\in A)$ 是仿紧空间, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的开覆盖. 对每一 $\alpha\in A$, $\{X_\alpha\cap U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是仿紧子空间 X_α 的开覆盖, 从而存在 X_α 的局部有限开覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\{X_\alpha\cap U_\beta\}_{\beta\in B}$. 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{V}_\alpha$, 则 $\mathscr{V}$ 是 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的局部有限开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

上述定理 5.5.1 可简单地叙述为 "仿紧性关于拓扑和保持的". 下面先直接证明仿紧性满足 "局部有限闭和定理", 然后证明一般性定理, 以资比较.

定理 5.5.2[278] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha\in A)$ 是 X 的 T_2 仿紧子空间, 则 X 是 T_2 仿紧空间.

证明 设 $X=\bigcup_{\alpha\in A}F_\alpha$, 每一 F_α 是 T_2 仿紧闭子集, 集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 局部有限. 显然, X 是 T_1 空间. 下面先证明 X 是正则空间. 对每一 $x\in X$ 及闭集 F, $x\notin F$, 置

$$U(x)=X-\cup\{F_\alpha:x\notin F_\alpha\},\quad V(x)=\cup\{F_\alpha:x\in F_\alpha\}=\bigcup_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}.$$

由集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限性知 $U(x)$ 是包含 x 的开集 (推论 3.5.2), $V(x)$ 是闭集, $U(x)\subset V(x)$.

因每一 F_α 是正则的 (定理 3.5.8), x 属于有限个 F_{α_i} $(i\leqslant n)$, 故对每一 $i\leqslant n$, 存在 x 在 X 中的开邻域 $U_i(x)$ 使 $\overline{U_i(x)\cap F_{\alpha_i}}\cap F=\varnothing$. 置

$$W(x)=U(x)\cap\Big(\bigcap_{i=1}^{n}U_i(x)\Big),$$

则 $W(x)$ 是 x 的开邻域, 并有

$$\overline{W(x)}\cap F\subset\overline{V(x)\cap\Big(\bigcap_{i=1}^{n}U_i(x)\Big)}\cap F\subset\overline{\bigcup_{i=1}^{n}(F_{\alpha_i}\cap U_i(x))}\cap F=\varnothing.$$

所以 X 是正则空间.

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的任一开覆盖. $\mathscr{U}$ 中的元 (开集) 与 F_α 的交之集形成子空间 F_α 的开覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$. 因 F_α 是仿紧的, 存在关于 F_α 的局部有限覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\mathscr{U}_\alpha$. 因 F_α 闭, 集族 $\mathscr{V}_\alpha$ 在 X 中局部有限 (定理 5.3.1 的注记). 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{V}_\alpha$, $\mathscr{V}$ 覆盖 X, 加细 $\mathscr{U}$. 由 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限性, 容易验证 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. 因 X 是正则的, 由定理 5.1.1 知 X 是仿紧的, 证完.

称拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足**局部有限闭和定理**[194] (locally finite closed sum theorem), 如果拓扑空间 X 有局部有限闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使每一 F_α $(\alpha\in A)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 那

么 X 具有性质 $\mathscr{P}$. 可类似定义其他类型的**闭和定理** (closed sum theorem) 或**和定理** (sum theorem). 上述定理 5.5.2 可简单地叙述为 "T_2 仿紧性满足局部有限闭和定理".

现证明下列关于和定理的**一般性定理** (generality theorem for sum theorems), 从而定理 5.5.2 可作为它的特例.

定理 5.5.3[26] 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于有限对一闭映射保持的,

则 $\mathscr{P}$ 满足局部有限闭和定理.

证明 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha\in A)$ 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$. 对每一 $\alpha\in A$, 作拓扑空间 F'_α 使 F'_α 同胚于 F_α, 且 $\{F'_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是不相交族, 这里 $f_\alpha: F'_\alpha\to F_\alpha$ 是同胚映射. 置 $X^*=\bigoplus_{\alpha\in A}F'_\alpha$, 定义 X^* 到 X 上的映射 f (显然映射) 如下: 对每一 $x\in X^*$, $f(x)=f_\alpha(x)$, 如 $x\in F'_\alpha$. 由 (i) 知空间 X^* 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$. 由于局部有限集族是点有限的 (每一点 x 属于有限个 F_α), f 是有限对一的连续映射. 下证 f 是闭映射.

设 E^* 是空间 X^* 的闭集.

$$E^*=\bigcup_{\alpha\in A}(E^*\cap F'_\alpha),\quad f(E^*)=\bigcup_{\alpha\in A}f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha).$$

对 $\alpha\in A$, 因 $E^*\cap F'_\alpha$ 闭于 F'_α, 且 f_α 是 F'_α 到 F_α 上的同胚映射, 所以 $f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)$ 是 F_α 的闭集, 而 F_α 是空间 X 的闭集, 从而 $f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)$ 是空间 X 的闭集. 因为 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的, 于是 $\{f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 也是局部有限的, 从而是闭包保持的, 所以 $\bigcup_{\alpha\in A}f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)$ 是闭集 (定义 5.1.2), 即 $f(E^*)$ 是闭集.

到此证明了 f 是 X^* 到 X 上的有限对一闭映射. 由 (ii), X 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$, 即 $\mathscr{P}$ 满足局部有限闭和定理. 证完.

由定理 5.5.1 及推论 5.2.3, 仿紧性满足定理 5.5.3 的条件 (i) 及 (ii), 故有下述定理 (不附加分离性).

定理 5.5.4[26] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha\in A)$ 是 X 的仿紧子空间, 则 X 是仿紧空间.

注记 考察定理 5.5.3 的证明, 一般地说, $f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)\subset f(E^*)\cap F_\alpha$. 此外, 在证明 $\bigcup_{\alpha\in A}f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)$ 是闭集时, 利用集族 $\{f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 的闭包保持性. 如果在证明开始时就把 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限性减弱为闭包保持性, 能否得到 $\{f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 的闭包保持性? 一般地说, 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是闭包保持的, 对每一 $\alpha\in A$, 任取 $H_\alpha\subset F_\alpha$, $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 未必是闭包保持的, 见例 5.5.1.

例 5.5.1 (闭包保持闭集族, 不是遗传闭包保持的) 取数轴上的闭区间:

$$[0,1], \quad [0,1/2], \quad \cdots, \quad [0,1/n], \quad \cdots.$$

显然, $\{[0,1/n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是闭包保持的. 如取

$$\{1\}\subset[0,1], \quad \{1/2\}\subset[0,1/2], \quad \cdots, \quad \{1/n\}\subset[0,1/n], \quad \cdots,$$

则 $\{\{1/n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是闭包保持的.

我们可以把一般性定理 5.5.3 中的 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 "局部有限" 减弱为 "遗传闭包保持" (定义 5.3.1), 则可得 $\{f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 的闭包保持性, 从而证明 f 是闭映射. 这样可得又一如下一般性定理.

定理 5.5.5[356] 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于闭映射保持的,

则 $\mathscr{P}$ 满足**遗传闭包保持闭和定理** (hereditarily closure-preserving closed sum theorem).

上述和定理在 Singal 和 Arya[356] 的原文称为 "闭包保持和定理". 为了更好地反映集族与名称上的对应, 在此称它为 "遗传闭包保持闭和定理".

容易验证, T_2 仿紧性关于拓扑和保持的, 由定理 5.2.1, T_2 仿紧性关于闭映射保持的, 故由定理 5.5.5 得下述定理.

定理 5.5.6[356] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha\in A)$ 是 X 的 T_2 仿紧子空间, 则 X 是 T_2 仿紧空间.

上述定理 5.5.6 可简单地叙述为 "T_2 仿紧性满足遗传闭包保持闭和定理".

下面在引入两个类似于定理 5.5.3 和定理 5.5.5 的一般性定理以备后面引用. 它们都联系着映射与和定理, 放在这里引入可资比较.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为**点可数的** (point countable), 若 X 的每一点仅属于 $\mathscr{P}$ 中的可数个元.

关于 "局部有限闭和定理" (记作 (Σ)) 及 "遗传闭包保持闭和定理" (记作 (Σ')) 的具体内容分别详见定理 5.5.3 和定理 5.5.5. 如果定理 5.5.5 中的遗传闭包保持闭覆盖同时又是点可数的, 则相应的定理称为 "**点可数遗传闭包保持闭和定理**" (point-countable and hereditarily closure-preserving closed sum theorem, 记作 (Σ^*))[138]. (注意: 点有限的闭包保持闭覆盖就是局部有限闭覆盖, 习题 5.6). 空间 X 的闭集 F 称为**正则闭集** (regular closed set), 如果 $F=\overline{\mathrm{Int}F}$. 易知 F 是正则闭集当且仅当 F 是某一开集的闭包. 如果局部有限闭和定理中闭覆盖的所有闭集都是正则闭集, 则称为 "**局部有限正则闭和定理**"[133] (locally finite regular closed sum theorem, 记作 (Σ°)).

设 X, Y 都是拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$ 称为**可数对一的** (countable-to-one), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数集; 称为拟开的, 如果对 X 中任一不空开集 U, $\mathrm{Int}f(U)$ 不空 (习题 4.22).

与定理 5.5.3 相似的证明, 有下列定理.

定理 5.5.7[138] 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于可数对一闭映射保持的,

则 $\mathscr{P}$ 满足点可数遗传闭包保持闭和定理.

定理 5.5.8[133, 138] 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于拟开的、有限对一闭映射保持的,

则 $\mathscr{P}$ 满足局部有限正则闭和定理.

证明 证法同定理 5.5.3. 当证明了 $f: X^* \to X$ 是有限对一闭映射后, 为了证明 f 是拟开的, 只要把定理 5.5.3 中的闭集 F_α 看作正则闭集, 看作是某一开集 U_α 的闭包, 即 $F_\alpha = \overline{U}_\alpha$. 由拓扑和的定义, 要证明 f 是拟开的, 只要证明每一关于 F'_α 的不空开集 E $(\subset F'_\alpha)$ 的像 $f(E)$ 的内核不空. 因 $f_\alpha: F'_\alpha \to \overline{U}_\alpha$ 是同胚映射, $f_\alpha(E)$ 开于 $\overline{U}_\alpha$, 存在开集 G 使 $f_\alpha(E) = G \cap \overline{U}_\alpha$. 设 $x \in f_\alpha(E) \subset G$, 存在 x 的开邻域 $V(x) \subset G$. 因 $x \in f_\alpha(E) \subset \overline{U}_\alpha$, $V(x) \cap U_\alpha \neq \varnothing$. 由于 $V(x) \cap U_\alpha \subset f_\alpha(E)$, 所以 $\mathrm{Int}f_\alpha(E) \neq \varnothing$. 因 $E \subset F'_\alpha$, $f(E) = f_\alpha(E)$. 到此证明了 f 是拟开的. 由 (ii), X 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$, 即 $\mathscr{P}$ 满足局部有限正则闭和定理. 证完.

综观上面 4 个一般性定理, 比较它们的条件与结论 (条件 (i) 是相同的, 略去) 如下:

$$(\Sigma') \Rightarrow (\Sigma^*) \Rightarrow (\Sigma) \Rightarrow (\Sigma^\circ);$$

拟开、有限对一闭映射 $\Rightarrow$ 有限对一闭映射

$\Rightarrow$ 可数对一闭映射 $\Rightarrow$ 闭映射.

定理 5.5.7 适用于不能为闭映射保持而能为闭 Lindelöf 映射保持的空间类; 定理 5.5.8 适用于不能为完备映射保持而能为拟开、完备映射保持的空间类.

上述一般性定理 5.5.3 的证明中的空间 X 如设定为 T_1 空间, 可以得到下面一般性定理 5.5.9. 为此, 先给出下述引理.

引理 5.5.1[327] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 T_1 空间 X 的遗传闭包保持集族, 覆盖空间 X 的可数紧子集 K, 则 K 为有限个 F_α 覆盖.

证明 设不然, 任何有限个 F_α 不能覆盖 K. 设 $K \cap F_{\alpha_1} \neq \varnothing$, 取 $x_1 \in K \cap F_{\alpha_1}$. $K - F_{\alpha_1}$ 不是有限集, 存在 F_{α_2} 使 $(K - F_{\alpha_1}) \cap F_{\alpha_2} \neq \varnothing$, 取 $x_2 \in (K - F_{\alpha_1}) \cap F_{\alpha_2}$. 依次可取得 $x_n \in (K - \bigcup_{i<n} F_i) \cap F_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$. 得无限集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$, 且

$x_n \in F_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}$. 由于 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是遗传闭包保持的, 且 X 是 T_1 空间, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的任何子集是闭的, 所以 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 无聚点. 这和 K 是可数紧集矛盾. 证完.

定义 5.5.1 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的映射 $f: X \to Y$ 称为**紧覆盖的** (compact-covering[283, 284]), 如果对 Y 中的每一紧集 K, 存在 X 中的紧集 C 使 $f(C) = K$; f 称为 ***k* 映射** (k-mapping[175]), 如果对 Y 中的每一紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 中的紧集.

显然, k 映射是紧覆盖映射, 且易证完备映射是 k 映射 (习题 3.30). 故有

$$\text{完备映射} \Rightarrow k \text{ 映射} \Rightarrow \text{紧覆盖映射}.$$

把所考察的空间限制在满足 T_1 分离公理的情况下, 有下述一般性定理.

定理 5.5.9[250] 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 蕴含 T_1 分离公理, 且满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于 (可数对一) 闭、紧覆盖映射保持,

则 $\mathscr{P}$ 满足 (点可数) 遗传闭包保持闭和定理.

证明 关于 $f: X^* \to X$ 是 (可数对一) 闭映射的证明同定理 5.5.3. 只要证明 f 是紧覆盖的. 由定理 5.5.5, X 是 T_1 空间. 设 K 是空间 X 的紧集, 由引理 5.5.1, $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}$, 于是每一 $K \cap F_{\alpha_i}$ 是 X 中的紧集. 置 $C = \bigoplus_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(K \cap F_{\alpha_i})$, 这里如定理 5.5.3, $f_{\alpha_i} : F'_{\alpha_i} \to F_{\alpha_i}$ 是同胚映射. 则 C 是 X^* 中的紧集且 $f(C) = K$. 所以 f 是紧覆盖映射. 证完.

上述一般性定理 5.5.9 适用于不能为闭映射保持而能为闭、紧覆盖映射保持的某些 T_1 空间类.

前面叙述了局部有限闭和定理及遗传闭包保持闭和定理, 为什么不考察闭包保持闭和定理? 虽然在定理 5.5.4 的注记中指出把 "遗传闭包保持" 减弱为 "闭包保持" 不能完成定理 5.5.3 的证明, 但不足以说明上述问题. 例 5.5.2 回答了这个问题.

例 5.5.2[339] 存在一个非仿紧空间, 它具有由紧集组成的闭包保持闭覆盖.

设 $X = \{(x, y) : x, y > 0 \text{ 且 } y \geqslant x\}$ (实数平面上第一象限内对角线 $y = x$ 及其左上部分). 对每一 $y > x$, 规定 $\{(x, y)\}$ 是开的. 对每一 $(x, x) \in X$, 置

$$V_x = \{(x, y) : (x, y) \in X \text{ 且 } y > x\} \cup \{(y, x) : (y, x) \in X \text{ 且 } y < x\} \tag{5.5.1}$$

(这是通过点 (x, x) 的铅垂的与水平的两射线). 规定点 (x, x) 的邻域基

$$\{\{(x, x)\} \cup (V_x - F) : F\text{是有限集}\}.$$

置 $\varDelta = \{(x, x) : x > 0\}$. 对每一 $(x, y) \in X - \varDelta$, 置

$$F(x, y) = \{(x, x),\ (x, y),\ (y, y)\}, \tag{5.5.2}$$

则 $F(x,y)$ 是闭集. $\mathscr{F} = \{F(x,y) : (x,y) \in X - \Delta\}$ 是由 "三点集" 组成的 X 的闭覆盖. 下证 $\mathscr{F}$ 是闭包保持的. 任取 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. 设点 $(x,y) \in (\cup\mathscr{F}')^-$. 如 $(x,y) \in X - \Delta$, 则 (x,y) 是孤立点, 显然 $(x,y) \in \cup\mathscr{F}'$. 如 $(x,y) = (x,x) \in \Delta$, (x,x) 的邻域 $\{(x,x)\}\cup(V_x - F)$ 与 $\cup\mathscr{F}'$ 相交, 从而存在 $F(a,b) \in \mathscr{F}'$ 使 $(\{(x,x)\}\cup(V_x - F))\cap F(a,b) \neq \varnothing$. 由 (5.5.2), $F(a,b) = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$. 由 (5.5.1) 可知 $(x,x) = (a,a)$ 或 $(x,x) = (b,b)$. 所以 $(x,x) \in F(a,b) \in \mathscr{F}'$, $(x,x) \in \cup\mathscr{F}'$. $\mathscr{F}$ 是闭包保持的.

空间 X 显然是 T_2 的, 但不是正规的, 从而不是仿紧的 (关于 X 不是正规的证明与例 2.2.3 或例 2.3.4 中相应证明相似).

注记 1973 年, Potoczny[340] 继续研究此类空间 (具有由紧集组成的闭包保持闭覆盖的空间类), 得到在假设这空间是集态正规情况下则是弱仿紧的 (定义 6.1.2), 从而是仿紧的 (见定理 6.1.8 及注记). 1975 年, Potoczny 和 Junnila 证明了不必附加集态正规性, 此类空间是弱仿紧的 (包括例 5.5.2)[341].

例 5.5.3 (排除点拓扑 [372], 紧空间的遗传闭包保持闭覆盖没有有限子覆盖) 设 X 是一无限集, 取定 $p \in X$. 集 X 赋予如下**排除点拓扑** (excluded point topology): $U \subset X$ 是 X 的开集当且仅当或者 $U = X$, 或者 $p \notin U$. 显然, X 是 T_0 的紧空间, 但 X 不是 T_1 空间. 若 P 是 X 的不空子集, 则 $\overline{P} = P \cup \{p\}$. 如果 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的不空子集族, 那么

$$\bigcup_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(F_\alpha \cup \{p\}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha}.$$

这表明, X 的任何子集族都是遗传闭包保持的. 从而, X 的遗传闭包保持的闭覆盖 $\{\{p,x\} : x \in X\}$ 没有有限子覆盖. 因而, 引理 5.5.1 中的 T_1 条件不可减弱为 T_0.

若取拓扑性质 $\mathscr{P}$ 为 "紧子集是有限集", 则 $\mathscr{P}$ 满足定理 5.5.9 中的两条件 (紧覆盖映射保持性质 $\mathscr{P}$). 再取排除点拓扑空间 X 是任一可数无限集, 那么 $\{\{p, x\} : x \in X\}$ 是 X 的可数且遗传闭包保持的闭覆盖, 每一 $\{p, x\}$ $(x \in X)$ 具有性质 $\mathscr{P}$, 然而 X 不具有性质 $\mathscr{P}$. 故定理 5.5.9 中的 T_1 条件也不可减弱为 T_0.

5.6 可数仿紧空间

下面将叙述可数仿紧空间作为仿紧空间在可数覆盖情况的推广, 这相当于可数紧空间 (定义 3.5.1) 作为紧空间的推广. T_2 仿紧空间是正规的 (定理 3.5.8), 但我们不能期望可数仿紧空间有类似情况, 因为 T_2 可数紧空间未必是正规的 [见引理 3.5.1 的注记 (i)]. 因此常用正规可数仿紧性使相应于仿紧情况的 T_2 仿紧性, 满足较强的分离性.

定义 5.6.1[110, 228] 拓扑空间 X 称为**可数仿紧的** (countably paracompact), 如果 X 的每一可数开覆盖具有局部有限的开加细覆盖.

显然, 仿紧空间是可数仿紧空间, 可数紧空间是可数仿紧空间.

定理 5.6.1[202] 下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间;

(ii) 对 X 的每一可数开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的局部有限的可数开覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $V_i\subset U_i(i\in\mathbb{N})$;

(iii) 对 X 的每一递增的开覆盖 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的闭集序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $F_i\subset W_i$ $(i\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Int}F_i=X$;

(iv) 对 X 的每一递减闭集序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_i=\varnothing$, 存在 X 的开集序列 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $F_i\subset W_i$ $(i\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\overline{W}_i=\varnothing$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是可数仿紧空间的可数开覆盖. 由 (i) 存在局部有限开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $V\in\mathscr{V}$ 选定一个正整数 $i(V)$ 使 $V\subset U_{i(V)}$. 置 $V_i=\cup\{V:V\in\mathscr{V},\ i(V)=i\}$. $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 仍局部有限, 显然加细 $\mathscr{U}$ 且 $V_i\subset U_i(i\in\mathbb{N})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 显然.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递增开覆盖. 由 (ii) 存在 X 的局部有限开覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $V_i\subset W_i(i\in\mathbb{N})$. 置 $F_i=X-\bigcup_{j>i}V_j$, F_i 是闭集且 $F_i\subset\bigcup_{j\leqslant i}V_j$. 由于 $\bigcup_{j\leqslant i}V_j\subset\bigcup_{j\leqslant i}W_j=W_i$, 所以 $F_i\subset W_i(i\in\mathbb{N})$. 因 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的, 对每一 $x\in X$ 存在 x 的开邻域 $U(x)$ 使 $U(x)$ 仅包含在有限个 V_j 的并内. 设这些 V_j 的下标最大者为 i, 则 $U(x)\subset F_i$, 所以 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Int}F_i=X$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). 由 de Morgan 公式.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的可数开覆盖. 置 $W_i=\bigcup_{j\leqslant i}U_j$, 则 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是递增开覆盖. 由 (iii) 存在闭集序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $F_i\subset W_i$ $(i\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Int}F_i=X$. 置 $V_i=U_i-\bigcup_{j<i}F_j$, 开集 $V_i\subset U_i(i\in\mathbb{N})$. 由于 $\bigcup_{j<i}F_j\subset\bigcup_{j<i}W_j=\bigcup_{j<i}U_j$, 从而 $V_i=U_i-\bigcup_{j<i}F_j\supset U_i-\bigcup_{j<i}U_j$, 所以 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖. 由于 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Int}F_i=X$, 对每一 $x\in X$, $x\in$ 某 $\mathrm{Int}F_j$. 在 $i>j$ 时 x 的开邻域 $\mathrm{Int}F_j$ 与所有的 V_i 不交. 故 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是局部有限的且 $V_i\subset U_i(i\in\mathbb{N})$. 证完.

注记 定理 5.6.1 的 (iii) 中的闭集序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 可作为递增的 (可以 $\bigcup_{j\leqslant i}F_j$ 代 F_i), (iv) 中的开集序列 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 可作为递减的 (可以 $\bigcap_{j\leqslant i}W_j$ 代 W_i).

推论 5.6.1[110] 正规空间 X 是可数仿紧的当且仅当对 X 的每一递减闭集序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_i=\varnothing$, 存在 X 的开集序列 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $F_i\subset W_i$ $(i\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}W_i=\varnothing$.

引理 5.6.1 设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是正规空间 X 的可数开覆盖, 则下列论断等价:

(i) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有局部有限开加细覆盖;

(ii) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有点有限开加细覆盖;

(iii) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有开加细覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $\overline{V}_i \subset U_i(i\in\mathbb{N})$;

(iv) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有闭加细覆盖 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $F_i \subset U_i(i\in\mathbb{N})$;

(v) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有开 F_σ 加细覆盖 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使 $A_i \subset U_i(i\in\mathbb{N})$;

(vi) $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 具有可数闭加细覆盖 $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), 显然. (ii) $\Rightarrow$ (iii), 利用正规性及引理 4.4.2 即得证. (iii) $\Rightarrow$ (iv), 显然. (iv) $\Rightarrow$ (v), 由正规性及习题 2.14 得到. (v) $\Rightarrow$ (vi), 可置 $A_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{i,j}$ $(i\in\mathbb{N})$, $\{F_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 即所求.

(vi) $\Rightarrow$ (iv). 设 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖, $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 X 的闭覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 令 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 中元之包含 F_j 者为 U_j, $\mathscr{U}' = \{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 这里是取 $\mathscr{U}$ 中的元作重新排列: 可能有些元不取, 有些元取有限次, 甚至可数次. $\mathscr{U}' = \{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 仍是 X 的开覆盖, 闭覆盖 $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 加细 $\mathscr{U}'$ 且 $F_j \subset U_j(j\in\mathbb{N})$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii), 由正规性得到. (iii) $\Rightarrow$ (i), 只要置 $W_i = U_i - \bigcup_{j<i}\overline{V}_j$, $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 即所要求的. 证完.

推论 5.6.2[110, 228] 完备正规空间是可数仿紧空间.

定理 5.6.2[275] 设 X 是正规空间, 则下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间;

(ii) X 的每一可数开覆盖具有可数、局部有限闭加细覆盖;

(iii) X 的每一可数开覆盖具有可数、闭包保持闭加细覆盖;

(iv) X 的每一可数开覆盖具有 σ 离散闭加细覆盖;

(v) X 的每一可数开覆盖具有 σ 局部有限闭加细覆盖;

(vi) X 的每一可数开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是正规可数仿紧空间 X 的可数开覆盖. 由定理 5.6.1 的 (i) $\Rightarrow$ (ii), 存在局部有限开加细覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使 $V_i \subset U_i(i\in\mathbb{N})$. 由正规性及引理 4.4.2 即得证.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi). 显然.

(vi) $\Rightarrow$ (i). 设 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数开覆盖. 由 (vi) 存在 σ 闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$, 每一 $\mathscr{V}_i$ $(i\in\mathbb{N})$ 是闭包保持的. 置 $F_{i,j} = \cup\{V : V\in\mathscr{V}_j,\ V\subset U_i\}$, $F_{i,j}$ 是闭集, 且 $F_{i,j}\subset U_i$. $\{F_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数闭覆盖, 加细 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. 由引理 5.6.1 得证. 证完.

定理 5.6.3 设 X 是正规空间, 则下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间;

(ii) X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$;

(iii) X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明 类似仿紧性的定理 5.1.6. 读者自证.

下面是映射定理. 先引入一反例说明闭映射不能保持可数仿紧性.

例 5.6.1[66, 432] 对每一 $k\in\mathbb{N}$, 置

$$X_k=[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]\times\{k\},\quad \Delta_k=\{(\alpha,\alpha,k):\alpha<\omega_1\}.$$

设空间 X 是这些空间 X_k $(k\in\mathbb{N})$ 的拓扑和, Y 是把 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Delta_k$ 中的所有点等同于一点 p 而得到的商空间. 易知相应的商映射 f 是闭映射. 由于每一 X_k 是可数紧空间 (习题 3.10、定理 3.5.3 和习题 3.23), 从而易知 X 是可数仿紧空间. 下面验证 Y 不是可数仿紧空间. 置

$$U_0=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{[0,\omega_1)\times[0,\omega_1)\times\{k\}\},$$

$$U_k=\{(\alpha,\beta,k):(\alpha,\beta,k)\in X_k,\ \alpha\neq\beta\}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

$\{f(U_i)\}_{i=0}^{\infty}$ 形成空间 Y 的可数开覆盖. 如果 Y 是可数仿紧的, 由定理 5.6.1 的 (ii), 存在局部有限的可数开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ 使 $V_i\subset f(U_i)(i=0,1,2,\cdots)$. 设 W 是点 p 的开邻域, W 仅与 $\mathscr{V}$ 中有限个 V_i 相交. 故必存在 $V_k\in\mathscr{V}$ 使 $W\cap V_k=\varnothing$, 从而 $f^{-1}(W)\cap X_k$ 及 $f^{-1}(V_k)$ 是空间 X_k 的分别包含闭集 Δ_k 及闭集 $[0,\omega_1)\times\{\omega_1\}\times\{k\}$ 的不相交的邻域, 这是不可能的 (见习题 3.11 及提示).

类似双商闭映射保持仿紧性 (定理 5.2.2) 的证明, 易证下述定理.

定理 5.6.4[153] 设 $f:X\to Y$ 是由可数仿紧空间 X 到空间 Y 上的可数双商闭映射, 则 Y 是可数仿紧空间.

证明从略.

推论 5.6.3[176, 190] 拟完备映射保持可数仿紧性.

在正规可数仿紧情况, 有下述定理.

定理 5.6.5[176] 闭映射保持正规可数仿紧性.

证明 由定理 5.6.2 的 (iii) 得证. 证完.

关于可数仿紧空间在某些映射下的逆像有下述定理.

定理 5.6.6[178] 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到可数仿紧空间 Y 上的拟完备映射, 则 X 是可数仿紧空间 (可简记为拟完备映射逆保持可数仿紧性).

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数开覆盖. γ 是有限个正整数所成集, Γ 是所有 γ 所成集. 显然, Γ 是可数集族. 对每一 $\gamma\in\Gamma$, 置 $U_\gamma=\bigcup_{i\in\gamma}U_i$. 对每一 $y\in Y$, 由于 $f^{-1}(y)$ 的可数紧性, $f^{-1}(y)$ 包含于某一 U_γ 内. 置

$$E_\gamma=\{y\in Y:f^{-1}(y)\subset U_\gamma\}\quad(\gamma\in\Gamma),$$

则 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}E_\gamma=Y$, $U_\gamma\supset f^{-1}(E_\gamma)$. 由推论 1.5.1, 存在开集 V_γ 使

$$f^{-1}(E_\gamma)\subset V_\gamma\subset U_\gamma\ \text{及}\ V_\gamma=f^{-1}(f(V_\gamma)),$$

且 $f(V_\gamma)$ 是 Y 中开集. 从而 $\{f(V_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 Y 的可数开覆盖. 由 Y 的可数仿紧性, 存在局部有限的可数开覆盖 $\{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 加细 $\{f(V_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ (不失一般性, 作为具有相同指标集), 使每一 $\gamma\in\Gamma$, $W_\gamma\subset f(V_\gamma)$. 易知 $\{f^{-1}(W_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的局部有限开覆盖, 且 $f^{-1}(W_\gamma)\subset f^{-1}(f(V_\gamma))=V_\gamma\subset U_\gamma$. 置 $O_{\gamma,i}=f^{-1}(W_\gamma)\cap U_i$ $(i\in\gamma)$, 则 $\{O_{\gamma,i}\}_{i\in\gamma,\gamma\in\Gamma}$ 是加细 $\mathscr{U}$ 的局部有限开覆盖. 证完.

定理 5.6.6 的证法对一些可数情况的覆盖性质有普遍性.

由定理 5.6.6 连同推论 5.6.3 可得下述定理.

定理 5.6.7 空间 X 是可数仿紧空间当且仅当 X 在拟完备映射下的像是可数仿紧空间.

关于可数仿紧空间的遗传性, 和仿紧空间一样, 也具有闭遗传性及开遗传性 ⇒ 遗传性 (证明同仿紧性情况).

定理 5.6.8[434] 正规可数仿紧空间的 F_σ 子空间是正规可数仿紧的.

证明 类似于仿紧性情况 (定理 5.3.1), 利用定理 5.6.2 的 (ii), (v) 及习题 2.11. 证完.

Zenor[434] 构造例子表明可数仿紧空间的 F_σ 子空间未必是可数仿紧的.

定理 5.6.9[110] 可数仿紧空间与紧空间的积是可数仿紧空间.

证明 类似于仿紧性情况 (定理 5.4.1), 利用定理 5.6.6. 证完.

下面叙述关于可数仿紧空间的一个重要定理, 它是由 C. H. Dowker[110] 于 1951 年给出的. 证法非常巧妙.

引理 5.6.2[110] 正规可数仿紧空间 X 与紧度量空间 Y 的积空间是正规空间.

证明 设 A,B 是积空间 $X\times Y$ 的两个不相交的闭集. 设 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是空间 Y 的可数基 (定理 4.1.7), γ 是由有限个正整数所成集, 置 $H_\gamma=\bigcup_{i\in\gamma}G_i$. 对每一 $x\in X$, 设 A_x 是 Y 中的闭集满足 $\{x\}\times A_x=(\{x\}\times Y)\cap A$; 同样, 定义 Y 中的闭集 B_x 满足 $\{x\}\times B_x=(\{x\}\times Y)\cap B$. 置

$$U_\gamma=\{x:x\in X,\ A_x\subset H_\gamma \text{ 且 } \overline{H}_\gamma\subset Y-B_x\}.$$

下证 U_γ 是开集. 设 $x_0\in X$ 使 $A_{x_0}\subset H_\gamma$, 则对每一 $y\in Y-H_\gamma$, $(x_0,y)\notin A$. 因 A 是空间 $X\times Y$ 中的闭集, 存在 (x_0,y) 的开邻域 $N\times M$ 与 A 不交, 对每一 $y\in Y-H_\gamma$ 成立. 又因为 $Y-H_\gamma$ 作为紧空间 Y 的闭子空间是紧子空间, 所以有限个开集 M 覆盖 $Y-H_\gamma$. 设 N_{x_0} 是相应于有限个 M 的有限个开集 N 的交, 则 $(N_{x_0}\times(Y-H_\gamma))\cap A=\varnothing$. 所以, 如果 $x\in N_{x_0}$, 则 $A_x\subset H_\gamma$. 这说明集 $\{x:A_x\subset H_\gamma\}$ 是 X 中的开集. 同理可证集 $\{x:\overline{H}_\gamma\subset Y-B_x\}$ 也是 X 中的开集. U_γ 是这两个开集的交, 也是开集.

设 Γ 是所有 γ 所成集 (即有限个正整数所成集的集), 显然 Γ 是可数集. 下证 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的覆盖. 对每一 $x\in X$, $A_x\cap B_x=\varnothing$. 由空间 Y 的正规性, 存在开

集 G 使 $A_x \subset G$, $\overline{G} \subset Y - B_x$. 因 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的可数基, G 可取作某些 G_i 的并, 由于 A_x 是 Y 中的紧集, 故 G 可取作有限个 G_i 的并, 记 $H_\gamma = \bigcup_{i\in\gamma} G_i$, 故有 $A_x \subset H_\gamma$, $\overline{H}_\gamma \subset Y - B_x$. 由 U_γ 的定义, $x \in U_\gamma$. 故 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的可数开覆盖.

因 X 是正规可数仿紧的, 存在 X 的局部有限开覆盖 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 使 $\overline{V}_\gamma \subset U_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ [定理 5.6.1 之 (ii) 及引理 4.4.2]. 置 $U = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(V_\gamma \times H_\gamma)$, U 是空间 $X \times Y$ 的开集, 下证 $A \subset U$ 及 $\overline{U} \cap B = \varnothing$. 从而 $X \times Y$ 是正规的, 引理得证.

对每一点 $(x, y) \in A$, 因 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的覆盖. $x \in$ 某 $V_\gamma \subset U_\gamma$, 则 $y \in A_x \subset H_\gamma$, 所以 $(x, y) \in V_\gamma \times H_\gamma$. 从而 $A \subset U$. 由于 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是局部有限的, 对每一 $x \in X$, 存在 x 的开邻域 $G(x)$ 仅与有限个 V_γ 相交. 从而作为点 (x, y) 的开邻域 $G(x) \times Y$ 也仅与有限个 $V_\gamma \times H_\gamma$ 相交. 所以 $\{V_\gamma \times H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 也是局部有限的, 从而是闭包保持的, 于是 $\overline{U} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{V_\gamma \times H_\gamma}$. 由于 $\overline{V_\gamma \times H_\gamma} = \overline{V}_\gamma \times \overline{H}_\gamma$ (习题 2.8), 故有 $\overline{U} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\overline{V}_\gamma \times \overline{H}_\gamma) \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(U_\gamma \times \overline{H}_\gamma)$. 容易证明, 对每一 $\gamma \in \Gamma$, $(U_\gamma \times \overline{H}_\gamma) \cap B = \varnothing$, 所以 $\overline{U} \cap B = \varnothing$. 结合前证 $A \subset U$ 知 $X \times Y$ 是正规空间. 证完.

注记 在上述引理 5.6.2 的证明中只用了空间 Y 的正规性、具有可数基及紧性, 并没有用到 Y 的度量性质. E. Michael[282] 曾构造一个遗传仿紧且 Lindelöf 的空间 X 及可分度量空间 (从而具有可数基的正规空间) Y, 而 $X \times Y$ 不是正规的 (例 5.4.1 及其注记). 由此可见上述证明中紧性的重要性.

定理 5.6.10 (Dowker 定理 [110]) 空间 X 是正规可数仿紧空间当且仅当 X 与单位闭区间 $I = [0, 1]$ 的积空间是正规空间.

证明 必要性由引理 5.6.2 得到, 因为闭区间 I 是紧度量空间. 下证充分性. 设 $X \times I$ 是正规的, X 同胚于 $X \times I$ 的闭子空间 $X \times \{0\}$, 从而是正规的. 下证 X 是可数仿紧的.

设 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的递减闭集序列且 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \varnothing$. 由于 $[0, 1/i)$ 是 $I = [0, 1]$ 中的开集, 置 $W_i = (X - F_i) \times [0, 1/i)$, W_i 是 $X \times I$ 中的开集, 从而 $A = X \times I - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i$ 是闭集. 对 $x \in X$, 如 $x \in$ 某 $X - F_i$, 则 $(x, 0) \in W_i$, 所以 $(x, 0) \notin A$. 置 $B = X \times \{0\}$, 则 A, B 是不相交的闭集. 由 $X \times I$ 的正规性, 存在不相交的开集 U, V 使 $A \subset U$, $B \subset V$. 置 $G_i = \{x : (x, 1/i) \in U\}$, 则 G_i 是开集. 对每一 $x \in X$, $(x, 0) \in B$, 所以当 i 充分大时 $(x, 1/i) \in V$, 从而 $(x, 1/i) \notin U$. 所以 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i = \varnothing$. 设 $x \in F_i$, 则当 $j \leqslant i$ 时, $F_i \subset F_j$, 从而 $x \notin X - F_j$; 当 $j \geqslant i$ 时, $1/i \notin [0, 1/j)$. 由于 $W_j = (X - F_j) \times [0, 1/j)$, 所以对任何 $j \in \mathbb{N}$, $(x, 1/i) \notin W_j$. 从而 $(x, 1/i) \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j$. 所以 $(x, 1/i) \in A \subset U (x \in G_i)$. 这证明了 $F_i \subset G_i (i \in \mathbb{N})$, 由推论 5.6.1, X 是可数仿紧空间. 证完.

关于可数仿紧空间的和定理. 容易验证可数仿紧空间关于拓扑和保持的且为完备映射所保持 (推论 5.6.3), 故由一般性定理 5.5.3 知可数仿紧性满足局部有限闭和定理, 即下定理所述.

定理 5.6.11[26] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一 F_α $(\alpha\in A)$ 是 X 的可数仿紧闭子空间, 则 X 是可数仿紧空间.

容易验证, 正规性关于拓扑和保持的, 而正规可数仿紧性为闭映射所保持 (定理 5.6.5), 故由一般性定理 5.5.5 知正规可数仿紧性满足遗传闭包保持闭和定理, 即下定理所述.

定理 5.6.12 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖, 每一 F_α $(\alpha\in A)$ 是 X 的正规可数仿紧闭子空间, 则 X 是正规可数仿紧空间.

此外, 在 X 是正规空间情况, 可数仿紧性也满足**可数闭和定理** (countable closed sum theorem), 即下定理所述.

定理 5.6.13[304] 设 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是正规空间 X 的可数闭覆盖, 每一 F_i $(i\in\mathbb{N})$ 是 X 的可数仿紧子空间, 则 X 是可数仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是正规空间 X 的可数开覆盖. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, $\{U_j\cap F_i\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是正规可数仿紧闭子空间 F_i 的可数开覆盖. 由引理 5.6.1 的 (vi) 存在 F_i 的可数闭覆盖 $\{H_{i,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 加细 $\{U_j\cap F_i\}_{j\in\mathbb{N}}$. 从而 $\{H_{i,m}\}_{i,m\in\mathbb{N}}$ 是 X 的可数闭覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 由引理 5.6.1 的 (vi) 知 X 是可数仿紧的. 证完.

易验证, Niemytzki 半平面 (例 2.2.3) 是可数个可度量的闭子空间的并, 但不是可数仿紧空间 (习题 5.31), 所以上述定理中空间 X 的正规性是重要的.

可数仿紧空间是 Dowker[110] 及 Katětov[228] 互相独立地引进的. Dowker 曾考察一简单的例 [110]. 取实数集 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, 规定拓扑为

$$\varnothing,\ \mathbb{R}\ \text{及}\ (-\infty,a)\ \ (a\in\mathbb{R}).$$

此空间的可数开覆盖 $\mathscr{U}=\{(-\infty,i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 不具有局部有限开加细覆盖, 所以这空间不是可数仿紧的. 由于此空间不存在不相交的闭集, 自然满足 T_4 分离公理, 但不是 T_1 的, 从而不是正规的. 所以 Dowker 提出: "是否存在正规而不是可数仿紧的空间?" (这类空间后来称为 **Dowker 空间**), 此后 20 年内许多拓扑学者致力于此. 后被 M. E. Rudin[344] 正面解决. 她构造了一个集态正规而不是可数仿紧的空间. 由于论证较长, 这里不予转载.

习 题 5

5.1[278] 证明每一可数开覆盖具有局部有限加细覆盖.

5.2 定理 5.1.1 中的正则性可改为满足 T_3 分离公理结论仍成立.

5.3 证明满正规空间是正规的.

5.4 Lindelöf 空间的每一局部可数集族 (定义见引理 4.4.3 的注记) 是可数的. 如果 T_2 仿紧空间包含一个 Lindelöf 稠子空间, 则是 Lindelöf 的. 从而 T_2 可分仿紧空间是 Lindelöf 的.

5.5 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的闭包保持的闭集族, F 是闭集, 则集族 $\{U\cap F: U\in\mathscr{U}\}$ 是闭包保持的.

5.6 证明: 点有限的闭包保持闭集族是局部有限的, 互不相交的闭包保持闭集族是离散的.

5.7 设空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖, 则 X 满足 T_4 分离公理.

5.8 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的闭映射. 如 $\mathscr{U}$ 是 X 中的闭包保持闭集族, 则 $f(\mathscr{U})$ 是 Y 中的闭包保持闭集族. 如 $\mathscr{V}$ 是 Y 中的闭包保持闭集族, 则 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 中的闭包保持闭集族.

5.9 每一星加细 (点星加细) 开覆盖是垫状加细覆盖.

5.10 集态正规性是 F_σ 遗传性 [352], 能为闭映射保持 (不能为开映射保持), 关于拓扑和保持.

5.11 试证完备映射是双商闭映射.

5.12 试证几乎开映射是双商映射.

5.13 T_2 (正则) 空间 X 是仿紧 (Lindelöf) 空间当且仅当对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 X 到某度量 (可分度量) 空间 Y 上的连续映射 f, 及 Y 的某开覆盖 $\mathscr{V}$ 使 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 加细 $\mathscr{U}$.

5.14[89] 空间 X 的子集 A 称为 **α 仿紧的** (α-paracompact[29]), 如对由 X 中开集组成的 A 的任一覆盖 $\mathscr{U}$ 存在 $\mathscr{U}$ 的加细开集族 $\mathscr{V}$ 覆盖 A 且在 X 中是局部有限的. 证明设 f 是空间 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 α 仿紧子集, 则 X 是仿紧空间. 给出空间 X 的仿紧子集但不是 α 仿紧的.

5.15[132] 设 X 是集态正规空间, f 是 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是仿紧的, 则 X 是仿紧空间. 构造一个非正规的完全正则空间 (从而不是仿紧的) X 到仿紧空间 Y 上的闭映射 f 使对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是仿紧的 (这说明上述习题中的集态正规不能减弱为完全正则. 比较习题 5.14).

5.16 Lindelöf 空间的 F_σ 子空间是 Lindelöf 的.

5.17 空间 X 的子集 A 称为**广义 F_σ 集** (generalized F_σ-set), 如果每一包含 A 的开集包含着一 F_σ 集, 这 F_σ 集包含着 A. 证明 T_2 仿紧空间的广义 F_σ 集是仿紧的.

5.18 证明正则 Lindelöf 空间 X 是遗传 Lindelöf 空间当且仅当 X 是完备正规空间.

5.19[428] 给出反例说明定理 5.3.2 中的条件 "遗传闭包保持" 不能改为 "闭包保持".

5.20 直接证明 (不利用映射) 仿紧空间与紧空间的积是仿紧空间.

5.21 证明例 5.4.1 后注记中的空间 X' 是 Lindelöf 空间.

5.22 完备空间与度量空间的积是完备的. 完备正规仿紧空间与度量空间的积是完备正规仿紧的 [278].

5.23 证明正则 Lindelöf 空间与正则 σ 紧空间的积是 Lindelöf 空间.

5.24 证明点可数的闭包保持闭集族是局部可数的集族.

5.25[194] 设 Q 是满足局部有限闭和定理且具有闭遗传性的空间类. 证明:

(i) 设 $\mathscr{V}$ 是空间 X 的 σ 局部有限开覆盖且 $\mathscr{V}$ 中每一开集的闭包属于 Q, 则 X 属于 Q;

(ii) 设 $\mathscr{V}$ 是正则空间 X 的 σ 局部有限开覆盖, $\mathscr{V}$ 中每一开集属于 Q 且具有紧的边缘, 则 X 属于 Q.

5.26[364] 证明仿紧且局部可度量化的 T_2 空间可度量化.

5.27 证明可数仿紧空间的每一 σ 局部有限开覆盖具有局部有限开加细覆盖.

5.28[28] 证明第一可数的 T_2 可数仿紧空间是正则的.

5.29[131] 设 X 是正规空间, 则下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间;

(ii) X 的每一可数开覆盖具有局部有限开 F_σ 加细覆盖;

(iii) X 的每一可数开覆盖具有 σ 离散开 F_σ 加细覆盖;

(iv) X 的每一可数开覆盖具有 σ 局部有限开 F_σ 加细覆盖.

5.30[132] 设 f 是正规空间 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数仿紧的, 则 X 是可数仿紧空间.

5.31 证明 Niemytzki 半平面 (例 2.2.3) 及 Sorgenfrey 平面 (例 2.3.4) 都不是可数仿紧的. Michael 直线 (例 5.4.1) 与具有通常拓扑的实直线上无理数子空间的积也不是可数仿紧的.

5.32[304] 空间 X 称为 $\boldsymbol{m}$ **仿紧的** (m-paracompact), 如果每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有局部有限开加细覆盖. 当 $m = \aleph_0$ 时, 则是可数仿紧的. 当对任何基数 m 都是 m 仿紧的, 则是仿紧的. 证明下列论断等价:

(i) X 是 m 仿紧的且满足 T_4 分离公理;

(ii) X 的每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有星加细开覆盖;

(iii) X 的每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有局部有限闭加细覆盖;

(iv) X 的每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖;

(v) X 的每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有 σ 局部有限开加细覆盖且是可数仿紧的.

5.33[131] 设空间 X 是由既开且闭的仿紧 (正规可数仿紧) 子集组成的集族的并, 且这集族在 X 中是 σ 局部有限的, 则 X 是仿紧 (可数仿紧) 空间.

5.34[131] 设 X 是集态正规空间, 并且是可数个仿紧 (可数仿紧) 闭子空间的并, 则 X 是仿紧 (可数仿紧) 空间.

第 6 章　其他覆盖性质

在本章中将叙述除仿紧性外的其他一些覆盖性质, 包括次仿紧性、弱仿紧性、强仿紧性、meso 紧性、ortho 紧性、θ 加细性、弱 θ 加细性、弱 $\bar{\theta}$ 加细性等及由国内学者刘应明引入的拟仿紧性, 研究它们的性质及相互间关系.

6.1　定义、刻画及相互间关系

定义 6.1.1[60]　拓扑空间 X 称为**次仿紧的** (subparacompact), 如果 X 的每一开覆盖具有 σ 离散闭加细覆盖.

定理 6.1.1[60, 217]　下列论断等价:

(i) X 是次仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限闭加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖;

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状加细覆盖;

(v) 对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对每一 $x\in X$ 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)$ 包含在 $\mathscr{U}$ 中某一元内;

(vi) 对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对每一 $x\in X$ 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=1$ (这里 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=|\{V:V\in\mathscr{V}_n,\ x\in V\}|$).

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) 是显然的. (iv) $\Rightarrow$ (i) 的证明异常复杂, 参见 Junnila[217] 或 Burke[69] 的定理 3.1. (vi) $\Rightarrow$ (v) 显然. 下证 (i) $\Rightarrow$ (vi) 及 (v) $\Rightarrow$ (iv).

(i) $\Rightarrow$ (vi). 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 具有 σ 离散闭加细覆盖 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是离散的, 对每一 $F\in\mathscr{F}_n$, 取 $U_F\in\mathscr{U}$ 使 $F\subset U_F$. 置

$$V_F=U_F-\cup\{F'\in\mathscr{F}_n:F'\neq F\},$$

$$\mathscr{V}_n=\{V_F:F\in\mathscr{F}_n\}\cup\{U-\cup\mathscr{F}_n:U\in\mathscr{U}\},$$

则 V_F 是开集, 它包含 F 且与 $\mathscr{F}_n$ 中其他闭集不交, 所以 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (vi) 的所有条件.

(v) $\Rightarrow$ (iv). 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖, $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖序列, 满足 (v) 中的条件. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in A$, 置

$$C(\alpha,n)=\{x:\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset U_\alpha\},\tag{6.1.1}$$

则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{C(\alpha,n):\alpha\in A\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖. 下证对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\{C(\alpha,n):\alpha\in A\}$ 垫状于 $\mathscr{U}$, 即证明对 $A'\subset A$,

$$\overline{\cup\{C(\alpha,n):\alpha\in A'\}}\subset\cup\{U_\alpha:\alpha\in A'\}. \tag{6.1.2}$$

设 $z\notin\cup\{U_\alpha:\alpha\in A'\}$. 对每一 $y\in C(\alpha,n)$, $\alpha\in A'$, 由 (6.1.1), $\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)\subset U_\alpha$, 所以 $z\notin\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)$, 从而 $y\notin\mathrm{st}(z,\mathscr{V}_n)$. 这说明存在 z 的开邻域 $\mathrm{st}(z,\mathscr{V}_n)$ 与所有 $C(\alpha,n)$ $(\alpha\in A')$ 不相交, 也就是 $z\notin\overline{\cup\{C(\alpha,n):\alpha\in A'\}}$. (6.1.2) 得证. 证完.

注记 在第 4 章曾引入可展空间 (定义 4.4.1), 由定理 6.1.1 的 (v) 知可展空间是次仿紧空间. 在空间 X 是正则情况, 定理 6.1.1 中的 "闭" 可以去掉, 从而知 T_2 仿紧空间是次仿紧空间. 然而, 即使是 T_1 的紧空间也未必是次仿紧空间.

例如, 例 2.3.1 中给出的不可数集 X 上的有限补拓扑空间. 易验证, X 是 T_1 的紧空间. 取定不同的两点 $a,b\in X$, 则 $\mathscr{U}=\{X-\{a\},\ X-\{b\}\}$ 是 X 的开覆盖. 若 X 是次仿紧空间, 那么 $\mathscr{U}$ 有 σ 离散闭加细覆盖. 由于紧空间的离散集族是有限集 (定理 3.5.2), 所以 $\mathscr{U}$ 有可数的闭加细覆盖. 又由于 X 的真闭子集都是有限集, 于是 X 是可数集, 矛盾. 故 X 不是次仿紧空间.

定义 6.1.2 拓扑空间 X 称为**弱仿紧空间**(weakly paracompact space), 或**点态仿紧空间**(pointwisely paracompact space), 或 **meta 紧空间**(metacompact space[13]), 如果 X 的每一开覆盖具有点有限的开加细覆盖. 拓扑空间 X 称为**弱 θ 加细空间** (weakly θ-refinable space[45]), 如果 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 满足对每一 $x\in X$ 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $1\leqslant\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)<\omega$; 如果上述条件加强为每一 $\mathscr{V}_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 都是覆盖, 则称 X 是 **θ 加细空间**[416] (θ-refinable space); 上述弱 θ 加细空间 (θ 加细空间) 的覆盖 $\mathscr{V}$ (覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) 称为 X 的**弱 θ 加细覆盖** (weakly θ-refinable covering) (**θ 加细序列** (θ-refinable sequence)).

θ 加细性也称为**次亚紧性** (submetacompactness[217]).

定义 6.1.3[48] 拓扑空间 X 的集族 $\mathscr{U}$ 称为**紧有限的** (compact-finite), 如果 X 的每一紧集 K 仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个元相交. 空间 X 称为 **meso 紧空间** (mesocompact space), 如果 X 的每一开覆盖具有紧有限的开加细覆盖.

注记 上述定义无非是把弱仿紧 (meta 紧) 定义中的点换为紧集. 容易证明局部有限集族是紧有限的, 更由定义 6.1.2 有: 仿紧 $\Rightarrow$ meso 紧 $\Rightarrow$ 弱仿紧 $\Rightarrow$ θ 加细 $\Rightarrow$ 弱 θ 加细.

比较次仿紧空间的刻画 [定理 6.1.1 的 (vi)] 及 θ 加细空间的定义 (定义 6.1.2) 知次仿紧 $\Rightarrow$ θ 加细. 故 θ 加细是次仿紧与弱仿紧的共同推广.

下面关于弱仿紧、meso 紧、θ 加细空间的刻画 (定理 6.1.2, 定理 6.1.3, 定理 6.1.4) 尽量选取比较常用而有效的, 并写成便于比较的形式且可与仿紧空间 (不加

分离公理) 的刻画 (定理 5.1.7 和定理 5.1.8) 参看. 它们的证明都有一定的难度, 这里不给出证明, 读者可参阅相关文献.

定理 6.1.2[217, 219, 220, 413, 414] 下列论断等价:

(i) X 是弱仿紧 (即 meta 紧) 空间;

(ii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有点有限的加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x \in X$, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x, \mathscr{V}))$;

(iv) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x \in X$, 存在有限族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, 如 $x \in V \in \mathscr{V}$, 则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元内.

定理 6.1.3[147] 下列论断等价:

(i) X 是 meso 紧空间;

(ii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{F}$, 使由 X 的所有紧集组成的集族加细 $\mathscr{F}$;

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有紧有限的加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x \in X$, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x, \mathscr{V}))$;

(iv) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一紧集 $K \subset X$, 存在有限族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, 如 $V \in \mathscr{V}$ 使 $K \cap V \neq \varnothing$, 则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元内.

定理 6.1.4[217, 415] 下列论断等价:

(i) X 是 θ 加细空间;

(ii) X 的每一定向开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖;

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对每一 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 及有限族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, 如 $x \in V \in \mathscr{V}_n$, 则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元内.

问题[217, 230] 定理 6.1.2 (弱仿紧) 的 (ii) 及定理 6.1.4 (θ 加细) 的 (ii) 中的 “闭包保持” 能否代以 “垫状”?

这问题尚未解决. 部分的正面答案有 Gruenhage [167] 附加条件 “局部紧” 及江守礼 [214] 附加条件 “ortho 紧” (定义 6.1.6).

关于弱 θ 加细空间的下述刻画与上述 meta 紧、meso 紧、θ 加细空间的刻画不能相比, 这是由于弱 θ 加细定义中的 $\mathscr{V}_n$ 不一定是覆盖.

定理 6.1.5[45] 下列论断等价:

(i) X 是弱 θ 加细空间;

(ii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 使对每一 $x \in X$ 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{W}_n) = 1$;

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有加细覆盖 $\mathscr{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ 使每一 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\cup\mathscr{A}_n$ 的离散集族.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 由 (i), $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 满足对每一 $x\in X$ 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $1\leqslant \mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)<\omega$. 对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 置 $W(x,n)=\cap\{V\in\mathscr{V}_n:x\in V\}$, 由于这里是有限交, 故 $W(x,n)$ 是开集. 置 $\mathscr{W}(n,k)=\{W(x,n):\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=k\}$. 则 $\cup\{\mathscr{W}(n,k):n,k\in\mathbb{N}\}$ 满足 (ii), 这是因为 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=k$ 时, $\mathrm{ord}(x,\mathscr{W}(n,k))=1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) 显然. 下证 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 由 (ii), $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_n$ 如 (ii) 所述. 置

$$X(n)=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{W}_n)=1\}\text{ 及 }\mathscr{A}_n=\{W\cap X(n):W\in\mathscr{W}_n\}.$$

$W\cap X(n)$ 是关于 $X(n)=\cup\mathscr{A}_n$ 的开集, 且易知 $\mathscr{A}_n$ 中任意二个元不相交, 所以 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\cup\mathscr{A}_n$ 的离散集族. 由于 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}X(n)$, 所以 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{A}_n$ 是 X 的覆盖.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 由 (iii), $\mathscr{U}$ 具有加细覆盖 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{A}_n$ 使每一 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\cup\mathscr{A}_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 离散的. 对每一 $A\in\mathscr{A}$, 取 $U(A)\in\mathscr{U}$ 使 $A\subset U(A)$. 对每一 $A\in\mathscr{A}_n$, 由 $\mathscr{A}_n$ 关于 $\cup\mathscr{A}_n$ 的离散性, 存在开于 $\cup\mathscr{A}_n$ 的, 从而开于空间 X 的集 $G(A,n)\supset A$ 且与 $\mathscr{A}_n$ 中不同于 A 的元不相交, 置

$$W(A,n)=G(A,n)\cap U(A),\quad \mathscr{W}_n=\{W(A,n):A\in\mathscr{A}_n\},$$

则 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_n$ 满足 (ii) 的条件. 证完.

前面看到 (定义 6.1.3 的注记): 次仿紧 $\Rightarrow$ θ 加细 $\Rightarrow$ 弱 θ 加细, 下面证明: 弱 θ 加细 + 完备性 $\Rightarrow$ 次仿紧.

定理 6.1.6[45] 完备的弱 θ 加细空间是次仿紧空间.

证明 设 X 是完备的弱 θ 加细空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 由定理 6.1.5 的 (ii), $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$ 使对每一 $x\in X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=1$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $G_n=\cup\mathscr{V}_n$. 由完备性, 开集 $G_n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}F(n,m)$, 这里 $F(n,m)$ 是闭集, 不失一般性, 可作为 $F(n,m)\subset F(n,m+1)(m\in\mathbb{N})$. 对每一 $x\in X$, 取 $U(x)\in\mathscr{U}$ 使 $x\in U(x)$. 对 n, $m\in\mathbb{N}$, $x\in X-F(n,m)$, 置

$$W(n,m,x)=U(x)\cap(X-F(n,m))=U(x)-F(n,m),$$

则 $W(n,m,x)$ 是包含点 x 的开集. 置

$$\mathscr{W}(n,m)=\mathscr{V}_n\cup\{W(n,m,x):x\in X-F(n,m)\}.$$

显然, $\mathscr{W}(n,m)$ 是 X 的开覆盖且加细 $\mathscr{U}$, 下面证明 $\mathscr{W}=\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{W}(n,m)$ 满足定理 6.1.1 的 (vi), 从而得证.

对每一 $x_0 \in X$, 由假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使 $\operatorname{ord}(x_0, \mathscr{V}_{n_0}) = 1$. 因 $x_0 \in G_{n_0} = \cup\mathscr{V}_{n_0}$, 取 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使 $x_0 \in F(n_0, m_0)$. 从而取 $\mathscr{W}$ 中的开覆盖

$$\mathscr{W}(n_0, m_0) = \mathscr{V}_{n_0} \cup \{W(n_0, m_0, x) : x \in X - F(n_0, m_0)\}.$$

易知, 当 $x \in X - F(n_0, m_0)$ 时 $x_0 \notin W(n_0, m_0, x)$. 从而

$$\operatorname{ord}(x_0, \mathscr{W}(n_0, m_0)) = \operatorname{ord}(x_0, \mathscr{V}_{n_0}) = 1.$$

由定理 6.1.1 知 X 是次仿紧空间. 证完.

1975 年, Smith[366] 引入弱 $\overline{\theta}$ 加细空间, 严格地介于 θ 加细空间与弱 θ 加细空间之间 (见定义 6.1.4 及定理 6.1.7), 即 θ 加细 $\Rightarrow$ 弱 $\overline{\theta}$ 加细 $\Rightarrow$ 弱 θ 加细.

定义 6.1.4[366]　拓扑空间 X 称为**弱 $\overline{\theta}$ 加细空间** (weak $\overline{\theta}$-refinable space), 如果 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, 使对每一 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \operatorname{ord}(x, \mathscr{V}_n) < \omega$, 且 $\{\cup\mathscr{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是点有限的. 这一开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 称为**弱 $\overline{\theta}$ 覆盖** (weak $\overline{\theta}$-covering).

显然, 弱 $\overline{\theta}$ 加细蕴含弱 θ 加细.

定理 6.1.7[366]　θ 加细空间是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

证明　设 X 是 θ 加细空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathscr{V}_n = \{V_\alpha : \alpha \in A_n\}$ 使对每一 $x \in X$ 存在 $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \operatorname{ord}(x, \mathscr{V}_n) < \omega$. 对每一 $i, j \in \mathbb{N}$, 置

$$F(i, j) = \{x \in X : \operatorname{ord}(x, \mathscr{V}_i) \leqslant j\},$$

易证 $F(i, j)$ 是闭集. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{W}_n = \left\{V_\alpha - \bigcup_{k=1}^{n-1} F(k, n-k) : \alpha \in A_n\right\}.$$

易知 $\mathscr{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 X 的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$, 且对每一 $x \in X$ 存在 $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \operatorname{ord}(x, \mathscr{W}_n) < \omega$. 下证 $\{\cup\mathscr{W}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是点有限的.

对每一 $x \in X$, 取最小的正整数 l 使 $\operatorname{ord}(x, \mathscr{W}_l) = m < \omega$, 则 $x \in F(l, m)$. 对于 $n > l + m$, $F(l, m) \subset F(l, n - l)$, 所以当 $n > l + m$ 时 x 不属于 $\mathscr{W}_n$ 中的任何元素. 证完.

定理 6.1.6 给出了次仿紧空间与弱 θ 加细空间的关系. 下述定理 6.1.8 给出仿紧空间与 θ 加细空间的关系. 先叙述两个引理.

引理 6.1.1　设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $F_n = \{x \in X : \operatorname{ord}(x, \mathscr{U}) \leqslant n\}$; 对每一 $x \in \cup\mathscr{U}$, 置 $W_x = \cap\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$, 则

(i) 每一 F_n 是闭集;

(ii) $\{W_x \cap (F_n - F_{n-1}) : x \in F_n - F_{n-1}\}$ 是关于 $F_n - F_{n-1}$ 的离散闭集族, 覆盖 $F_n - F_{n-1}$, 其中记 $F_0 = \varnothing$;

(iii) 如 V 是 X 中的开集且 $F_{n-1} \subset V$, 则 $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - V\}$ 是 X 中的离散闭集族, 覆盖 $F_n - V$.

证明 (i) 设 $x \notin F_n$, 则存在 $U_i \in \mathscr{U}$ 使得 $x \in U_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$. 令 $U = \bigcap_{i=1}^{n+1} U_i$, 则 U 是 X 的开集. 显然, $x \in U$ 且 $U \cap F_n = \varnothing$ (因为对任意 $x \in U$ 有 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}) \geqslant n+1$).

(ii) 设 $x \in F_n - F_{n-1}$, 则 $x \in W_x \cap (F_n - F_{n-1})$, 且 $\mathscr{U}$ 中恰好 n 个元素包含 x, 不妨设 $U_i \in \mathscr{U}$ 使得 $x \in U_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 对每一 $y \in F_n - F_{n-1}$, 若 $W_y \cap (F_n - F_{n-1}) \neq W_x \cap (F_n - F_{n-1})$, 则存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $y \in U$ 且 $x \notin U$, 于是 $U \cap W_x \cap (F_n - F_{n-1}) = \varnothing$. 否则, 存在 $z \in U \cap W_x \cap (F_n - F_{n-1})$, 那么每一 U_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 U 都包含 z, 这与 $z \in F_n - F_{n-1}$ 矛盾. 由上所证, 易知 $\{W_x \cap (F_n - F_{n-1}) : x \in F_n - F_{n-1}\}$ 是关于 $F_n - F_{n-1}$ 的离散闭集族.

(iii) 先证明 $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - V\}$ 覆盖 $F_n - V$. 由于 $F_n - V \subset F_n - F_{n-1}$, 若 $x \in F_n - V$, 由 (ii) 知 $W_x \neq \varnothing$. 所以 $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - V\}$ 覆盖 $F_n - V$.

下面证明 $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - F_{n-1}\}$ 是 X 中的离散闭集族. 对每一 $x \in F_n - F_{n-1}$, 由 (ii),

$$W_x \cap (F_n - V) = W_x \cap (F_n - F_{n-1}) \cap (F_n - V)$$

是 $F_n - V$ 的闭集, 而由 (i), $F_n - V$ 是 X 的闭集, 从而 $W_x \cap (F_n - V)$ 是 X 的闭集. 由 (ii) 及习题 5.5, $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - F_{n-1}\}$ 是 X 中的互不相交且闭包保持的闭集族, 再由习题 5.6, 它是 X 中的离散闭集族. 证完.

注记 引理 6.1.1 中 (iii) 的证明可知集族 $\{W_x \cap (F_n - V) : x \in F_n - F_{n-1}\}$ 也是 X 中的离散闭集族.

引理 6.1.2 设 X 是集态正规空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的开集族, 覆盖闭集 A, 且在 A 上是点有限的, 则存在 X 中的 σ 离散开集族覆盖 A, 加细 $\mathscr{U}$.

证明 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $F_n = \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathscr{U}) \leqslant n\}$ 及对每一 $x \in \cup\mathscr{U}$, 置 $W_x = \cap\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$. 由引理 6.1.1, 集族 $\{W_x \cap F_1 : x \in F_1\}$ 是 X 中的离散闭集族, 覆盖闭集 F_1. 由集态正规性, 存在离散开集族 $\mathscr{V}_1$ 覆盖 F_1, 加细 $\mathscr{U}$. 下面归纳地继续下去. 如已构造了覆盖 F_n 的开集族 $\bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{V}_k$ 加细 $\mathscr{U}$, 且每一 $\mathscr{V}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是离散的, 置 $G_n = \cup\{V : V \in \mathscr{V}_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, 则 $F_n \subset G_n$. 由引理 6.1.1 的注记, $\{W_x \cap (F_{n+1} - G_n) : x \in F_{n+1} - F_n\}$ 是离散闭集族, 覆盖 $F_{n+1} - G_n$. 由集态正规性, 存在离散开集族 $\mathscr{V}_{n+1}$ 覆盖 $F_{n+1} - G_n$, 加细 $\mathscr{U}$. 从而 $\bigcup_{k=1}^{n+1} \mathscr{V}_k$ 覆盖 F_{n+1}. 所以, 可以对每一 $k \in \mathbb{N}$, 构造离散开集族 $\mathscr{V}_k$ 使 $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_k$ 覆盖 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \supset A$, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

定理 6.1.8[416] θ 加细的集态正规空间是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 θ 加细的集态正规空间 X 的开覆盖, $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是加细 $\mathscr{U}$ 的 θ 序列. 对每一 $k\in\mathbb{N}$, 置 $A_{n,k}=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant k\}$. 则每一 $A_{n,k}$ 是闭集, 且 $\mathscr{V}_n$ 在 $A_{n,k}$ 上是点有限的. 由引理 6.1.2, 存在 σ 离散开集族 $\mathscr{W}_{n,k}$ 覆盖 $A_{n,k}$, 加细 $\mathscr{V}_n$. 从而 $\cup\{\mathscr{W}_{n,k}:n,\ k\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细覆盖. 由定理 5.1.2 得证. 证完.

注记 关于定理 6.1.8 是否可把 θ 加细减弱为弱 θ 加细, 答案是否定的, 见文献 [78] 或 [69].

下面我们借助于 Smith[368] 关于集态正规性的刻画, 可进一步推广定理 6.1.8.

定理 6.1.9[368] 正规空间 X 是集态正规空间当且仅当每一弱 $\overline{\theta}$ 覆盖具有局部有限开加细覆盖.

证明从略.

定理 6.1.10[368] 弱 $\overline{\theta}$ 加细的集态正规空间是仿紧空间.

证明 由弱 $\overline{\theta}$ 加细的定义 6.1.4 及定理 6.1.9 的必要性即得证. 证完.

上面叙述了:

$$\text{弱 }\theta\text{ 加细} + \text{完备性} \Rightarrow \text{次仿紧 (定理 6.1.6)};$$

$$\theta\text{ 加细} + \text{集态正规} \Rightarrow \text{仿紧 (定理 6.1.8)};$$

$$\text{弱 }\overline{\theta}\text{ 加细} + \text{集态正规} \Rightarrow \text{仿紧 (定理 6.1.10)}.$$

下面是关于弱仿紧性 (即 meta 紧性) 方面的结果:

$$\theta\text{ 加细} + \text{点态集态正规} \Rightarrow \text{弱仿紧}.$$

定义 6.1.5[49] 拓扑空间 X 称为**点态集态正规空间** (pointwisely collectionwise normal space), 如果对空间的每一离散闭集族 $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$, 存在点有限的开集族 $\{G_\alpha:\alpha\in A\}$ 使 $F_\alpha\subset G_\alpha\ (\alpha\in A)$, 且对 $\alpha\neq\beta$, $F_\alpha\cap G_\beta=\varnothing$.

定理 6.1.11[49] 空间 X 是弱仿紧空间当且仅当 X 是点态集态正规的 θ 加细空间.

易知, 弱仿紧空间 (即点态仿紧空间) 是点态集态正规空间 (读者自证, 习题 6.2). 充分性的证明从略.

定义 6.1.6[119] 拓扑空间 X 称为 **ortho 紧空间** (orthocompact space), 如果 X 的每一开覆盖具有内核保持的开加细覆盖.

由于点有限开集族是内核保持的 (定义 5.1.6), 故有: 弱仿紧 (即 meta 紧) $\Rightarrow$ ortho 紧.

在本节叙述的许多覆盖性质 (到此为止) 都是弱于仿紧的, 它们间关系如图 6.1 所示.

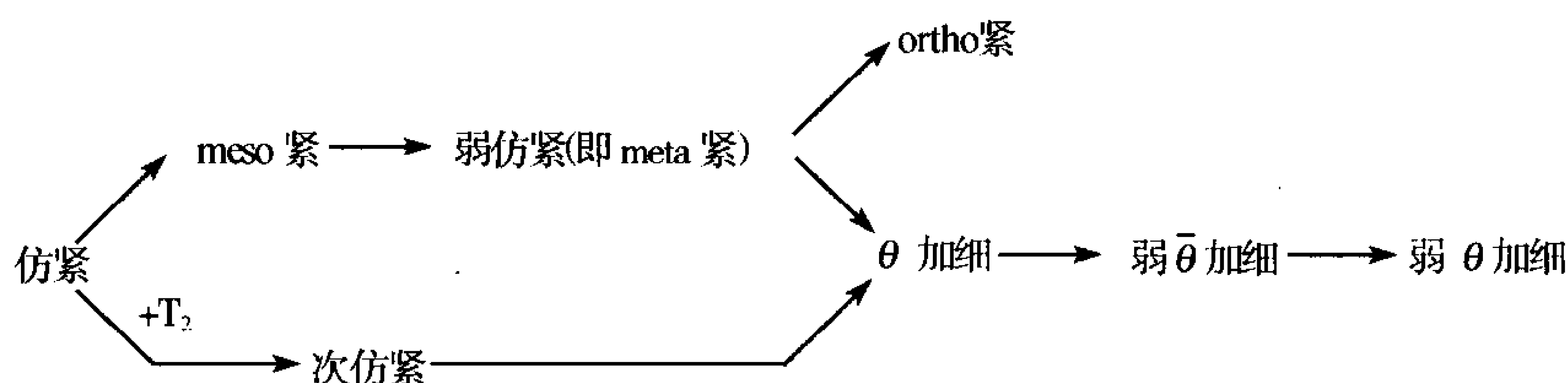


图 6.1

相反的蕴含关系均不成立, 参见文献 [69] 及所引有关文献.

如果把仿紧性、弱仿紧性 (即 meta 紧性)、θ 加细性、弱 $\bar{\theta}$ 加细性、弱 θ 加细性中的局部有限、点有限性分别换为局部可数、点可数性, 则有下列一些覆盖性质.

定义 6.1.7 拓扑空间 X 称为**仿 Lindelöf 空间** (para-Lindelöf space[55]), 如果 X 的每一开覆盖具有局部可数开加细覆盖; 称为 **meta-Lindelöf 空间**[11, 55], 如果 X 的每一开覆盖具有点可数开加细覆盖; 称为**弱 $\delta\theta$ 加细空间** (weakly $\delta\theta$-refinable space[410]), 如果 X 的每一开覆盖具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 使对每一 $x\in X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant \mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega$; 如果上述条件加强为每一 $\mathscr{V}_n$ 是覆盖, 则称为 **$\delta\theta$ 加细空间** ($\delta\theta$-refinable space[30]); 如果对弱 $\delta\theta$ 加细空间中的开加细覆盖再要求 $\{\cup\mathscr{V}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是点有限的, 则称为**弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间** (weakly $\overline{\delta\theta}$-refinable space[367]).

上述空间间的关系如图 6.2 所示.

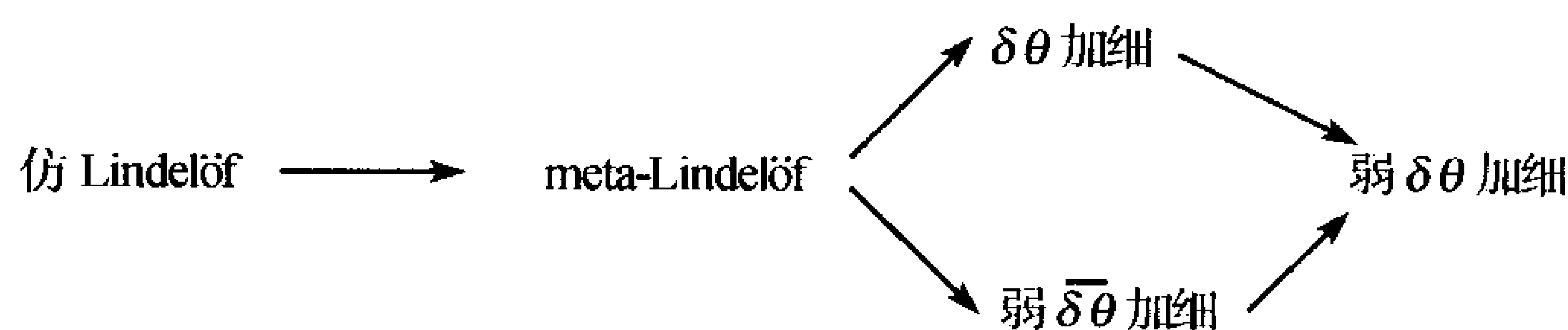


图 6.2

问题[143, 367] $\delta\theta$ 加细空间是否弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间?

关于图 6.2 中的覆盖性质, Burke[67] 给出下述仿 Lindelöf 空间的有效刻画.

定理 6.1.12[67] 空间 X 是仿 Lindelöf 空间当且仅当 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部可数加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$, $x\in\mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{V}))$.

证明 必要性显然. 下证充分性. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 由假设存在局部可数覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$. 从而存在开覆盖 $\mathscr{W}$ 使对每一 $W\in\mathscr{W}$, W 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交. 由假设, 存在局部可数覆盖 $\mathscr{P}$ 加细 $\mathscr{W}$, 且对每一 $x\in X$, $x\in\mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{P}))$. 对每一 $V\in\mathscr{V}$, 取 $U(V)\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset U(V)$. 置 $G(V)=\mathrm{Int}(\mathrm{st}(V,\mathscr{P}))\cap U(V)$. $G(V)$ 是开集, 因对每一 $x\in V$, $x\in\mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{P}))$, 所以 $V\subset\mathrm{Int}(\mathrm{st}(V,\mathscr{P}))$. 显然 $\mathscr{G}=\{G(V):V\in\mathscr{V}\}$ 是空间 X 的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 下证 $\mathscr{G}$ 是局部可数的. 对每一

$x \in X$, 因 $\mathscr{P}$ 是局部可数的, 存在 x 的开邻域 $N(x)$ 仅与 $\mathscr{P}$ 中可数个元相交. 每一 $P \in \mathscr{P}$ 包含在某 $W \in \mathscr{W}$ 内, W 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交, 所以 P 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交. 由 $\mathrm{st}(V, \mathscr{P})$ 的定义, 每一 $P \in \mathscr{P}$ 只能包含在 $\{\mathrm{st}(V, \mathscr{P}) : V \in \mathscr{V}\}$ 的可数个 $\mathrm{st}(V, \mathscr{P})$ 内. 从而 $N(x)$ 与 $\mathscr{G}$ 中可数个元相交, $\mathscr{G}$ 是局部可数的. 证完.

注记　Z. Balogh[40] 构造了一个 meta-Lindelöf 的集态正规空间, 不是仿紧空间. 仿 Lindelöf 的集态正规空间是否仿紧空间还是一个尚未解决的问题 [40].

下面叙述一个强于仿紧性的覆盖性质 —— 强仿紧性. 这一覆盖性质比较特殊. 例如, 不能为度量空间所蕴含, 不能为有限对一闭映射保持, 不具有 F_σ 遗传性等.

定义 6.1.8　集族 $\mathscr{A}$ 称为**星有限的** (star-finite), 如果对每一 $A \in \mathscr{A}$, $\{B \in \mathscr{A} : B \cap A \neq \varnothing\}$ 是有限的; 称为**星可数的** (star-countable), 如果对每一 $A \in \mathscr{A}$, $\{B \in \mathscr{A} : B \cap A \neq \varnothing\}$ 是可数的. 拓扑空间 X 称为**强仿紧空间** (strongly paracompact space[109]), 如果 X 的每一开覆盖具有星有限的开加细覆盖.

显然, 星有限开覆盖是局部有限的, 故强仿紧 $\Rightarrow$ 仿紧. 相反的蕴含关系不成立 (存在非强仿紧的度量空间), 见例 6.2.3. 而由推论 6.1.1 知可分度量空间是强仿紧的.

在给出强仿紧空间的刻画 (定理 6.1.13) 以前, 先给出两个引理.

引理 6.1.3[184]　每一个星可数集族 $\mathscr{A}$ 可以表示为 $\mathscr{A} = \cup\{\mathscr{B}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 每一 $\mathscr{B}_\alpha$ 是可数集族, 且当 $\alpha \neq \beta$ 时, $(\cup\mathscr{B}_\alpha) \cap (\cup\mathscr{B}_\beta) = \varnothing$.

证明　对 $A, B \in \mathscr{A}$, 称 $\mathscr{A}$ 的有限子集族 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为 A 到 B 的链, 如果 $A = C_1$, $B = C_n$ 且 $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing (1 \leqslant i < n)$. 对每一 $A \in \mathscr{A}$, 置

$$\mathscr{B}(A) = \{B \in \mathscr{A} : \text{存在 } \mathscr{A} \text{中从 } A \text{到 } B \text{的链}\}.$$

易知 $\mathscr{B}(A)$ 是可数集族, 且对 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$, $(\cup\mathscr{B}(A_1)) \cap (\cup\mathscr{B}(A_2)) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\mathscr{B}(A_1) = \mathscr{B}(A_2)$. 证完.

引理 6.1.4　设 $\mathscr{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是正规空间 X 的可数开覆盖, 且 $\mathscr{U}$ 具有闭加细覆盖 $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 使 $F_k \subset U_k (k \in \mathbb{N})$, 则 $\mathscr{U}$ 具有星有限的开加细覆盖.

证明　对每一 $k \in \mathbb{N}$, 由于 $F_k \subset U_k$ 及正规性, 存在开集族 $\{G(k,n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使

$$F_k \subset G(k,1) \subset \overline{G(k,1)} \subset G(k,2) \subset \cdots \subset G(k,n) \subset \overline{G(k,n)} \subset \cdots \subset U_k.$$

对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $V_n = \cup\{G(i,n) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. 置

$$H(1,1) = V_2 \cap G(1,2);$$

$$H(k,n) = (V_{n+1} - V_{n-1}) \cap G(k, n+1) \quad (n > 1; 1 \leqslant k \leqslant n).$$

可直接验证 $\{H(k,n) : k, n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是星有限的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

注记 引理 6.1.4 的内容可以补充入定理 5.6.2 作为正规空间情况下, 可数仿紧性的一个充要条件.

定理 6.1.13[365] 在正则空间, 下列论断等价:

(i) X 是强仿紧空间;

(ii) X 的每一开覆盖具有星可数的开加细覆盖.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然. 下证 (ii) $\Rightarrow$ (i). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, $\mathscr{U}$ 具有星可数开加细 $\mathscr{V}$. 由引理 6.1.3, $\mathscr{V}$ 可以表示为 $\mathscr{V} = \cup\{\mathscr{B}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 每一 $\mathscr{B}_\alpha$ 是可数集族且当 $\alpha \neq \beta$ 时, $(\cup\mathscr{B}_\alpha) \cap (\cup\mathscr{B}_\beta) = \varnothing$. 按 (ii) 可以蕴含仿紧性, 只要把每一 $\mathscr{B}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$ 表示为 $\mathscr{B}_\alpha = \{B_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\}$, 从而对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{B_{\alpha,n} : \alpha \in \Lambda\}$ 是一离散开集族, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{B_{\alpha,n} : \alpha \in \Lambda\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细 (由定理 5.1.2 知 X 是仿紧的). 对每一 $\alpha \in \Lambda$, 置 $Z_\alpha = \cup\mathscr{B}_\alpha$, Z_α 是仿紧空间 X 的既开又闭的子集, 从而是仿紧的. $\mathscr{B}_\alpha = \{B_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是 Z_α 的可数开覆盖, 存在可数闭加细 $\{F_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $F_{\alpha,n} \subset B_{\alpha,n}$, $n \in \mathbb{N}$ (引理 5.6.1). 由引理 6.1.4, 存在星有限的开集族 $\mathscr{W}_\alpha$ 覆盖 Z_α, 加细 $\mathscr{B}_\alpha$. 从而 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{W}_\alpha$ 是空间 X 的星有限的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

推论 6.1.1[301] 正则 Lindelöf 空间是强仿紧空间.

证明 由定理 6.1.13 的 (ii) 即得证. 证完.

推论 6.1.1 加强了推论 5.1.1.

1977 年, 刘应明 [265] 引入拟仿紧性作为次仿紧性与弱仿紧性的共同推广.

定义 6.1.9[265] 拓扑空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为相对于 $X' \subset X$ 离散的, 如果对每一 $x \in X'$ 存在 X 中的邻域至多与 $\mathscr{P}$ 中一个元相交. 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的子集族. 如果 $\mathscr{P}_1$ 是离散的, 且对 $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ 相对于 $X - \bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$ 是离散的 ($\mathscr{P}_i^* = \cup\{P : P \in \mathscr{P}_i\}$), 则称 $\mathscr{P}$ 是 **σ 相对离散的** (σ-relatively discrete); 如果再要求 $\mathscr{P}_1$ 是闭集族且对 $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n' = \{P - \bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^* : P \in \mathscr{P}_n\}$ 是子空间 $X - \bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$ 的闭集族, 则称 $\mathscr{P}$ 是 **σ 相对离散相对闭的** (σ-relatively discrete and relatively closed). 空间 X 称为**拟仿紧的** (quasi-paracompact) (**狭义拟仿紧的** (strongly quasi-paracompact)), 如果 X 的每一开覆盖具有 σ 相对离散的 (σ 相对离散相对闭的) 加细覆盖.

注记 狭义拟仿紧空间是拟仿紧空间. 易知在正则空间中二者等价. 容易验证, 当 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 σ 相对离散相对闭时, 对每一 $n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$ 是空间 X 的闭集.

由次仿紧空间的定义 (定义 6.1.1), 显然次仿紧空间是狭义拟仿紧空间. 下证弱仿紧空间是狭义拟仿紧的.

定理 6.1.14[265] 弱仿紧空间是狭义拟仿紧的.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是弱仿紧空间 X 的开覆盖, $\mathscr{V}$ 具有点有限的开加细覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 对每一 $m \in \mathbb{N}$, 记指标集 A 中 m 个不同元素组所成集为 A_m. 设

$\xi \in A_m$, $\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$. 置 $U_\xi = U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_m}$, $\mathscr{U}_m = \{U_\xi : \xi \in A_m\}$. 记 E_m 为 X 中恰好属于 $\mathscr{U}$ 中 m 个开集的点所成集, 则 $\mathscr{U}_m^* \supset E_m$. 置

$$\mathscr{P}_m = \{U_\xi \cap E_m : \xi \in A_m\}.$$

显然, $\mathscr{P}_m$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{P}_m^* = E_m$. 由 $\mathscr{U}$ 是点有限的, $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, 所以 $\mathscr{P} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_i$ 覆盖 X. 对 A_m 中的不同元 ξ, η, $U_\xi \cap U_\eta \cap E_m = \varnothing$, 所以每一 U_η 至多与 $\mathscr{P}_m$ 中一个元相交, 即 $\mathscr{P}_m$ 关于 $\mathscr{U}_m^*$ 离散. 因为

$$X - \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathscr{P}_i^* = X - \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i \subset \mathscr{U}_m^*,$$

所以 $\mathscr{P}_m$ 关于 $X - \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathscr{P}_i^*$ 离散, 不难验证

$$U_\xi \cap E_m = \left(X - \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathscr{P}_i^*\right) \cap (X - \cup\{U_\eta : \eta \in A_m,\ \eta \neq \xi\}),$$

即 $U_\xi \cap E_m$ $(= U_\xi \cap E_m - \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathscr{P}_i^*)$ 是子空间 $X - \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathscr{P}_i^*$ 中的闭集. 所以 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{U}$ 的, 也是 $\mathscr{V}$ 的 σ 相对离散相对闭的加细覆盖. 到此证明了 X 是狭义拟仿紧空间. 证完.

利用定理 6.1.14 的证法, 可得下述定理.

定理 6.1.15 [269, 446]　θ 加细空间是狭义拟仿紧的.

证明　设 $\mathscr{V}$ 是 θ 加细空间 X 的开覆盖, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是开覆盖序列加细 $\mathscr{V}$, 且对每一 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_n) < \omega$. 利用定理 6.1.14 的证法, 对每一 $\mathscr{U}_n$ $(n \in \mathbb{N})$, 存在 σ 相对离散相对闭的加细集族 $\mathscr{P}_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_{n,m}$, 覆盖 $X_n = \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathscr{U}_n) < \omega\}$. 从而 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 覆盖 X. 用对角线法, 令

$$\mathscr{W}_1 = \mathscr{P}_{1,1},\quad \mathscr{W}_2 = \mathscr{P}_{1,2},\quad \mathscr{W}_3 = \mathscr{P}_{2,1},\quad \mathscr{W}_4 = \mathscr{P}_{1,3},\quad \mathscr{W}_5 = \mathscr{P}_{2,2},\ \cdots.$$

显然, $\mathscr{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 $\mathscr{V}$ 的 σ 相对离散相对闭的加细集族, 覆盖 X. 故 X 是狭义拟仿紧的. 证完.

定理 6.1.16 [269, 446]　拟仿紧空间是弱 θ 加细空间.

证明　设 $\mathscr{U}$ 是拟仿紧空间 X 的开覆盖, 存在 σ 相对离散的覆盖 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 加细 $\mathscr{U}$. 当 $n = 1$ 时, $\mathscr{P}_1$ 是 X 中的离散集, 对任一 $P \in \mathscr{P}_1$ 及 $x \in P$ 存在 x 的开邻域 $V(x)$ 仅与 $\mathscr{P}_1$ 中一个元素相交. 由 $x \in P$, $V(x)$ 仅与 P 相交. 从而 $V(P) = \bigcup_{x\in P} V(x)$ 也仅与 P 相交. 取 $U(P) \in \mathscr{U}$ 使 $P \subset U(P)$. 令

$$B(P) = V(P) \cap U(P),\ \mathscr{B}_1 = \{B(P) : P \in \mathscr{P}_1\},$$

显然, 开集族 $\mathscr{B}_1$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{B}_1^* \supset \mathscr{P}_1^*$. 对每一 $x \in \mathscr{P}_1^*$, $x \in$ 某 $P_0 \in \mathscr{P}_1$. 对任一 $P \neq P_0$, 则 $B(P) \cap P_0 = \varnothing$. 故 $x \notin B(P)$. 所以对每一 $x \in \mathscr{P}_1^*$, $\mathrm{ord}(x, \mathscr{B}_1) = 1$.

对 $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ 相对于 $X - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^*$ 离散. 由定义 6.1.9, 对每一 $x \in X - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^*$, 存在 x 在 X 中的开邻域 $V(x)$ 至多与 $\mathscr{P}_n$ 中一个元素相交. 用完全相同的证法得开集族 $\mathscr{B}_n$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{B}_n^* \supset \mathscr{P}_n^* - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^*$ 使对每一 $x \in X - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^* \supset \mathscr{P}_n^* - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^*$, $\mathrm{ord}(x, \mathscr{B}_n) = 1$.

置 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n$. 显然 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 对 $x \in X$, 设 n_0 是 $x \in \mathscr{P}_n^*$ 的最小下标, 则 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{B}_{n_0}) = 1$. 故 X 是弱 θ 加细空间. 证完.

定理 6.1.17[269, 446] 狭义拟仿紧空间是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是狭义拟仿紧空间 X 的开覆盖, 存在 σ 相对离散相对闭的覆盖 $\mathscr{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 加细 $\mathscr{U}$. 由定理 6.1.16 的证明, 存在弱 θ 加细覆盖 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{B}_1^* \supset \mathscr{P}_1^*$, $\mathscr{B}_n^* \supset \mathscr{P}_n^* - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^*$ $(n \geqslant 2)$. 由 $\mathscr{P}$ 是 σ 相对离散相对闭的, 由定义 6.1.9 的注记, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{P}_i^*$ 是空间 X 的闭集. 置

$$\mathscr{B}_1' = \mathscr{B}_1;\ \mathscr{B}_n' = \left\{B - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_i^* : B \in \mathscr{B}_n\right\} \quad (n \geqslant 2).$$

$\mathscr{B}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{B}_n'$ 仍是弱 θ 加细覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 下证 $\{\mathscr{B}_n'^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是点有限的. 对每一 $x \in X$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使 $x \in \mathscr{P}_{n_0}^*$, 则当 $n > n_0$ 时, $x \notin \mathscr{B}_n'^*$. 所以 X 是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间. 证完.

综上所述, 有如图 6.3 所示蕴含关系.

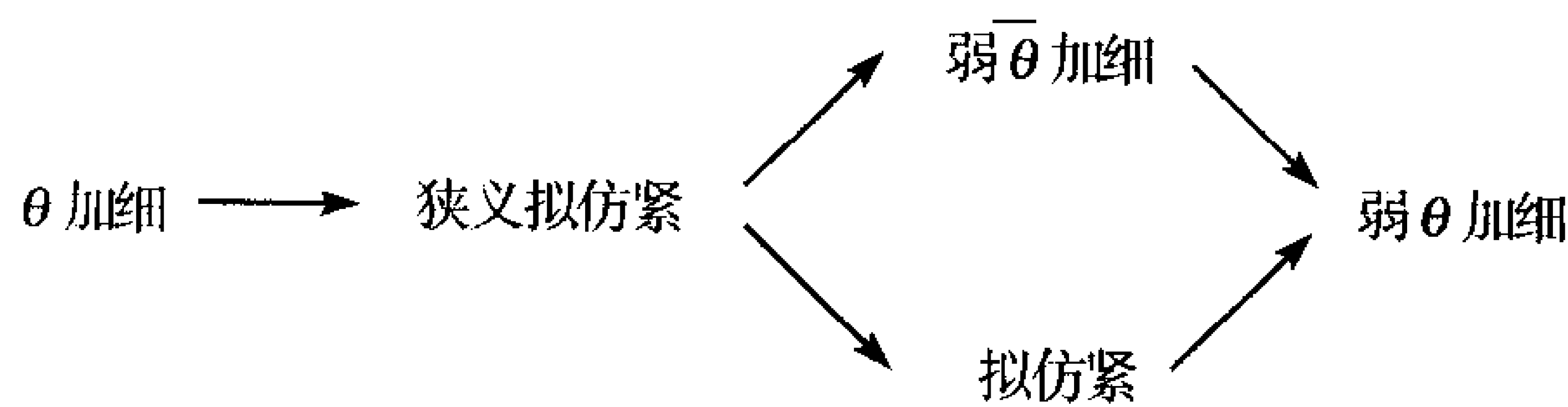


图 6.3

相反的蕴含关系均不成立, 同时拟仿紧性与弱 $\overline{\theta}$ 加细性互不蕴含 (见文献 [265], [446], [269], [158]).

关于怎样较弱的覆盖性质 + 集态正规性 ⇒ 仿紧性? 前面定理 6.1.10 的结果: "弱 $\overline{\theta}$ 加细 + 集态正规 ⇒ 仿紧" 到目前为止是比较好的, 因为不能以 "弱 θ 加细" 代替 "弱 $\overline{\theta}$ 加细" (见定理 6.1.8 的注记). 刘应明 [265] 证明了可用 "拟仿紧" 代 "弱 $\overline{\theta}$ 加细" 从图 6.3 所列蕴含关系看, 同样是比较好的.

定理 6.1.18[265] 拟仿紧的集态正规空间是仿紧空间.

证明从略.

关于定理 6.1.11: "θ 加细 + 点态集态正规 $\Rightarrow$ 弱仿紧". 朱俊 [446] 和龙冰 [269] 证明了以 "狭义拟仿紧" 代替 "θ 加细", 改进了 Boone[49] 的结果.

定理 6.1.19 [269, 446]　空间 X 是弱仿紧空间当且仅当 X 是点态集态正规的狭义拟仿紧空间.

证明从略.

像 5.6 节引入可数仿紧空间一样可以定义: **可数次仿紧** (countably subparacompact[195])、**可数弱仿紧** (countably weakly paracompact 或 countably metacompact[202])、**可数 meso 紧** (countably mesocompact[418])、**可数 θ 加细** (countably θ-refinable[161]) 等空间, 只要把相应的次仿紧、弱仿紧、meso 紧、θ 加细等空间的定义中的 "每一开覆盖" 换为 "每一可数开覆盖" 就行. 它们间蕴含关系基本上相应于定义 6.1.6 后的图 6.1 所示, 但也有个别蕴含关系不尽相同.

定理 6.1.20 [195]　空间 X 是可数次仿紧空间当且仅当对 X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在可数闭覆盖 $\{F_{n,j}\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ 使 $F_{n,j}\subset U_n$ $(n,j\in\mathbb{N})$.

证明　必要性. 设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可数次仿紧空间 X 的开覆盖, $\mathscr{F}=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_j$ 是 X 的 σ 离散闭覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 把 $\mathscr{F}_j$ 中的闭集之包含于 U_n 者的并记作 $F_{n,j}$, 则闭集 $F_{n,j}\subset U_n$ $(n,j\in\mathbb{N})$.

充分性. 由一个闭集 $F_{n,j}$ 形成的闭集族 $\mathscr{F}_{n,j}=\{F_{n,j}\}$ $(n,j\in\mathbb{N})$ 当然是离散闭的. 证完.

推论 6.1.2 [195]　完备空间是可数次仿紧空间.

证明　完备空间的每一开集是 F_σ 集, 由定理 6.1.20 得证. 证完.

定理 6.1.21 [195]　可数次仿紧空间是可数弱仿紧空间.

证明　设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可数次仿紧空间 X 的可数开覆盖. 存在可数闭覆盖 $\{F_{n,j}\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ 使 $F_{n,j}\subset U_n$ $(n,j\in\mathbb{N})$. 置

$$V_1=U_1, V_n=U_n-\cup\{F_{k,j}:k<n,\ j<n\}\quad(n\geqslant 2),$$

则 $\mathscr{V}=\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点有限开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

注记　按次仿紧空间与弱仿紧空间之间无蕴含关系, 而可数次仿紧蕴含可数弱仿紧. 相反的蕴含关系不成立, 见例 6.1.1.

下面是可数弱仿紧空间的刻画, 它与可数仿紧空间的刻画 (定理 5.6.1) 类似.

定理 6.1.22 [202]　下列论断等价:

(i) X 是可数弱仿紧空间;

(ii) 对 X 的每一可数开覆盖 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的点有限的开覆盖 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $V_n\subset U_n(n\in\mathbb{N})$;

(iii) 对 X 的每一递增的开覆盖 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 存在 X 的闭覆盖 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $F_n\subset W_n(n\in\mathbb{N})$;

(iv) 对 X 的每一递减的闭集序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, 存在 X 的开集序列 $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $F_n \subset W_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \varnothing$.

证明 证法类似定理 5.6.1 且较简, 从略.

定理 6.1.23[161] 下列论断等价:

(i) X 是可数弱仿紧空间;

(ii) X 是可数 θ 加细空间;

(iii) 对 X 的每一递减的闭集序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, 存在 X 的 G_δ 集的序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $F_n \subset G_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \varnothing$.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii), 显然. 下证 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 X 是可数 θ 加细空间, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的递减闭集序列满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. 置 $\mathscr{U} = \{X - F_n : n\in\mathbb{N}\}$, $\mathscr{U}$ 是 X 的可数递增开覆盖, 存在 θ 加细序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 置

$$G_{n,j} = \operatorname{st}(F_n, \mathscr{V}_j), \quad G_n = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{n,j},$$

则每一 G_n 是 G_δ 集且 $F_n \subset G_n (n\in\mathbb{N})$. 下证 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \varnothing$.

如不然, 存在 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 选取 $j_0 \in \mathbb{N}$ 使 $\operatorname{ord}(x, \mathscr{V}_{j_0}) < \omega$. 现设 $\operatorname{ord}(x, \mathscr{V}_j) = k$, 则存在集 $V_1, V_2, \cdots, V_k \in \mathscr{V}_{j_0}$ 使 $x \in V_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 对 $V \in \mathscr{V}_{j_0}$ 而 $V \neq V_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则 $x \notin V$. 对每一 $i \leqslant k$, 存在 $n_i \in \mathbb{N}$ 使 $V_i \subset X - F_{n_i}$. 置 $n = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$, 则对 $i \leqslant k$, $V_i \subset X - F_n$. 按 $x \in G_{n,j_0} = \operatorname{st}(F_n, \mathscr{V}_{j_0})$, 所以存在 $V \in \mathscr{V}_{j_0}$ 使 $x \in V$ 且 $V \cap F_n \neq \varnothing$. 由于 $x \in V \in \mathscr{V}_{j_0}$, 所以 V 必须就是 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中的某一个集, 从而 $V \subset X - F_n$. 这与 $V \cap F_n \neq \varnothing$ 矛盾.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 下证 (iii) $\Rightarrow$ 定理 6.1.22 的 (iv), 从而由定理 6.1.22 得证. 设 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的递减闭集序列, 满足 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. 由 (iii) 存在 X 的 G_δ 集的序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $F_n \subset G_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \varnothing$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置 $G_n = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{n,j}$, $G_{n,j}$ 是开集; 再置

$$U_n = \cap\{G_{i,j} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

显然, U_n 是开集, $F_n \subset U_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \varnothing$. 这满足定理 6.1.22 的 (iv). 证完.

综上所述, 关于可数覆盖性质有如图 6.4 所示蕴含关系.

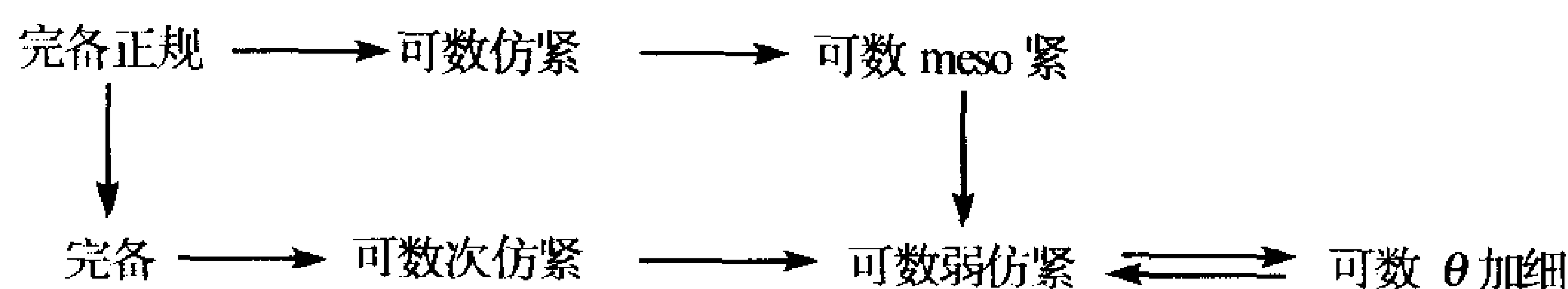


图 6.4

例 6.1.1[235]　$[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是可数次仿紧空间.

对 $X=[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$, 令

$$H=\{(\alpha,\omega_1)\in X:\alpha<\omega_1\},\quad K=\{(\alpha,\alpha)\in X:\alpha<\omega_1\},$$

则 H, K 是 X 中不相交的闭集. 如果 X 是可数次仿紧空间, 由定理 6.1.20, 则 X 的开覆盖 $\{X-H,\ X-K\}$ 有可数的闭加细覆盖 $\mathscr{F}$. 记

$$\{F\in\mathscr{F}:F\cap H\neq\varnothing\}=\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}},\quad \{F\in\mathscr{F}:F\cap H=\varnothing\}=\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

对每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\alpha<\omega_1$, 点 $(\alpha,\omega_1)\notin G_n$, 存在 $\gamma_{n,\alpha}<\omega_1$ 使得 $\alpha<\gamma_{n,\alpha}$ 且 $(\{\alpha\}\times(\gamma_{n,\alpha},\omega_1])\cap G_n=\varnothing$. 令 $\gamma_\alpha=\sup\{\gamma_{n,\alpha}:n\in\mathbb{N}\}$, 那么 $\alpha<\gamma_\alpha<\omega_1$, 于是 $G_n\cap\{(\alpha,\gamma)\in X:\gamma_\alpha<\gamma\leqslant\omega_1\}=\varnothing$.

这时, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 满足: 对于任意的 $\alpha<\omega_1$, 存在 $\beta,\gamma<\omega_1$ 使得 $\alpha\leqslant\beta<\gamma$ 且点 $(\beta,\gamma)\in H_m$. 事实上, 否则, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_n<\omega_1$ 使得当 $\alpha_n\leqslant\beta<\gamma<\omega_1$ 时, 点 $(\beta,\gamma)\notin H_n$. 令 $\alpha_0=\sup\{\alpha_n:n\in\mathbb{N}\}$, 那么 $\alpha_0<\omega_1$, 所以可取定点 $\gamma_0\in(\gamma_{\alpha_0},\omega_1)$, 则点 $(\alpha_0,\gamma_0)\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(H_n\cup G_n)=X$, 矛盾.

令 $Y=([0,\omega_1)\times[0,\omega_1))\cap H_m$. 由上述关于 H_m 的性质, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 可选取点 $(\beta_n,\gamma_n)\in Y$ 满足 $\gamma_n\leqslant\beta_{n+1}<\gamma_{n+1}$. 令 $\beta=\sup\{\beta_n:n\in\mathbb{N}\}$, 由于 $\beta_n<\gamma_n\leqslant\beta_{n+1}$, 于是在 $[0,\omega_1)$ 中序列 $\{\beta_n\}$ 和 $\{\gamma_n\}$ 都收敛于 β. 从而点 $(\beta,\beta)\in H_m\cap K$, 这与 $K\cap H_m=\varnothing$ 矛盾.

因为 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 是可数紧空间 (习题 3.23), 所以例 6.1.1 表明完全正则的可数紧空间未必是可数次仿紧空间. 由推论 5.6.1, 定理 5.6.2, 6.1.22, 6.1.23, 正规的可数 θ 加细空间是可数仿紧空间和可数次仿紧空间.

6.2 映射性质

下面叙述 6.1 节中介绍的一些覆盖性质的映射性质. 本节中的映射都是连续满映射.

自从 Micheal[280] 开创以闭包保持闭加细覆盖刻画正则仿紧性 (定理 5.1.4), 从而得到闭映射保持 T_2 仿紧性 (定理 5.2.1) 后, 学者们对其他覆盖性质有目的地做类似的刻画企图获得相应的映射性质. 下面关于次仿紧、弱仿紧及 θ 加细空间的映射定理就是这样得到的.

定理 6.2.1 (Burke 定理 [60, 61])　次仿紧空间在闭映射下的像是次仿紧空间.

证明　由定理 6.1.1 的 (iii), 仿定理 5.2.1 的证法即得证. 证完.

定理 6.2.2 (Worrell 定理 [414])　弱仿紧空间在闭映射下的像是弱仿紧空间.

证明　由定理 6.1.2 的 (ii), 仿定理 5.2.1 的证法即得证. 证完.

定理 6.2.3 (Junnila 定理[217]) θ 加细空间在闭映射下的像是 θ 加细空间.

证明 由定理 6.1.4 的 (ii), 仿定理 5.2.1 的证法即得证. 证完.

关于 meso 紧空间的映射定理, 定理 6.1.3 的 (ii) 也是有目的地安排的, 但没有前面定理 6.1.1 的 (iii)、定理 6.1.2 的 (ii) 和定理 6.1.4 的 (ii) 那样明确, 相应的映射定理也有所不同.

定理 6.2.4[147] Meso 紧空间在闭的紧覆盖映射下的像是 meso 紧空间.

证明 设 X 是 meso 紧空间, $f: X \to Y$ 是闭的紧覆盖映射 (定义 5.5.1). 设 $\mathscr{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ 是空间 Y 的定向开覆盖, 则 $\mathscr{U} = \{f^{-1}(V_\beta)\}_{\beta \in B}$ 是空间 X 的定向开覆盖. 由定理 6.1.3 的 (ii), $\mathscr{U}$ 具有闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 且 $\mathscr{F}$ 为 X 中所有紧集组成的集族所加细. 因 f 是闭映射, $\{f(F_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是空间 Y 的闭包保持闭覆盖, 加细 $\mathscr{V}$. 因 f 是紧覆盖的, $\{f(F_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 为 Y 中所有紧集组成的集族所加细. 由定理 6.1.3 的 (ii), 知 Y 是 meso 紧空间. 证完.

定理 6.2.5[147] Meso 紧空间在完备映射下的像是 meso 紧空间.

证明 因完备映射是闭的紧覆盖映射 (见定义 5.5.1). 证完.

至于闭映射能否保持 meso 紧性, 我们回忆在前面定理 5.2.2 证明了 “双商闭映射保持 (不加分离公理的) 仿紧性” 后, 曾同样提出闭映射能否保持这样的仿紧性, 并指出答案是否定的, 有反例存在. 下面的例 6.2.1 正是这样的例, 而反例 6.2.2 否定了 meso 紧性情况.

例 6.2.1[244] 存在 T_1 强仿紧空间在某闭映射下的像不是可数仿紧空间.

取 $X = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) - \{(0,0)\}$, 这里 $\mathbb{N}$ 是正整数集. 对 $m, n, k \in \mathbb{N}$, 置 $V(n,m) = \{(n,k) : k \geqslant m\}$. 在 X 上导入如下拓扑:

(i) 点 $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的邻域基为 $\{\{(n,m)\}\}$;

(ii) 点 $(n,0)$ 的邻域基为 $\{V(n,m) \cup \{(n,0)\}\}_{m \in \mathbb{N}}$;

(iii) 点 $(0,n)$ 的邻域基为 $\{V(n,m) \cup \{(0,n)\}\}_{m \geqslant n}$.

易知 X 是 T_1 空间. 可以证明 X 是强仿紧空间.

将 X 的子集 $\{0\} \times \mathbb{N}$ 粘合成一点 0^* 所成的商空间记为

$$Y = (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})) \cup \{0^*\}.$$

由于 $\{0\} \times \mathbb{N}$ 是 X 的闭子集, 故商映射 f 是闭映射. 可以证明 Y 不是可数仿紧空间. 这例说明 T_1 仿紧性不能为闭映射保持.

例 6.2.2[244] 存在 T_0 强仿紧空间在某闭映射下的像不是可数 meso 紧空间.

仍取例 6.2.1 中的集 X, 在导入拓扑时, (i), (ii) 相同; (iii) 修改为: 点 $(0,n)$ 的邻域基由单元族 $\{V(n,n) \cup \{(0,n)\}\}$ 形成. 由于点 $(0,n)$ 的邻域总包含着点 (n,n), 这空间是 T_0 空间, 类似地可证明是强仿紧空间.

同样, 把闭集 $\{0\}\times\mathbb{N}$ 粘成一点 0^* 的商空间记为 Y, 商映射 f 仍是闭映射. 同样可证 Y 不是可数仿紧空间. 按商拓扑的定义, Y 的点 0^* 的邻域基由单元素族 $\{\{(n,m): m\geqslant n>0\}\cup\{0^*\}\}$ 形成. 所以 Y 满足第一可数公理. 由于第一可数空间的紧有限集族是局部有限的 (习题 6.11), 知 Y 不是可数 meso 紧空间. 例 6.2.2 说明 T_0 的 meso 紧性不能为闭映射保持.

例 6.2.2 说明闭映射不能保持 meso 紧性, 但是可以证明闭映射能保持正规 meso 紧性. 不知在 T_2 或正则空间类中, 闭映射能否保持 meso 紧性?

定理 6.2.6[147]　正规 meso 紧空间在闭映射下的像是正规 meso 紧空间.

证明　见定理 6.6.9 的注记.

在弱 θ 加细空间的刻画 (定理 6.1.5) 中, 没有借助于闭包保持闭加细覆盖的某种形式. 这说明这种类型的刻画对弱 θ 加细空间来说有一定的困难 (但未必不可能, 读者可以尝试). 因此, 关于弱 θ 加细空间的映射定理不能像前面那些空间情况容易得到. 下面的结果是 Burke 得到的, 证明难度较大, 读者可见文献 [70], 证明从略.

定理 6.2.7[70]　弱 θ 加细空间在完备映射下的像是弱 θ 加细空间.

问题[66, 369]　闭映射能否保持弱 θ 加细性?

关于弱 $\bar{\theta}$ 加细空间, 情况更困难. 在文献中没有看到关于这类空间的有效刻画, 连类似于弱 θ 加细空间的刻画 (定理 6.1.5) 都难得到 (而在上述定理证明中主要利用定理 6.1.5 的 (ii)).

问题[369]　闭映射或完备映射能否保持弱 $\bar{\theta}$ 加细性?

关于 ortho 紧空间, Gruenhage[164] 构造反例说明闭映射不能保持 ortho 紧性. 接着 Burke[65] 构造反例说明完备映射也不能保持 ortho 紧性.

问题[66]　有限对一闭映射能否保持 ortho 紧性?

关于强仿紧空间, 它的映射性质较差. Ponomarev[336] 曾证明 "每一仿紧空间是某一强仿紧空间在完备映射下的像", 这说明完备映射未必保持强仿紧性 (见例 6.2.3).

例 6.2.3 (有限对一闭映射不保持强仿紧性)　存在度量空间 X 可以表示为两个强仿紧闭子空间 F_1, F_2 的并, 但 X 不是强仿紧空间 [见文献 [114] 中练习 5.3.F(e)]. 置 $F=F_1\oplus F_2$ (不相交拓扑和), 显然映射 $f:F\to X$ 是至多二对一的闭映射. 容易验证, 强仿紧性关于拓扑和保持的 (习题 6.14). 如果强仿紧性关于有限对一闭映射也保持的话, 则由定理 5.5.3 将得到 X 是强仿紧空间. 由此矛盾可知, 有限对一闭映射不能保持强仿紧性.

关于图 6.2 (定义 6.1.7 后) 中的覆盖性质的映射定理, 有下述 Burke 关于仿 Lindelöf 空间的结果.

定理 6.2.8[67]　仿 Lindelöf 空间在闭 Lindelöf 映射下的像是仿 Lindelöf 空间.

证明 设 X 是仿 Lindelöf 空间, $f: X \to Y$ 是闭 Lindelöf 映射. 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的开覆盖, 则 $f^{-1}(\mathscr{V}) = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ 是空间 X 的开覆盖. 存在 X 的局部可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 加细 $f^{-1}(\mathscr{V})$. 置 $f(\mathscr{U}) = \{f(U) : U \in \mathscr{U}\}$, 显然 $f(\mathscr{U})$ 覆盖 Y, 加细 $\mathscr{V}$. 下证 $f(\mathscr{U})$ 是局部可数的.

对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的, 而 $\mathscr{U}$ 是局部可数的, 易知 $f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{U}$ 中可数个元相交 (习题 5.4). 记此可数个元的并为 U_y, $f^{-1}(y) \subset U_y$. 因 f 是闭映射, 由推论 1.5.1, 存在开集 G_y 使 $f^{-1}(y) \subset G_y \subset U_y$, $G_y = f^{-1}(f(G_y))$ 且 $f(G_y)$ 是 Y 中的开集. 因 G_y 仅与 $\mathscr{U}$ 中可数个元相交, 所以 $f(G_y)$ 仅与 $f(\mathscr{U})$ 中可数个元相交. 从而 $f(\mathscr{U})$ 是局部可数的.

此外, 每一 $y \in Y$,

$$y \in f(G_y) \subset \cup\{f(U) : U \in \mathscr{U},\ y \in f(U)\} = \mathrm{st}(y, f(\mathscr{U})).$$

因 $f(G_y)$ 是开集, 所以 $y \in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(y, f(\mathscr{U})))$. 由定理 6.1.12 知 Y 是仿 Lindelöf 空间. 证完.

注记 Burke[67] 曾给出一正规 (非集态正规) 的仿 Lindelöf 空间在某一闭映射下的像不是仿 Lindelöf 空间.

上面叙述怎样的闭映射保持某些覆盖性质, 下面叙述逆保持情况. 图 6.1 和图 6.2 中的所有覆盖性质 (除 meso 紧性、ortho 紧性外) 以及强仿紧性都能为闭 Lindelöf 映射的逆像所保持 (其中有些情况要对映射的定义域附加 "正则" 条件, 像前面仿紧情况的定理 5.2.3 一样).

定理 6.2.9 设 $f: X \to Y$ 是正则空间 X 到空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射, Y 是强仿紧、弱仿紧、次仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$ 加细空间, 则 X 分别是强仿紧、弱仿紧、次仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

证明 仿照定理 5.2.3 (仿紧空间情况) 的证法, 引用定理 6.1.1 (次仿紧性的刻画) 的 (ii) 可证明次仿紧空间情况; 如改用定理 6.1.13 (强仿紧性的刻画) 可证明强仿紧空间情况.

至于其他情况可参考下面证明弱仿紧空间情况予以适当改变 (利用下面证明中 $\{W_{y,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的点有限性).

设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正则空间 X 的开覆盖. 由正则性存在开覆盖 $\mathscr{V}$ 使 $\{\overline{V} : V \in \mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 具有 Lindelöf 性质, $f^{-1}(y)$ 为 $\mathscr{V}$ 中可数个元 $\{V_{y,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 覆盖. 选取 $U_{y,i} \in \mathscr{U}$ 使 $\overline{V}_{y,i} \subset U_{y,i}$ $(i \in \mathbb{N})$. 置

$$W_{y,1} = U_{y,1} \cap \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{y,i}\Big),$$

$$W_{y,n} = \Big(U_{y,n} - \bigcup_{i<n} \overline{V}_{y,i}\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{y,i}\Big) \ (n > 1; n \in \mathbb{N}),$$

则 $\{W_{y,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的点有限开集族, 覆盖 $f^{-1}(y)$. $W_y=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_{y,n}$ 是包含 $f^{-1}(y)$ 的开集, 因 f 是闭映射, 由推论 1.5.1, 存在开集 W_y' 使 $f^{-1}(y)\subset W_y'\subset W_y$, 及 $W_y'=f^{-1}(f(W_y'))$ 且 $f(W_y')$ 是 Y 中的开集. $\{f(W_y')\}_{y\in Y}$ 是 Y 的开覆盖. 因 Y 是弱仿紧空间, 存在点有限的开加细覆盖, 不失一般性, 可设为 $\{H_y\}_{y\in Y}$, 使对每一 $y\in Y$, $H_y\subset f(W_y')$①. 于是 $f^{-1}(H_y)\subset W_y'\subset W_y=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_{y,n}$. 置

$$\mathscr{W}=\{W_{y,n}\cap f^{-1}(H_y):n\in\mathbb{N},\ y\in Y\}.$$

显然, $\mathscr{W}$ 是空间 X 的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 下面证明 $\mathscr{W}$ 是点有限的. 设 $x\in X$. 由于 $f(x)\in H_y$ 当且仅当 $x\in f^{-1}(H_y)$, 所以 x 仅属于有限个 $f^{-1}(H_y)$ $(y\in Y)$, 设为 $f^{-1}(H_{y_1}),\cdots,f^{-1}(H_{y_k})$. 对每一正整数 $l\leqslant k$, 因为 $\{W_{y_l,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点有限的, 所以 x 仅属于 $\{W_{y_l,n}\cap f^{-1}(H_{y_l})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的有限个元, 于是 x 仅属于 $\mathscr{W}$ 中的有限个元. 从而 $\mathscr{W}$ 是点有限的. 证完.

问题 Meso 紧空间关于闭 Lindelöf 映射的正则逆像是否 meso 紧空间?

葛英 [159] 证明了当像空间是正则空间时上述问题的回答是肯定的.

关于拟仿紧性等的映射性质, 文献中不多见. 蒋继光、张树果 [212] 证明了正则拟仿紧性在有限对一闭映射下逆像的保持性, 这里从略. 至于下面定理 6.2.10 的一些空间在闭 Lindelöf 映射下逆像的保持性可以不要求定义域空间的正则性 (见文献 [442] 和 [156]).

定理 6.2.10 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射. 若 Y 是弱 θ 加细、仿 Lindelöf、meta-Lindelöf、$\delta\theta$ 加细、弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细及弱 $\delta\theta$ 加细空间, 则 X 分别是相应的空间.

证明 仿照定理 5.2.3 的证法, 证明是直接的, 留给读者.

定理 6.2.9 和定理 6.2.10 中除弱 $\overline{\theta}$ 加细空间 [156]、弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间 [156] 外在 D. K. Burke[69] 的综述报告中均有论述.

定理 6.2.11 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射. 若 Y 具有定理 6.2.9, meso 紧性 [272] 及定理 6.2.10 中的某一覆盖性质, 则 X 也具有这一覆盖性质 (对次仿紧空间 X 要求 T_2 分离性).

证明 因完备映射 $\Rightarrow$ 闭 Lindelöf 映射, 而在完备映射情况, 定理 6.2.9 中的正则性可以去掉. 这里关于次仿紧性的条件与证明有些不同, 要假设 X 是 T_2 空间, 下面给出完整的证明 [59].

先证明一个引理. 回忆定理 2.1.1 后引入的记号: 对拓扑空间 X 及子空间 O, 若 $A\subset O$, 记集 A 在 O 的闭包为 $\mathrm{Cl}_O(A)$.

---

① 这种具有相同指标集的加细覆盖, 通常称为**精确的** (precise) 加细覆盖 (见定义 5.1.3). 如果覆盖 $\mathscr{U}$ 具有点有限、局部有限、紧有限的开加细覆盖, 则也分别具有点有限、局部有限、紧有限的精确的开加细覆盖. 证明同定理 5.6.1 的 (i) $\Rightarrow$ (ii).

引理 6.2.1 如果 T_2 空间 X 的开集族 $\mathscr{U}$ 覆盖紧子集 K, 则存在开集 O 使 $K \subset O$ 且集族 $\{U \cap O : U \in \mathscr{U}\}$ 在 O 中有有限的闭加细覆盖.

证明 存在 $\mathscr{U}$ 的有限集 $\{U_i\}_{i \leqslant n}$ 覆盖 K. 对 $x \in K$, 存在 $i(x) \leqslant n$, 使 $x \in U_{i(x)}$. 让 $F_x = K - U_{i(x)}$, 则 F_x 是 X 的紧子集且 $x \notin F_x$. 由定理 3.1.4, 存在开集 V_x, W_x, 使 $x \in V_x$, $F_x \subset W_x$ 且 $V_x \cap W_x = \varnothing$, 从而 $\overline{V}_x \cap W_x = \varnothing$. 令 $G_x = W_x \cup U_{i(x)}$, 那么 G_x 是开集且 $K \subset G_x$. 取 K 的有限集 $\{x_j\}_{j \leqslant m}$, 使 $K \subset \bigcup_{j \leqslant m} V_{x_j}$. 置

$$O = \Big(\bigcap_{j \leqslant m} G_{x_j}\Big) \cap \Big(\bigcup_{j \leqslant m} V_{x_j}\Big) \cap \Big(\bigcup_{i \leqslant n} U_i\Big),$$

则 O 是开集且 $K \subset O$. 对正整数 $j \leqslant m$, 设 $P_j = \mathrm{Cl}_O(V_{x_j} \cap O)$. 那么 P_j 是 O 的闭集, $O = \bigcup_{j \leqslant m} P_j$, 且

$$P_j - U_{i(x_j)} \subset (G_{x_j} - U_{i(x_j)}) \cap \mathrm{Cl}_X(V_{x_j}) \subset W_{x_j} \cap \mathrm{Cl}_X(V_{x_j}) = \varnothing,$$

因而 $P_j \subset U_{i(x_j)}$. 于是 $\{P_j\}_{j \leqslant m}$ 是集族 $\{U \cap O : U \in \mathscr{U}\}$ 在 O 中的闭加细覆盖. 引理证完.

定理 6.2.11 关于次仿紧性时的证明 设 X 是 T_2 空间, Y 是次仿紧空间, 要证明 X 也是次仿紧空间.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集, 由引理 6.2.1, 存在 X 的开集 O_y, 使 $f^{-1}(y) \subset O_y$ 且在子空间 O_y 中 $\{U \cap O_y : U \in \mathscr{U}\}$ 有有限的闭加细覆盖. 因为 f 是闭映射, 由定理 1.5.4, 存在 Y 中的开集 H_y, 使 $y \in H_y$ 且 $f^{-1}(H_y) \subset O_y$, 那么在 $f^{-1}(H_y)$ 中 $\{U \cap f^{-1}(H_y) : U \in \mathscr{U}\}$ 有有限的闭加细覆盖 $\mathscr{F}_y$. 让 $\mathscr{H} = \{H_y : y \in Y\}$. 因为 Y 是次仿紧空间, $\mathscr{H}$ 有加细覆盖 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{W}_i$, 其中 $\mathscr{W}_i = \{W_{iy} : y \in Y\}$ 是离散的闭集族且 $W_{iy} \subset H_y$ $(i \in \mathbb{N};\ y \in Y)$. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{P}_i = \{f^{-1}(W_{iy}) \cap F : y \in Y,\ F \in \mathscr{F}_y\}$. 往证 $\mathscr{P} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散的闭加细覆盖. 显然, $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 因为 $f^{-1}(\mathscr{W}_i)$ 是离散的且对 $y \in Y$, $\mathscr{F}_y$ 是有限的, 于是 $\mathscr{P}_i$ 是 σ 离散的. 对每一 $y \in Y$ 和每一 $F \in \mathscr{F}_y$, 如果 $x \in X - (f^{-1}(W_{iy}) \cap F)$, 置

$$L_x = \begin{cases} X - f^{-1}(W_{iy}), & x \in X - f^{-1}(W_{iy}), \\ f^{-1}(H_y) - F, & x \in f^{-1}(W_{iy}) - F. \end{cases}$$

那么 L_x 是 x 在 X 的开邻域且 $L_x \cap (f^{-1}(W_{iy}) \cap F) = \varnothing$, 于是 $f^{-1}(W_{iy}) \cap F$ 是闭的. 故 X 是次仿紧空间. 证完.

定理 6.1.1 的注记中指出存在非次仿紧的 T_1 紧空间 X. 对于自然映射 $f : X \to X/X$, 则 f 是完备映射, 商空间 $Y = X/X$ 是次仿紧空间, 但 X 不是次仿紧

空间. 所以定理 6.2.11 中对于次仿紧性要求 T_2 分离公理的假设是重要的. 下面的例说明定理 6.2.9 中映射的定义域 X 的正则性不能去掉.

例 6.2.4[156] 设 $X = [0,1)$, 定义 $\{[0,t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \cup \{\{x\} : x$ 是 $[0,1)$ 中的无理点 $\}$ 为 X 上的拓扑的基. 下面证明 X 不是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

记 Q 是 [0,1) 中的所有有理点所成的子空间. Q 是闭的. 由弱 $\overline{\theta}$ 加细空间是闭遗传的 (见定理 6.3.1), 所以只要证明闭子空间 Q 不是弱 $\overline{\theta}$ 加细的.

对空间 X 的子集族 $\mathscr{U}$, 如未特别说明, 常记 $\mathscr{U}^* = \cup\{U : U \in \mathscr{U}\}$.

设 $\{r_n\}$ 是 Q 中严格递增趋于 1 的序列, 则 $\mathscr{U} = \{[0,r_n) \cap Q : n \in \mathbb{N}\}$ 是 Q 的开覆盖. 设 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的任一弱 θ 加细覆盖. 下面证明 $\{\mathscr{V}_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ 不是点有限的. 注意, $\mathscr{V}$ 中的每一元都形如 $[0,t) \cap Q$, 这里 $t \in [0,1)$. 取 $s_1 \in Q$, 则存在 $n_1 \in \mathbb{N}$, 使 $0 < \mathrm{ord}(s_1, \mathscr{V}_{n_1}) < \infty$, 不妨记作 $\mathrm{ord}(s_1, \mathscr{V}_{n_1}) = m_1$. 取 $s_2 \in Q$, 使 $s_2 > \max\{t : s_1 \in [0,t) \cap Q \in \mathscr{V}_{n_1}\}$, 则存在 $n_2 \in \mathbb{N}$, 使 $0 < \mathrm{ord}(s_2, \mathscr{V}_{n_2}) < \infty$, 不妨记作 $\mathrm{ord}(s_2, \mathscr{V}_{n_2}) = m_2$. 这里的 $\mathscr{V}_{n_2}$ 必不同于 $\mathscr{V}_{n_1}$ $(n_1 \neq n_2)$, 因为不然的话, 由于 $s_1 < s_2$, 将有 $\mathrm{ord}(s_1, \mathscr{V}_{n_1}) = m_1 + m_2$, 矛盾. 从而可选出 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Q$ 及 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使对每一 $k \in \mathbb{N}$, $0 < \mathrm{ord}(s_k, \mathscr{V}_{n_k}) < \infty$, 其中 $0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k < \cdots < 1$, 且当 $k_1 \neq k_2$ 时, $n_{k_1} \neq n_{k_2}$. 由此可推得, 对每一 $k \in \mathbb{N}$, $s_1 \in \mathscr{V}_{n_k}^*$. 所以 $\{\mathscr{V}_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是点有限的. 从而 X 不是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

记 X 的商空间 X/Q 为 Y. 由商拓扑知 Y 是紧空间 (在 Y 中含点 $\{Q\}$ 的惟一开集是 Y), 而商映射 $f : X \to Y$ 是可数对一的闭映射. 这说明如果去掉定理 6.2.8 中的正则性, 则定理 6.2.8 中的所有空间 (以及定理 5.2.3 中的仿紧空间) 都不能为可数对一的闭映射的逆像所保持, 更不能为闭 Lindelöf 映射的逆像所保持.

龙冰 [269] 给出了具有上述性质的一个简单的例子. 设 $X = \mathbb{N}$, 赋予拓扑 $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\} \cup \{\{1,2,\cdots,n\} : n \in \mathbb{N}\}$, 则 $(X, \mathscr{T})$ 是第二可数空间. 用上述类似的方法可证明它不是弱 $\overline{\theta}$ 加细空间. 这时商映射 $g : X \to X/X$ 是可数对一的闭映射, 商空间 X/X 是单点空间.

遗憾的是这两例中的空间 X 只是 T_0 的. 如能构造相应的 T_2 空间则更好. 如借用 Bennett 和 Lutzer[45] 的例 (见习题 6.4). 这例的空间 X 是 T_2 的, 不是 θ 加细的 (甚至不是可数 θ 加细的 [159]), 但是弱 $\overline{\theta}$ 加细的. 把 X 中有理点等同于一点得到的商空间是 T_2 强仿紧的. 商映射 f 是可数对一的闭映射. 此例说明定理 5.2.3 及定理 6.2.9 的正则性 (除弱 $\overline{\theta}$ 加细空间外) 不能减弱为 T_2.

例 6.2.5[348] 存在 ortho 紧空间在某完备映射下的逆像不是 ortho 紧空间.

取投影映射 $p : [0,\omega_1) \times [0,\omega_1] \to [0,\omega_1)$. 因 $[0,\omega_1]$ 是紧空间, 所以投影 p 是完备映射. 下面要证明 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的及 $[0,\omega_1) \times [0,\omega_1]$ 不是 ortho 紧的. 为此引入下面两个引理, 其中引理 6.2.2 是著名的 pressing down lemma.

引理 6.2.2 设函数 $f : [0,\omega_1) \to [0,\omega_1)$ 满足对充分大的 $x \in [0,\omega_1)$ 都有

$f(x) < x$, 则存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使对每一 $x \in [0, \omega_1)$, 存在 $y \geqslant x$ 使 $f(y) < c$.

证明 如果结论不成立, 则对任何 $c' \in (0, \omega_1)$, 在 $[0, \omega_1)$ 中存在某一与 c' 相应的 x' 对所有 $y \geqslant x'$ 都有 $f(y) \geqslant c'$.

今设当 $x \geqslant \alpha$ 时有 $f(x) < x$. 取 $x_1 \geqslant \alpha$ 作为 c', 则存在与 x_1 相应的 x_2 使对所有的 $y \geqslant x_2$, 有 $f(y) \geqslant x_1$. 以 x_2 为 c', 则存在与 x_2 相应的 x_3 使对所有的 $y \geqslant x_3$, 有 $f(y) \geqslant x_2$. 依此类推, 取 x_n 为 c', 则存在与 x_n 相应的 x_{n+1} 使对所有的 $y \geqslant x_{n+1}$, 有 $f(y) \geqslant x_n$. 这样继续下去. 设 β 是 $\{x_n\}$ 的上确界. 因 $\beta \geqslant x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, 故对所有的 $y \geqslant \beta$, 有 $f(y) \geqslant x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. 由 β 的确界性质, 又当 $y \geqslant \beta$ 时, 有 $f(y) \geqslant \beta$. 特别取 $y = \beta$, 则有 $f(\beta) \geqslant \beta$. 然因 $\beta \geqslant x_1 \geqslant \alpha$, 由假设应有 $f(\beta) < \beta$, 这是矛盾的. 证完.

引理 6.2.3 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是空间 $[0, \omega_1)$ 的开覆盖, 则存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c, \mathscr{U}) \supset [c, \omega_1)$.

证明 这里的 U_α 可假定为基本开集, 即具有形式 $\{0\}$ 或 $(\alpha_x, x]$ 者, 其中 $\alpha_x < x < \omega_1$. 置 $f(x) = \alpha_x$, $0 < x < \omega_1$. 由引理 6.2.2 知存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使对每一 $x \in [0, \omega_1)$, 存在 $y \geqslant x$ 使 $\alpha_y < c$. 所以 $c < x < \omega_1 \Rightarrow x,\ c \in (\alpha_y, y]$. 从而 $\mathrm{st}(c, \mathscr{U}) \supset [c, \omega_1)$. 证完.

我们接着证明空间 $[0, \omega_1)$ 是 ortho 紧的. 设 $\mathscr{U}$ 是 $[0, \omega_1)$ 的开覆盖 (U_α 的假定同前). 由引理 6.2.3, 存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c, \mathscr{U}) \supset [c, \omega_1)$. 由于 $[0, c]$ 是紧空间 (见定义 3.1.1 后的说明), 为 $\mathscr{U}$ 中有限个开集覆盖, 这有限覆盖记为 $\mathscr{U}'$. 置

$$\mathscr{V} = \mathscr{U}' \cup \{U_\alpha \cap (c, \omega_1) : c \in U_\alpha \in \mathscr{U}\}.$$

容易验证 $\mathscr{V}$ 是内核保持开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

下面再证 $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ 不是 ortho 紧空间. 取这积空间的开覆盖为

$$\mathscr{U} = \{[0, \alpha] \times (\alpha, \omega_1] : \alpha \in [0, \omega_1)\} \cup \{[0, \omega_1) \times [0, \omega_1)\}.$$

如果 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的任一开加细覆盖, 用引理 6.2.3 于子空间 $[0, \omega_1) \times \{\omega_1\}$ ($\mathscr{V}$ 作为这子空间的覆盖), 则存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使 $\mathrm{st}((c, \omega_1), \mathscr{V}) \supset [c, \omega_1) \times \{\omega_1\}$. 从而 $\cap\{V \in \mathscr{V} : (c, \omega_1) \in V\} \subset [0, \omega_1) \times \{\omega_1\}$. 所以 $\mathscr{V}$ 不能是内核保持的.

到此证明了 $[0, \omega_1)$ 是 ortho 紧的, 而作为它在完备映射下的逆像 $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ 不是 ortho 紧的. 完成了例 6.2.5 的论断. 此外, 例 6.2.5 也说明 ortho 紧空间与紧空间的积可以不是 ortho 紧的, 这不同于其他覆盖性质 (见定理 6.4.1).

这里附带地考察空间 $[0, \omega_1)$ 的一些拓扑属性, 因为这空间在构作反例时很有用处. 空间 $[0, \omega_1)$ 不仅是正规 (习题 3.11), 而且是集态正规空间 (习题 6.17), 满足很强的分离公理, 但 $[0, \omega_1)$ 不是仿紧空间 (利用定理 3.5.10). 下面利用引理 6.2.3 做简单的证明. 取空间 $[0, \omega_1)$ 的由形如 $\{x : x < \alpha\}$ $(\alpha \in [0, \omega_1))$ 的开集组成的覆盖

$\mathscr{U}$. 对 $\mathscr{U}$ 的任何开加细覆盖 $\mathscr{V}$, 由引理 6.2.3 存在 $c \in (0, \omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c, \mathscr{V}) \supset [c, \omega_1)$. 这 $\mathrm{st}(c, \mathscr{V})$ 不能包含在任何 $\{x : x < \alpha\}$ 内, 所以 $[0, \omega_1)$ 不是满正规空间 (定义 5.1.1). 由 Stonc 定理 (定理 5.1.3) 知 $[0, \omega_1)$ 不是仿紧空间. 更由前面的定理 6.1.10 和定理 6.1.18 知 $[0, \omega_1)$ 不是次仿紧、弱仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$ 加细及拟仿紧空间. 其实后面将看到 $[0, \omega_1)$ 甚至不是弱 $\delta\theta$ 加细空间 (定理 6.6.1 的注记). 此外, $[0, \omega_1)$ 虽然不是紧空间但是局部紧的 (习题 3.10), 也容易直接证明 $[0, \omega_1)$ 是可数紧的 (或由习题 3.10 得到).

关于覆盖性质的映射, 在前面 (包括第 5 章) 只提到与闭映射相关的映射. 这里统一谈谈开映射的情况. 设 X, Y 是拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$ 称为**开紧映射** (open compact mapping[21]), 如果 f 是开映射且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是紧的 (紧映射, 见引理 4.4.8 前的定义). 前面所涉及的许多覆盖性质都不能为开紧映射所保持, 更不要说是开映射了. 覆盖性质关于开紧映射的一个较好结果是仿紧空间的开紧映像是弱仿紧空间 [16], 后加强为 meso 紧空间的伪开、紧映像是弱仿紧空间 (习题 6.10)[147], 同时存在弱仿紧空间不是任一仿紧空间的开紧映像 [260]. 如更加强为有限对一开映射, 目前只知道弱仿紧 (meta 紧)、θ 加细、ortho 紧及 meta-Lindelöf 空间能为有限对一开映射所保持 (见定理 6.2.12 和定理 6.2.13).

定理 6.2.12 弱仿紧、θ 加细、meta-Lindelöf 空间在有限对一开映射下的像分别是弱仿紧、θ 加细、meta-Lindelöf 空间.

证明 关于弱仿紧、meta-Lindelöf 空间证明是平凡的, 读者可以自己完成. 关于 θ 加细空间的证明并不平凡. 下面的证明属于林寿.

设 X 是 θ 加细空间, $f : X \to Y$ 是有限对一开映射. 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的开覆盖, 则 $\mathscr{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ 是 X 的开覆盖. 由定理 6.1.4 的 (iii), 存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 加细 $\mathscr{U}$, 使对每一 $x \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 及有限族 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, 如 $x \in W \in \mathscr{W}_n$, 则 W 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元内. 取 $\{\mathscr{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 中任意有限个覆盖的交. 这些有限交形成的族仍是可数的, 设为 $\{\mathscr{W}'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. 这里每一 $\mathscr{W}'_k$ 具有形式:

$$\mathscr{W}'_k = \mathscr{W}_{n_1} \wedge \mathscr{W}_{n_2} \wedge \cdots \wedge \mathscr{W}_{n_m},$$

仍是 X 的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 因 f 是开映射, 对每一 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{G}_k = \{f(W') : W' \in \mathscr{W}'_k\}$$

是空间 Y 的开覆盖, 加细 $\mathscr{V}$. 所以 $\{\mathscr{G}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是空间 Y 的开覆盖序列. 对每一 $y \in Y$, 因 f 是有限对一的, 设 $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. 对每一 x_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 存在 $n_i \in \mathbb{N}$ 及有限子族 $\mathscr{U}'_i \subset \mathscr{U}$, 如 $x_i \in W \in \mathscr{W}_{n_i}$, 则 W 包含在 $\mathscr{U}'_i$ 的某些元内. 从而对任一 x_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 如 $x_i \in W' \in \mathscr{W}'_k = \mathscr{W}_{n_1} \wedge \mathscr{W}_{n_2} \wedge \cdots \wedge \mathscr{W}_{n_m}$, 则 W' 包含在 $\bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{U}'_i$ 的某些元内. 所以对每一 $y \in Y$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 及有限族 $\mathscr{V}' \subset \mathscr{V}$, 这里

$\mathscr{V}' = \{V \in \mathscr{V} : f^{-1}(V) \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{U}_i'\}$, 如 $y \in f(W') \in \mathscr{G}_k$, 则 $f(W')$ 包含在 $\mathscr{V}'$ 的某些元内. 由定理 6.1.4 的 (iii), 知 Y 是 θ 加细空间. 证完.

注记 利用更为深入的刻画, Junnila 证明了有限对一的伪开映射分别保持弱仿紧性 [219] 和 θ 加细性 [217].

Gittings[162] 提出 ortho 紧性能为怎样的开映射所保持? Kofner[234] 给出例子说明 meta 紧空间 (从而 ortho 紧空间) 的开紧映像未必是 ortho 紧空间. 至于有限对一开映射, Scott[351] 及张建平 [435] 互相独立地解决了这问题. 下面定理的证明采用张建平的证法, 比较简捷.

定理 6.2.13 [351, 435] Ortho 紧空间在有限对一开映射下的像是 ortho 紧空间.

证明 设 X 是 ortho 紧空间, $f: X \to Y$ 是有限对一开映射. 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的开覆盖, 则 $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ 是空间 X 的开覆盖. 因 X 是 ortho 紧的, 存在内核保持开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 加细 $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$. 因 f 是开映射, $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是空间 Y 的开覆盖, 加细 $\mathscr{V}$. 以下证明 $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是内核保持的.

对任意 $A' \subset A$, 如果 $\bigcap_{\alpha \in A'} f(U_\alpha) \neq \varnothing$, 取任意 $y \in \bigcap_{\alpha \in A'} f(U_\alpha)$, 从而 $f^{-1}(y) \cap U_\alpha \neq \varnothing$ $(\alpha \in A')$. 因 f 是有限对一的, 设 $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. 置 $A_i' = \{\alpha : \alpha \in A',\ x_i \in U_\alpha\}(i = 1, 2, \cdots, k)$. 不失一般性, 可作为每一 A_i' 不空. 易知 $A' = \bigcup_{i=1}^{k} A_i'$. 对每一 x_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$, $x_i \in \bigcap_{\alpha \in A_i'} U_\alpha$, 从而 $y \in f(\bigcap_{\alpha \in A_i'} U_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A_i'} f(U_\alpha)$, 对 $i = 1, 2, \cdots, k$ 成立. 所以

$$y \in \bigcap_{i=1}^{k} f\Big(\bigcap_{\alpha \in A_i'} U_\alpha\Big) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \Big(\bigcap_{\alpha \in A_i} f(U_\alpha)\Big) = \bigcap_{\alpha \in A'} f(U_\alpha).$$

因 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是内核保持的, $\bigcap_{\alpha \in A_i'} U_\alpha$ 是空间 X 的开集. 因 f 是开映射, $\bigcap_{i=1}^{k} f(\bigcap_{\alpha \in A_i'} U_\alpha)$ 是空间 Y 的开集. 上述关系式说明 y 是 $\bigcap_{\alpha \in A'} f(U_\alpha)$ 的内点. 由 y 的任意性知 $\bigcap_{\alpha \in A'} f(U_\alpha)$ 是开集. 所以 $\{f(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ 是内核保持的, 故 Y 是 ortho 紧空间. 证完.

问题 有限对一开映射能否保持弱 θ 加细性、弱 $\overline{\theta}$ 加细性、$\delta\theta$ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性、弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细性?

关于有限对一开映射的逆像保持问题. 本章所涉及的所有覆盖性质都不能为有限对一开映射的逆像保持 (见文献 [162] 和 [248]).

关于可数覆盖性质的映射性质见文献 [162] 和 [248], 基本上类似于相应的覆盖性质的映射性质.

6.3 遗 传 性

本章所涉及的覆盖性质和仿紧空间一样 (定理 3.5.7 和命题 5.3.1) 都具有闭遗

传性, 且开遗传性蕴含遗传性.

对 $A \subset X' \subset X$, 集 A 关于子空间 X' 的内核记为 $\mathrm{Int}_{X'}A$.

定理 6.3.1　设 X 具有图 6.1 和图 6.2 中的某一覆盖性质 (仿紧性要加 T_2 分离公理, meso 紧性、仿 Lindelöf 性要加正规性), 则 X 的 F_σ 子空间也具有相应的性质 (即空间 X 具有 F_σ 遗传性).

证明　先证弱仿紧性情况. 其余涉及点有限、点可数情况的覆盖性质的证明类似. 然后证 meso 紧性与仿 Lindelöf 性情况.

设 X 是弱仿紧空间, X' 是 X 的 F_σ 子集. X' 可以表示为 $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 每一 F_n 是闭集. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族, 覆盖 X'. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U} : U \cap F_n \neq \varnothing\}$, 则 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_n \cup \{X - F_n\}$ 具有点有限开加细覆盖 $\mathscr{G}_n$. 置

$$\mathscr{W}_1 = \{G \cap X' : G \in \mathscr{G}_1,\ G \cap F_1 \neq \varnothing\},$$

$$\mathscr{W}_n = \left\{G \cap X' - \left(\bigcup_{i<n} F_i\right) : G \in \mathscr{G}_n,\ G \cap F_n \neq \varnothing\right\} \ \ (n > 1).$$

容易验证, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 X' 的点有限开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$.

设 X 是正规 meso 紧空间 (或正规仿 Lindelöf 空间). X' 是 X 的 F_σ 子集. 由于正规空间的 F_σ 子集是正规的 (习题 2.11), 正规子空间 X' 可表为 $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, F_n 是闭集且

$$F_n \subset \mathrm{Int}_{X'} F_{n+1} \subset F_{n+1} \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

这里 $\mathrm{Int}_{X'} F_{n+1}$ 表示关于子空间 X' 的集 F_{n+1} 的内核 (习题 2.16). 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 用上述方法得到的 $\mathscr{G}_n$ 是紧有限的, 从而每一 $\mathscr{W}_n$ 也是紧有限的. 由于 $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int}_{X'} F_n$, 而 $\mathrm{Int}_{X'} F_n \subset \mathrm{Int}_{X'} F_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, 子空间 X' 的紧集 C 必包含在某 $\mathrm{Int}_{X'} F_n$ 内, 所以 C 与 $\mathscr{W}_m$ $(m > n)$ 中任何元不交. 故 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 X' 的紧有限开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$.

在仿 Lindelöf 情况. 每一 $\mathscr{G}_n$ 是局部可数的, 从而每一 $\mathscr{W}_n$ 也是局部可数的. 每一点 $x \in X'$, $x \in$ 某 $\mathrm{Int}_{X'} F_n$. $\mathrm{Int}_{X'} F_n$ 作为点 x 的开邻域 (关于子空间 X') 与 $\mathscr{W}_m$ $(m > n)$ 中任何元不交. 故存在点 x 的开邻域与 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 中至多可数个元相交, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 X' 的局部可数开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

推论 6.3.1　定理 6.3.1 中的覆盖性质附加完备性后都具有遗传性.

定理 6.3.1 和推论 6.3.1 中除 meso 紧空间、弱 $\overline{\theta}$ 加细空间 [160]、弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间外在 Burke[69] 的综述报告中均有论述.

例 6.3.1　强仿紧空间的 F_σ 子空间未必是强仿紧的. 广义贝尔零维空间 $N(A)$ (例 4.1.2), 当 A 是不可数集时, 是强仿紧的 (习题 6.3). $N(A)$ 与 $[0,1]$ 的积 $N(A) \times [0,1]$ 也是强仿紧的 (定理 6.4.1). 但是作为强仿紧空间 $N(A) \times [0,1]$ 的 F_σ 子集 $N(A) \times (0,1)$ 不是强仿紧的 (习题 6.3).

类似于仿紧空间的遗传性情况 (定理 5.3.2), 下面给出正则次仿紧空间是遗传次仿紧的必要与充分条件.

定理 6.3.2[428] 设 X 是正则次仿紧空间, 则下列论断等价:

(i) X 是遗传次仿紧空间;

(ii) X 的每一开集 G 是一族闭集的并, 且这集族在 G 中是 σ 局部有限的;

(iii) X 的每一开集 G 是一族 F_σ 集的并, 且这集族在 G 中是 σ 遗传闭包保持的.

证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 是显然的. 下证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 与 (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). 因 X 正则, 对开集 G 的每一点 x, 存在 x 的开邻域 $U(x)$ 使 $\overline{U(x)} \subset G$. $\mathscr{U} = \{U(x)\}_{x\in G}$ 是遗传次仿紧空间的开子空间 G 的开覆盖. 从而存在由 G 中的闭集组成的在 G 中 σ 局部有限的闭加细覆盖 $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, 每一 $\mathscr{V}_n$ 在 G 中局部有限. 由于 $\mathscr{V}$ 中每一闭于 G 的集 V 包含在某 $U(x)$ 内, 而 $U(x) \subset \overline{U(x)} \subset G$, 所以 V 是空间 X 中的闭集. $\mathscr{V}$ 满足 (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设 G 是次仿紧空间 X 的任一开集. 只要证明子空间 G 是次仿紧的.

由 (iii), G 可以表示为 $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\bigcup_{\alpha_i\in A_i} X_{\alpha_i})$. 这里每一 X_{α_i} 是 X 中的 F_σ 集, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$ 在 G 中是遗传闭包保持的. 设 $X_{\alpha_i} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{\alpha_i,j}$, 对每一 $j \in \mathbb{N}$, $F_{\alpha_i,j}$ 是 X 中的闭集. 设 $\mathscr{U}$ 是 G 的开覆盖. 置

$$\mathscr{U}_{\alpha_i,j} = \{U \cap F_{\alpha_i,j} : U \in \mathscr{U}\} \quad (j \in \mathbb{N};\ \alpha_i \in A_i).$$

$\mathscr{U}_{\alpha_i,j}$ 覆盖 $F_{\alpha_i,j}$. $F_{\alpha_i,j}$ 是次仿紧空间的闭集, 从而是次仿紧的 (定理 6.3.1). 存在 $\mathscr{U}_{\alpha_i,j}$ 的在 $F_{\alpha_i,j}$ 中 σ 闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{V}_{\alpha_i,j} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_{\alpha_i,j,k}$. 对每一 $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V}_{\alpha_i,j,k}$ 在 $F_{\alpha_i,j}$ 中闭包保持. 因 $F_{\alpha_i,j}$ 是闭集, $\mathscr{V}_{\alpha_i,j,k}$ 也在 X 中闭包保持, 从而在 G 中闭包保持.

$$\mathscr{V}^*_{\alpha_i,j,k} = \cup\{V : V \in \mathscr{V}_{\alpha_i,j,k}\} \subset F_{\alpha_i,j} \subset X_{\alpha_i}.$$

而 $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$ 在 G 中遗传闭包保持, 容易证明 $\bigcup_{\alpha_i\in A_i} \mathscr{V}_{\alpha_i,j,k}$ 在 G 中闭包保持. 所以

$$\mathscr{V} = \bigcup_{i,j,k\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{\alpha_i\in A_i} \mathscr{V}_{\alpha_i,j,k} \Big)$$

是 G 的 σ 闭包保持闭覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 故子空间 G 是次仿紧的. 证完.

对于遗传覆盖性质的进一步研究, Junnila 等 [224] 于 1986 年引入了散射分解 (scattered partition) 的概念, 证明了一个拓扑空间是遗传弱仿紧的当且仅当它的每一个散射分解有一个点有限的开扩张. 其后, 朱培勇 [450] 证明了一个拓扑空间是遗

传 θ 加细空间当且仅当它的每一个散射分解有一个 θ 开扩张序列. 然而, 对于仿紧性、meso 紧性不具有类似的刻画 [450, 425].

6.4 可 积 性

覆盖性质的可积性都是很差的 (和仿紧性类似). 要使两个具有相同覆盖性质的空间的积保持这一覆盖性质必须对其中一个空间附加条件.

仿紧空间与紧空间的积是仿紧的 (定理 5.4.1). 这定理的证明是利用完备映射逆保持仿紧性. 定理 6.2.11 指出图 6.1 (除 ortho 紧性外)、图 6.2 的每一覆盖性质以及强仿紧性都能为完备映射之逆所保持. 我们立得下述定理.

定理 6.4.1　设空间 X 具有图 6.1 (ortho 紧性除外, 次仿紧性要求 T_2 分离性)、图 6.2 某一覆盖性质或具有强仿紧性, Y 是紧空间, 则积空间 $X \times Y$ 具有相应的覆盖性质.

证明　证法与定理 5.4.1 相同.

再考察关于仿紧空间积的定理 5.4.2: "T_2 仿紧空间与正则 σ 紧空间的积是仿紧的". 证明除利用仿紧空间与紧空间的积是仿紧的 (定理 5.4.1) 外, 还用 T_2 仿紧空间的 F_σ 遗传性 (定理 5.3.1). 我们利用与之相当的定理 6.4.1 及定理 6.3.1 有下述相应的结果.

定理 6.4.2　设 T_2 空间 X 具有图 6.1 (除 ortho 紧性外)、图 6.2 的某一覆盖性质 (meso 紧性、仿 Lindelöf 性要加正规性), Y 是正则 σ 紧空间, 则积空间 $X \times Y$ 具有相应的覆盖性质.

证明　证法与定理 5.4.2 相同.

Ortho 紧性不满足定理 6.4.1. 例 6.2.5 曾证明 $[0, \omega_1)$ 是 ortho 紧的, 而 $[0, \omega_1)$ 与紧空间 $[0, \omega_1]$ 的积 $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ 不是 ortho 紧的, 所以 ortho 紧性不满足定理 6.4.1, 当然也不满足定理 6.4.2. 强仿紧性能满足定理 6.4.1, 但不满足定理 6.4.2, 见例 6.4.1.

例 6.4.1　取例 6.3.1 中的广义贝尔零维空间 $N(A)$ (例 4.1.2), 当 A 是不可数集时, 是强仿紧空间 (习题 6.3), 而 $N(A)$ 与 σ 紧空间 $(0,1)$ 的积 $N(A) \times (0,1)$ 不是强仿紧的 (见例 6.3.1 和习题 6.3).

6.5 和 定 理

容易验证, 本章所涉及的覆盖性质都关于拓扑和保持. 下面就图 6.1、图 6.2 的覆盖性质及强仿紧性考察它们所满足的和定理. 先直接证明弱仿紧性满足局部有

限闭和定理作为范例, 然后利用映射通过一般性定理 (5.5 节) 间接得出结果, 以资比较.

定理 6.5.1[194] 设 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha \in A)$ 是 X 的弱仿紧子空间, 则 X 是弱仿紧空间.

证明 把 $\mathscr{F}$ 的指标集 A 良序化, 记 $\mathscr{F} = \{F_\alpha : 0 \leqslant \alpha < \eta\}$ (这里 α, η 是序数). 设 $\mathscr{V} = \{V_\sigma : \sigma \in B\}$ 是空间 X 的开覆盖. 由于 $\mathscr{F}$ 的局部有限性, 可以设 $\mathscr{V}$ 的每一元仅与有限个 F_α 相交. 下面用超限归纳法构造 $\mathscr{V}$ 的点有限开加细覆盖.

对每一序数 α $(0 \leqslant \alpha < \eta)$, 构造如下覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$. 首先构造 $\mathscr{V}_0$. 取 $\mathscr{V}$ 中每一元 V_σ 与闭集 F_0 的交, 得关于 F_0 的开覆盖 $\{V_\sigma \cap F_0 : \sigma \in B\}$. 因 F_0 是弱仿紧的, 存在点有限的 (关于 F_0 的) 开加细覆盖 $\{U_\sigma : \sigma \in B\}$ 使 $U_\sigma \subset V_\sigma \cap F_0$ $(\sigma \in B)$. 置

$$V_\sigma^0 = V_\sigma \cap (X - (F_0 - U_\sigma)),\ \mathscr{V}_0 = \{V_\sigma^0 : \sigma \in B\}.$$

不难验证 $\mathscr{V}_0$ 具有下列性质:

(i) $\mathscr{V}_0$ 是 X 的开覆盖;

(ii) $V_\sigma^0 \subset V_\sigma$, $\sigma \in B$;

(iii) 如 $x \in F_0$, 则 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{V}_0) < \omega$;

(iv) 如 $x \in V_\sigma - F_0$, 则 $x \in V_\sigma^0$.

设 α 是某固定序数 $(1 \leqslant \alpha < \eta)$. 设对 $\beta < \alpha$ 已构造 $\mathscr{V}_\beta = \{V_\sigma^\beta : \sigma \in B\}$ 满足:

(I) $\mathscr{V}_\beta$ 是 X 的开覆盖;

(II) 对每一 $\sigma \in B$, 如 $\gamma < \beta$, 则 $V_\sigma^\beta \subset V_\sigma^\gamma$;

(III) 如 $x \in \bigcup_{\gamma<\beta} F_\gamma$, 则 $\mathrm{ord}(x, \mathscr{V}_\beta) < \omega$;

(IV) 如 $x \in \bigcap_{\gamma<\beta} V_\sigma^\gamma - F_\beta$, 则 $x \in V_\sigma^\beta$.

现构造集族 $\mathscr{V}_\alpha = \{V_\sigma^\alpha : \sigma \in B\}$ 使满足 (I)~(IV). 对每一 $\sigma \in B$, 置

$$W_\sigma^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} V_\sigma^\beta \text{ 及 } \mathscr{W}_\alpha = \{W_\sigma^\alpha : \sigma \in B\}.$$

下证 $\mathscr{W}_\alpha$ 是 X 的开覆盖. 对每一 $x \in X$, 置 $\beta = \max\{\gamma < \alpha : x \in F_\gamma\}$ (因 $\mathscr{F}$ 局部有限, 从而点有限. 如对每一 $\gamma < \alpha$, $x \notin F_\gamma$, 则置 $\beta = 0$). 由 (I), $\mathscr{V}_\beta$ 是开覆盖, $x \in$ 某 V_σ^β. 由 (II), $x \in \bigcap_{\gamma\leqslant\beta} V_\sigma^\gamma$. 因 $x \notin F_{\beta+1}$, 由 (IV), $x \in V_\sigma^{\beta+1}$, 从而 $x \in V_\sigma^{\beta'}$ $(\beta' > \beta)$. 所以 $x \in W_\sigma^\alpha$, 于是 $\mathscr{W}_\alpha$ 是 X 的覆盖. 下证 W_σ^α 是开集. 置 $\beta = \max\{\gamma < \alpha : V_\sigma \cap F_\gamma \neq \varnothing\}$ (因 $\mathscr{V}$ 中每一元仅与有限个 F_α 相交. 如对每一 $\gamma < \alpha$, $V_\sigma \cap F_\gamma = \varnothing$, 则置 $\beta = 0$). 注意, 如 $V_\sigma^0 \cap F_1 = \varnothing$, 则 $V_\sigma^0 = V_\sigma^1$. 依此类推, 可知 $V_\sigma^0, V_\sigma^1, \cdots, V_\sigma^\beta, \cdots$ 中只有有限个是不同的. 故 $W_\sigma^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} V_\sigma^\beta$ 是开集. 到此证明了 $\mathscr{W}_\alpha$ 是开覆盖. 由 $\mathscr{W}_\alpha$ 构造 $\mathscr{V}_\alpha$ 的过程完全与由 $\mathscr{V}$ 构造 $\mathscr{V}_0$ 的过程相同. 这样得到的 $\mathscr{V}_\alpha$ 不难验证满足 (I)~(IV). 到此完成了超限归纳法.

最后, 置

$$W_\sigma = \bigcap_{\alpha<\eta} V_\sigma^\alpha \text{ 及 } \mathscr{W} = \{W_\sigma : \sigma \in B\}.$$

关于 $\mathscr{W}$ 是开覆盖的证明与证 $\mathscr{W}_\alpha$ 情况相同. 显然, $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{V}$, 且由 (III), $\mathscr{W}$ 是点有限的, 所以 X 是弱仿紧空间. 证完.

上述定理可简述为 "弱仿紧性满足局部有限闭和定理". 下面通过映射和一般性定理所得的一系列结果也用此简述形式.

定理 6.5.2[356] 弱仿紧性、次仿紧性及 θ 加细性都满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 因弱仿紧性、次仿紧性及 θ 加细性都关于连续的闭映射保持 (定理 6.2.1、定理 6.2.2 及定理 6.2.3), 由一般性定理 5.5.5 得证. 证完.

比较定理 6.5.1 与定理 6.5.2 的弱仿紧性情况, 显然后者强于前者且证明简捷. 这依赖于 Worrell 的精致的映射定理. 同样, 次仿紧性及 θ 加细性情况分别依赖于 Burke 及 Junnila 的精致结果. 以下定理的情况相同.

定理 6.5.3 Meso 紧性、弱 θ 加细性都满足局部有限闭和定理.

证明 因 meso 紧性、弱 θ 加细性都关于完备映射保持 (定理 6.2.5 和定理 6.2.7), 由一般性定理 5.5.3 得证. 证完.

定理 6.5.4[250] T_1, meso 紧性满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 因 T_1, meso 紧性关于连续的闭、紧覆盖映射保持 (定理 6.2.4), 由一般性定理 5.5.9 (这定理要求 T_1 分离公理) 得证. 证完.

定理 6.5.5[138] 仿 Lindelöf 性满足点可数遗传闭包保持闭和定理.

证明 因仿 Lindelöf 性关于连续的闭 Lindelöf 映射保持 (定理 6.2.8), 由一般性定理 5.5.7 得证. 证完.

定理 6.5.2～ 定理 6.5.5 都是借助于映射与一般性定理得到的. 这方法起一定作用. 但如 ortho 紧性能否关于有限对一的连续闭映射保持, 目前尚未解决 (见定理 6.2.7 后的问题), 无法引用上述一般性定理, 下面关于 ortho 紧性的和定理是 Scott[349] 直接证明的. 证明的高度技巧性远远超过定理 6.5.1 的证明, 这里不予转载, 读者可读所引 Scott 的论文.

定理 6.5.6[349] Ortho 紧性满足局部有限闭和定理.

至于强仿紧性, 两个强仿紧闭子空间的并可以不是强仿紧的 (例 6.2.3), 不满足上述任何闭和定理.

图 6.1、图 6.2 的覆盖性质中, 目前尚未能解决其能否满足何种闭和定理的有: 弱 $\overline{\theta}$ 加细性、meta-Lindelöf 性、$\delta\theta$ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性及弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细性.

6.6 Iso 紧性与不可约性

在本节中介绍与前面覆盖性质有关的两种性质：iso 紧性和不可约性.

定义 6.6.1[36] 拓扑空间 X 称为 **iso 紧空间** (iso-compact space), 如果此空间的每一可数紧的闭子集是紧的.

在 6.1 节中图 6.1、图 6.2 和图 6.3 的覆盖性质 (除 ortho 紧性外) 及强仿紧性都是 iso 紧的. 关于这些覆盖性质的 iso 紧性的证明：仿紧性属于 Dieudonné[106], 次仿紧性属于 Burke[60, 61], 弱仿紧性属于 Arens 和 Dugundji[13], meta-Lindelöf 性属于 Aquaro[11], θ 加细性属于 Worrell 和 Wicke[416], $\delta\theta$ 加细性属于 Aull[30], 弱 θ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性属于 Wicke 和 Worrell[410], 拟仿紧性属于刘应明 [265]. 由于图 6.1、图 6.2 和图 6.3 中给出的蕴含关系, 下面只要证明弱 $\delta\theta$ 加细性的 iso 紧性.

引理 6.6.1 设拓扑空间 X 的开集族 $\mathscr{U}$ 覆盖非空子集 S, 则存在集 $M\subset S$ 使 $\mathscr{U}$ 中没有一个集包含 M 的两个点, 且 $S\subset\bigcup\{U\in\mathscr{U}:U\cap M\neq\varnothing\}$.

证明 把集 S 良序化. 下面构造超限序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ 满足每一

$$x_\gamma\in S-\mathrm{st}(\{x_\alpha:\alpha<\gamma\},\mathscr{U}).$$

先取 S 的首元素作为 $\{x_\alpha\}$ 的首项 x_0. 设对 $\alpha<\gamma$, x_α 已取定. 置

$$E_\gamma=S-\mathrm{st}(\{x_\alpha:\alpha<\gamma\},\mathscr{U}).$$

若 $E_\gamma=\varnothing$, 则完成归纳; 否则, 取 E_γ 的首元素作为 x_γ. 得所要求的超限序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}$. 置 $M=\{x_\alpha:\alpha<\eta\}$, 则 M 满足引理的要求. 证完.

定理 6.6.1[410] 弱 $\delta\theta$ 加细空间是 iso 紧的.

证明 由于弱 $\delta\theta$ 加细空间是闭遗传的, 由定义 6.6.1 只要证明弱 $\delta\theta$ 加细的可数紧空间是紧空间.

设 X 是弱 $\delta\theta$ 加细的可数紧空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 存在开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n$, 满足对每一 $x\in X$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $0<\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega$. 置

$$C_n=\{x\in X:0<\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega\}.$$

显然, $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n$. 用 $F(\mathscr{U})$ 表示 X 的所有能为 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖的闭子集所成集族. 要证明 $X\in F(\mathscr{U})$. 从而由 X 的可数紧性得证.

用反证法. 如 $X\notin F(\mathscr{U})$, 则必有某些 $C_m\notin F(\mathscr{U})$. 设 n_0 是最小正整数 m 使 $C_m\notin F(\mathscr{U})$. 设 $\mathscr{W}_0$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子族且覆盖所有的 C_m $(m<n_0)$, 置 $E_0=X-\mathscr{W}_0^*$. 如果 $C_1\notin F(\mathscr{U})$, 则取 $E_0=X$. 这里 E_0 是 X 的闭子集, $E_0\cap C_m=\varnothing$ $(m<n_0)$. 设 $k\in\mathbb{N}$, 对所有 $0\leqslant j\leqslant k$, 都有

(i) E_j 是 X 的闭子集;

(ii) n_j 是最小正整数 m 使 $E_j \cap C_m \notin F(\mathscr{U})$;

(iii) $E_{j+1} \subset E_j$ (如 E_{j+1} 有定义);

(iv) $E_j \cap C_m = \varnothing$ $(m < n_j)$.

置 $B = E_k - \mathscr{V}_{n_k}^*$, 则 B 是闭集. 下证 $B \notin F(\mathscr{U})$. 如若不然, 存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{U}_1$ 覆盖 B. 由假设 $\varnothing \neq (E_k \cap C_{n_k}) - \mathscr{U}_1^* \subset \mathscr{V}_{n_k}^*$, 根据引理 6.6.1, 存在 $M \subset (E_k \cap C_{n_k}) - \mathscr{U}_1^*$, 使得 $(E_k \cap C_{n_k}) - \mathscr{U}_1^* \subset \cup\{V \in \mathscr{V}_{n_k} : V \cap M \neq \varnothing\}$ 且 $\mathscr{V}_{n_k}$ 中没有一个元包含 M 中的两个点. 又 $M \subset E_k - \mathscr{U}_1^* \subset \mathscr{V}_{n_k}^*$ 且 $E_k - \mathscr{U}_1^*$ 是可数紧的子集, 所以 M 无 ω 聚点, 于是 M 是有限集. 这说明 $E_k \cap C_{n_k} \in F(\mathscr{U})$, 矛盾. 所以 $B \notin F(\mathscr{U})$, 从而必有某些 C_m 使 $B \cap C_m \notin F(\mathscr{U})$. 设 n_{k+1} 是最小的正整数 m 使 $B \cap C_m \notin F(\mathscr{U})$. 设 $\mathscr{W}_{k+1}$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子族, 覆盖所有 $B \cap C_m$ $(m < n_{k+1})$. 置 $E_{k+1} = B - \mathscr{W}_{k+1}^*$, 则 (i)~(iv) 对 $j = k+1$ 成立.

由归纳法, 存在序列 $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 (i)~(iv). 由 (iv), $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_j = \varnothing$. 这与 X 的可数紧性矛盾. 故知 $X \in F(\mathscr{U})$. 定理得证. 证完.

注记 Ortho 紧空间不必是 iso 紧的. 在引理 6.2.3 后对空间 $[0,\omega_1)$ 的讨论中指出 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的, 而 $[0,\omega_1)$ 是可数紧的但不是紧的. 由定义 6.6.1 知 ortho 紧空间不必是 iso 紧的. 另外, 由定理 6.6.1 知 $[0,\omega_1)$ 不是弱 $\delta\theta$ 加细的. 事实上, $[0,\omega_1)$ 不具有下述许多弱于弱 $\delta\theta$ 加细而是 iso 紧的性质.

下列学者们所引入的都是更弱的 iso 紧空间: Worrell 和 Wicke[417] 引入**弱 $[\omega_1,\infty)^r$ 加细空间** (weakly $[\omega_1,\infty)^r$-refinable space) 作为弱 $\delta\theta$ 空间的自然推广; 从不同途径, Davis[102] 引入具有 **θL 性质** (θL-property) 的空间, Arhangel'skiĭ[23] 引入 **pure 空间** (pure space) 都作为弱 $\delta\theta$ 空间的推广. Sakai[347] 引入 **neat 空间** (neat space) 作为上述三类空间的共同推广.

由于 iso 紧性的引入, 人们关注怎样的伪紧空间是紧空间. 存在伪紧、meta 紧的 Lindelöf 空间而不是紧空间 (见文献 [372] 中例 60). Scott[350] 和 Watson[407] 各自独立地证明了完全正则的伪紧、弱仿紧空间是紧空间. Burke 和 Davis[72] 证明了完全正则的伪紧、仿 Lindelöf 空间是紧空间. 然而, Watson[408] 构造了非紧的完全正则、伪紧、meta-Lindelöf 空间.

下面叙述 iso 紧空间的性质.

由定义 6.6.1 容易验证 iso 紧空间是闭遗传的. 下证 iso 紧空间也是 F_σ 遗传的.

定理 6.6.2[36] Iso 紧空间的 F_σ 子空间是 iso 紧的.

证明 设 E 是 iso 紧空间 X 的 F_σ 子集. 记 $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, 每一闭集 F_n $(n \in \mathbb{N})$ 是 iso 紧的. 设 M 是子空间 E 的可数紧的闭子集. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族覆盖 M. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $M \cap F_n$ 是 F_n 的可数紧的闭子集, 从而是紧的, 为 $\mathscr{U}$ 的有

限子族覆盖. 所以 M 为 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖. 因 M 是可数紧的, 故为 $\mathscr{U}$ 的有限子族覆盖, M 是紧的. 所以 E 是 iso 紧的. 证完.

映射 $f: X \to Y$ 称为**拟 k 映射** (quasi-k-mapping), 如果对空间 Y 中的每一可数紧的子集 K, $f^{-1}(K)$ 是空间 X 中的可数紧的子集.

回忆定义 5.5.1 中的 k 映射及定义 5.2.1 中的拟完备映射.

定理 6.6.3 设 $f: X \to Y$ 是 iso 紧空间 X 到空间 Y 上连续的拟 k 映射, 则 Y 是 iso 紧空间.

证明 设 K 是空间 Y 的可数紧的闭子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是空间 X 的可数紧的闭子集, 从而是紧的, 所以 K 是 Y 中紧集. 证完.

由于拟完备映射 $f: X \to Y$ 使 Y 中的可数紧集的逆像为 X 中的可数紧集, 即拟完备映射 $\Rightarrow$ 拟 k 映射 (见习题 3.31), 故有下述推论.

推论 6.6.1[36] 拟完备映射保持 iso 紧性.

定理 6.6.4[36] 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到 iso 紧空间 Y 上的完备映射, 则 X 是 iso 紧空间.

证明 设 M 是空间 X 的可数紧闭子集, 则 $f(M)$ 是空间 Y 的可数紧闭子集, 从而是紧的. 由于完备映射是 k 映射 (习题 3.30), $f^{-1}(f(M))$ 是紧的. M 是 $f^{-1}(f(M))$ 的闭子集, M 是紧的. 证完.

定理 6.6.5[293] 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到 iso 紧 T_1 空间 Y 上的连续闭映射, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 iso 紧的, 则 X 是 iso 紧空间.

证明 设 M 是空间 X 的可数紧闭子集, 则 $f(M)$ 是空间 Y 的可数紧闭子集, 从而 $f(M)$ 是紧集. 考察 f 在 M 上的限制 $f|_M: M \to f(M)$, $f|_M$ 是闭映射. 对每一 $y \in f(M)$, $f|_M^{-1}(y)$ 是 M 的闭子集, 从而是可数紧的. 此外, $f|_M^{-1}(y)$ 也是 $f^{-1}(y)$ 的闭子集, 从而是 iso 紧的. 所以 $f|_M^{-1}(y)$ 是紧的, $f|_M$ 是完备映射. 因 $f(M)$ 是紧的, M 是紧的 (习题 3.30). 所以 X 是 iso 紧空间. 证完.

上述结果很有趣, 因为对一般的覆盖性质 (如仿紧性), 类似的结果不能成立 (见习题 5.14 和习题 5.15).

定理 6.6.6[36] Iso 紧空间与紧空间的积是 iso 紧的.

证明 由定理 6.6.4 和定理 3.3.1 得证. 证完.

定理 6.6.7[36] 可数个 iso 紧闭子集的并是 iso 紧的.

证明 证明包含在定理 6.6.2 的证明中. 证完.

定理 6.6.8 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 T_1 空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖, 每一闭集 F_α $(\alpha \in A)$ 是 iso 紧的, 则 X 是 iso 紧的.

证明 设 M 是 T_1 空间 X 的可数紧闭子集. 由引理 5.5.1, M 为有限个 F_α 覆盖. 设 $M \subset \bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}$. 由定理 6.6.7, $\bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}$ 是 iso 紧的. 从而 M 是紧的, X 是 iso 紧的. 证完.

下面利用 iso 紧性叙述两个连续映射间的转换定理 (定理 6.6.9 和定理 6.6.10).

引理 6.6.2 正规 iso 紧空间到可数紧空间上的连续闭映射是边缘紧映射.

证明 由 iso 紧性的定义 6.6.1, 只要证明对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 的边缘 $\partial f^{-1}(y)$ (闭集) 是可数紧的. 证明仿照 "正规伪紧空间是可数紧的" (定理 3.5.6) 的证法, 把引理 4.4.7 的结果 (参见引理 4.4.7 的注记) 代替那里的伪紧性. 证完.

定理 6.6.9[140] 正规 iso 紧空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射是紧覆盖映射.

证明 设 K 是空间 Y 的紧集. 因 X 是正规的, f 是连续的闭映射, 所以 Y 是 T_2 的. 紧集 K 闭于 Y. 从而 $f^{-1}(K)$ 闭于 X. f 在闭集 $f^{-1}(K)$ 上的限制 $g = f|_{f^{-1}(K)}$ 仍是闭的. 由于正规性、iso 紧性都是闭遗传的, 所以 g 是正规的 iso 紧空间到紧空间 K 上的连续闭映射. 由引理 6.6.2, g 是边缘紧的. 由引理 4.4.8, 存在闭集 $C \subset f^{-1}(K)$ 使 g 在 C 上的限制 $h = g|_C$ 是 C 到紧集 K 上的完备映射. 所以 C 是紧集 (定理 3.3.3). 由于 $C \subset f^{-1}(K) \subset X$, 所以 $f(C) = g(C) = h(C) = K$. 证完.

注记 作为定理 6.6.9 的应用, 可以用来证明前面的定理 6.2.6 (连续的闭映射保持正规 meso 紧性). 由于连续的闭、紧覆盖映射保持 meso 紧性 (定理 6.2.4), 而 meso 紧性是 iso 紧的 (定理 6.6.1), 故定理 6.2.6 得证.

推论 6.6.2[283] T_2 仿紧空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射是紧覆盖映射.

引理 6.6.3[140] 设 f 是正规空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, $\{y_n\}$ 是 $Y - \{y_0\}$ 中收敛于 y_0 的点列, 则 $f^{-1}(y_0) \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)}$ 是可数紧的.

证明 令 $K = f^{-1}(y_0) \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)}$. 首先, 由于 f 是闭映射,

$$f\Big(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)}\Big) \supset \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\},$$

所以闭集 $K \neq \varnothing$.

用反证法. 如果闭集 K 不是可数紧的, 则存在点列 $\{x_n\} \subset K$ 在 K 中无聚点. 从而集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的任何子集是闭的, 所以 $\{\{x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是离散闭集族. 由习题 2.29 和习题 2.30, 存在离散开集族 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $x_n \in G_n$ $(n \in \mathbb{N})$. 由于

$$x_n \in K \subset f^{-1}(y_0) \text{ 及 } f^{-1}(y_0) \cap \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)\Big) = \varnothing,$$

而对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(y_i)$ 是闭集, 从而可取 G_n 使满足 (必要时, 可以 $G_n - \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(y_i)$ 代 G_n)

$$G_n \cap \Big(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Big) = \varnothing \qquad (6.6.1).$$

对每一 $m \in \mathbb{N}$, 由于 $x_m \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)}$, 故 $G_m \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n)) \neq \varnothing$. 取

$$z_m \in G_m \cap \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n) \Big),$$

确定 $i(m) \in \mathbb{N}$, 使 $z_m \in f^{-1}(y_{i(m)})$. 由 (6.6.1), 有 $i(m) > m$ $(m \in \mathbb{N})$. 从而可以选取 $\mathbb{N}$ 中两个严格递增的序列 $\{n_j\}$ 和 $\{i(n_j)\}$ 使 $z_{n_j} \in G_{n_j} \cap f^{-1}(y_{i(n_j)})$ $(j \in \mathbb{N})$. 由于 $z_{n_j} \in G_{n_j}$ $(j \in \mathbb{N})$, 所以 $\{\{z_{n_j}\} : j \in \mathbb{N}\}$ 是离散闭集族, 从而可数集 $\{z_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$ 是闭的. 因为 f 是闭映射, 所以作为它的像, 也就是集 $\{y_{i(n_j)} : j \in \mathbb{N}\}$ 是闭的. 但是 $\{y_{i(n_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列应以 y_0 为聚点. 这一矛盾证明 K 是可数紧集. 证完.

回忆第 2 章介绍的 Fréchet 空间、序列型空间的概念 (定理 2.3.1 的注记). 拓扑空间 X 称为 Fréchet 空间, 如果对每一 $A \subset X$, 每一 $x \in \overline{A}$, 存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x; 称为序列型空间, 如果对 $A \subset X$, 集 A 是 X 的开集当且仅当收敛于 A 中某一点的序列都终留于 A. 显然, 第一可数空间 $\Rightarrow$ Fréchet 空间 $\Rightarrow$ 序列型空间.

设 X, Y 都是拓扑空间. 映射 $f : X \to Y$ 称为**不可约的** (irreducible[240]), 如果不存在 X 的闭的真子集 F 使 $f(F) = Y$.

定理 6.6.10[140] 设 f 是正规 iso 紧空间到序列型空间 Y 上的连续闭映射, 则存在闭集 $X' \subset X$ 使 $f|_{X'}$ 是 X' 到 Y 上的不可约映射.

证明 对空间 Y 的每一孤立点 y, 任取 $x_y \in f^{-1}(y)$. 置

$$X_0 = \{x_y : y \text{ 是 } Y \text{ 的孤立点}\} \cup (\cup\{f^{-1}(y) : y \text{ 不是 } Y \text{ 的孤立点}\}). \qquad (6.6.2)$$

对每一 $x \notin X_0$, $x \in$ 某 $f^{-1}(y)$, y 是 Y 中的孤立点. 从而 $f^{-1}(y)$ 是开集, 而 $\{x_y\}$ 是闭集, 故点 x 的开邻域 $f^{-1}(y) - \{x_y\}$ 与 X_0 不交, X_0 是闭集. 于是 $g = f|_{X_0}$ 是 X_0 到 Y 上的连续闭映射. 如果 g 是不可约的, 则已得证. 如若不然, 则必存在子空间 X_0 的不空开集 U_0 使 $g(X_0 - U_0) = Y$. 下面利用 Zorn 引理完成证明.

设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha : U_\alpha$ 是 X_0 的不空开集, $g(X_0 - U_\alpha) = Y\}$. 规定 $\mathscr{U}$ 中元素的序 “$<$”: $U_\alpha < U_{\alpha'}$ 当且仅当 U_α 是 $U_{\alpha'}$ 的真子集. 任取链 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, 设 $\mathscr{U}' = \{U_\alpha : \alpha < \beta\}$, β 是一序数, 下证链 $\mathscr{U}'$ 有上界.

(i) 当 β 不是极限序数时, 如 $g|_{X_0 - U_{\beta-1}}$ 不是不可约的, 则存在 X_0 的不空开集 $U \subset X_0 - U_{\beta-1}$ 使 $g((X_0 - U_{\beta-1}) - U) = Y$. 令 $U_\beta = U_{\beta-1} \cup U$, 显然 $U_{\beta-1} < U_\beta$ 且 $g(X_0 - U_\beta) = Y$. 所以 U_β 是链 $\mathscr{U}'$ 的上界.

(ii) 当 β 是极限序数时, 令 $U_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha$. 下证 $g(X_0 - U_\beta) = Y$. 设不然, 存在 $y_0 \in Y - g(X_0 - U_\beta)$ 使 $g^{-1}(y_0) \subset U_\beta$, 但 $g^{-1}(y_0) \not\subset U_\alpha$ $(\alpha < \beta)$. 由 (6.6.2) 及 g 的定义, 知 y_0 不是空间 Y 的孤立点 (如 y_0 是孤立点, 则 $g^{-1}(y_0) = \{x_{y_0}\}$.

$x_{y_0} \in U_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \Rightarrow x_{y_0} \in$ 某 U_α, 这与 $g(X_0 - U_\alpha) = Y$ 矛盾). 从而 $\{y_0\}$ 不是 Y 的开集, 因 Y 是序列型空间, 存在 Y 中收敛于点 y_0 的一序列不终留于集 $\{y_0\}$, 于是存在点列 $\{y_n\} \subset Y - \{y_0\}$ 使 $\{y_n\}$ 收敛于 y_0. 置

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(y_n), \quad K = g^{-1}(y_0) \cap \overline{H}.$$

由于正规性、iso 紧性都是闭遗传的, 由引理 6.6.3, K 是可数紧的, 由 X_0 的 iso 紧性知 K 是紧集. 按 $K \subset g^{-1}(y_0) \subset U_\beta$, 因 K 是紧集, 存在 $\alpha < \beta$ 使 $K \subset U_\alpha$. 下证 $H - U_\alpha$ 是闭集. 因 Y 是 T_2 的, 紧集 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y_0\}$ 是闭集, 从而 $g^{-1}(y_0) \cup H$ 是闭集. 由于 $g^{-1}(y_0) \cap H = \varnothing$, 所以 $K = g^{-1}(y_0) \cap (\overline{H} - H)$. 因 $g^{-1}(y_0) \cup H$ 是闭的, $\overline{H} \subset g^{-1}(y_0) \cup H$, $\overline{H} - H \subset g^{-1}(y_0)$. 所以 $K = \overline{H} - H$, 从而 $\overline{H} - H \subset U_\alpha$. $H - U_\alpha = (H \cup (\overline{H} - H)) - U_\alpha = \overline{H} - U_\alpha$. 所以 $H - U_\alpha$ 是闭集. 因 g 是闭映射, 闭集 $g(H - U_\alpha) \subset \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. 按 $\{y_n\}$ 收敛于 y_0, 闭集 $g(H - U_\alpha)$ 只能是有限集. 从而存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $n \geqslant m$ 时, $g^{-1}(y_n) \subset U_\alpha$. 这与 $g(X_0 - U_\alpha) = Y$ 矛盾. 这一矛盾证明了 $g(X_0 - U_\beta) = Y$. 所以 U_β 是这链 $\mathscr{U}'$ 的上界.

由 Zorn 引理, $\mathscr{U}$ 中有极大元 U. 从而 $g|_{X_0-U}$ 是不可约的. 置 $X' = X_0 - U$. $f|_{X'}$ 是 X' 到 Y 上的不可约映射. 证完.

高国士 [140] 所述的定理条件是 Fréchet 空间而不是序列型空间, 我们将条件减弱后套用原来的证明未遇到任何困难. 1998 年, G. Gruenhage[169] 构造例子说明: 存在正则 Lindelöf 空间 X 满足, 对任何连续闭映射 $f : X \to Y$, 不存在闭集 $X' \subset X$ 使 $f|_{X'}$ 是 X' 到 Y 上的不可约映射. 从而定理 6.6.10 中空间 Y 是序列型空间的假设不可省略.

推论 6.6.3[240] 设 f 是 T_2 仿紧空间 X 到 Fréchet 空间 Y 上的连续闭映射, 则存在闭子集 $X' \subset X$ 使 $f|_{X'}$ 是 X' 到 Y 上的不可约映射.

下面叙述本节的第二个内容 —— 不可约空间.

定义 6.6.2 拓扑空间 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**最小的** (minimal), 如果不存在 $\mathscr{U}$ 的真子族覆盖 X. 空间 X 称为**不可约** (irreducible[51]), 如果 X 的每一开覆盖具有最小的开加细覆盖.

Arens 和 Dugundji[13] 在证明弱仿紧空间是 iso 紧时得到弱仿紧空间是不可约的.

定理 6.6.11[13] 任一空间的每一点有限开覆盖具有最小子覆盖.

证明 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的点有限开覆盖. 考察在 $\mathscr{U}$ 中去掉某些 U_α 后形成的 $\mathscr{U}$ 的子覆盖全体, 记作 $\varPhi$. $\varPhi$ 中的元可以看作由指标集 A 到 $\mathscr{U} \cup \{\varnothing\}$ 上的映射 f 满足:

(i) $f(\alpha) = U_\alpha$, 或 $f(\alpha) = \varnothing$;

(ii) $\bigcup_{\alpha\in A} f(\alpha) = X$.

对每一 $f \in \Phi$. 置 $A_f = \{\alpha : \alpha \in A,\ f(\alpha) = \varnothing\}$. 在集 Φ 上定义序 "<": $f < f'$ 当且仅当 $A_f \subset A_{f'}$. Φ 形成偏序集. 任取 Φ 的全序子集 Φ_0, 下证 Φ_0 有上界.

置 $f_0(\alpha) = \bigcap_{f\in\Phi} f(\alpha)$ $(\alpha \in A)$. 考察由此形成的映射 f_0. 下证 $f_0 \in \Phi_0$. f_0 显然满足 (i). 对每一 $x \in X$, x 属于有限个 U_α. 置 $A_{f_0} = \{\alpha : \alpha \in A,\ f_0(\alpha) = \varnothing\}$. 这有限个足标 α 中如有一个 $\alpha \notin A_{f_0}$, 则 f_0 显然满足 (ii), 从而 Φ_0 有上界. 如这有限个 α 都属于 A_{f_0}, 下证这是不可能的. 这时必有一 $f \in \Phi_0$ 使这有限个 α 包含在 A_f 内, 从而 f 不满足 (ii), 与 $f \in \Phi_0$ 矛盾.

由 Zorn 引理, Φ 中有极大元 f^*. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A-A_{f^*}}$ 形成 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的最小子覆盖. 证完.

推论 6.6.4[13] 弱仿紧空间是不可约的.

证明 由定义 6.6.2 及定理 6.6.11 得证. 证完.

1965 年, Worrell 和 Wicke[416] 宣告 θ 加细空间是不可约的, 但未给出证明. 1972 年, Christian[92, 93] 证明了次仿紧空间是不可约的. 1975 年, Boone[51] 给出了 θ 加细空间是不可约的证明, 并提出弱 θ 加细空间是否不可约? 1977 年, van Douwen 和 Wicke[107] 构造了一个正则、弱 θ 加细而非不可约的空间, 否定地回答了上述问题. 弱 $\bar{\theta}$ 加细空间是否不可约引起学者们的兴趣. 1976 年, Boone[52] 和 Smith[367] 分别用不同方法证明了弱 $\bar{\theta}$ 加细空间是不可约的. 他们的证明技巧性很强, 都很冗繁. 1984 年, Mashburn[277] 证明了 T_1 的 $\delta\theta$ 加细空间及 T_1 的弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间都是不可约的. 他的证明技巧性更强, 因为前面关于点有限的一些方法不适于点可数的情况. 证明很冗繁, 不予引载, 读者可阅所引文献. 此外, 1991 年朱俊 [449] 证明了 T_1 的拟仿紧空间也是不可约空间. 上述关于 T_1 的假设不能去掉, 容易构造不是 T_1 的非不可约的 Lindelöf 空间 (习题 6.22). 关于不可约空间的综合介绍见高国士 [143, 145]. 下面是不可约空间的刻画.

定理 6.6.12[51] 空间 X 是不可约的, 当且仅当对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 存在离散不空闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$, 使 $B \subset A$, $F_\beta \subset U_\beta$ $(\beta \in B)$ 且 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 覆盖 X.

证明 必要性. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是不可约空间 X 的开覆盖. 设 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in B}$ 是 X 的最小开覆盖, 且 $B \subset A$, $V_\alpha \subset U_\alpha$ $(\alpha \in B)$. 对每一 $\beta \in B$, 置

$$F_\beta = X - \cup\{V_\alpha : \alpha \in B,\ \alpha \neq \beta\},$$

由覆盖的最小性知每一 $F_\beta \neq \varnothing$. 则得离散不空闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$ 使 $B \subset A$, $F_\beta \subset U_\beta$ $(\beta \in B)$ 且 $\{U_\beta : \beta \in B\}$ 覆盖 X.

充分性. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的开覆盖. 由假设, 存在离散闭集族

$\{F_\beta\}_{\beta\in B}$, 使 $B\subset A$, $F_\beta\subset U_\beta$ $(\beta\in B)$ 且 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 覆盖 X. 对每一 $\beta\in B$, 置

$$V_\beta=U_\beta-\cup\{F_\alpha:\alpha\in B,\ \alpha\neq\beta\},$$

则 $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 X 的最小开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

定理 6.6.13 在不可约空间:

(i) 可数紧性与紧性等价;

(ii) $\aleph_1$ 紧性 (每一不可数子集有聚点) 与 Lindelöf 性质等价.

证明 显然, 紧性 $\Rightarrow$ 可数紧性, Lindelö 性质 $\Rightarrow$ $\aleph_1$ 紧性 (见定理 4.1.7 的注记). 另一方面, 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是不可约空间 X 的开覆盖. 由定理 6.6.12, 存在离散不空闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$ 满足定理 6.6.12 的要求, 易知在可数紧 ($\aleph_1$ 紧) 空间中每一离散集族是有限的 (可数的), 故 $\mathscr{U}$ 具有有限 (可数) 子覆盖. 证完.

注记 1 可数紧 ($\aleph_1$ 紧) 空间 X 中的每一局部有限集族是有限的 (可数的). 事实上, 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是可数紧 ($\aleph_1$ 紧) 空间 X 中的局部有限的非空集族, 若 $\mathscr{U}$ 不是有限的 (可数的), 即 A 是无限集 (不可数集). 对每一 $\alpha\in A$, 取定 $x_\alpha\in A_\alpha$. 令 $F=\cup\{\overline{\{x_\alpha\}}:\alpha\in A\}$, 则 F 及其任一子集都是闭集 (推论 3.5.2), 从而 F 是离散闭集. 因为 X 是可数紧 ($\aleph_1$ 紧) 空间, 所以 F 是有限集 (可数集), 不妨设当 $\alpha,\beta\in A$ 时, $\overline{\{x_\alpha\}}=\overline{\{x_\beta\}}$, 则 $\mathscr{U}$ 在点 x_α $(\alpha\in A)$ 不是局部有限的. 这一矛盾说明集族 $\mathscr{U}$ 是有限的 (可数的).

注记 2 空间 $[0,\omega_1)$ 是可数紧而不是紧的, 由定理 6.6.13 的 (i) 知 $[0,\omega_1)$ 不是不可约空间. 由于 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的, 故 ortho 紧空间不是不可约的 (见定理 6.6.1 的注记). 定理 6.6.13 给出的不可约空间的性质 (i) 与 iso 紧的定义 (定义 6.6.1) 有些类似. 可能会想到不可约性能蕴含 iso 紧, 事实不然, 见下面的定理及说明.

定理 6.6.14[105] 每一空间可以作为一闭子集浸没于某一不可约空间.

证明 对任一空间 X 作积空间 $X\times[0,\omega]$. 把 $X\times[0,\omega)$ 中的点都取为孤立点, 由此而得的空间记作 $\varphi(X)$. 显然, X 同胚于 $\varphi(X)$ 中的闭子集 $X\times\{\omega\}$. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\varphi(X)$ 的任一开覆盖. 对每一 $x\in X$ 选取 $n_x\in[0,\omega)$ 及 U_x 开于 X 使 $U_x\times[n_x,\omega]$ 包含在 $\mathscr{U}$ 中的某开集内. 令

$$V_x=(U_x\times[n_x+1,\omega])\cup\{(x,n_x)\}.$$

V_x 仍包含在 $\mathscr{U}$ 中的某开集内. 对每一 $n\in[0,\omega)$, 设 $A_n=\{x\in X:n_x=n\}$. 置

$$\mathscr{W}_0=\{V_x:x\in A_0\};$$

$$\mathscr{W}_n=\left\{V_x:x\in A_n\ \text{且}\ (x,\omega)\notin\bigcup_{i=0}^{n-1}\mathscr{W}_i^*\right\}\quad(n\in\mathbb{N});$$

$$\mathscr{W}_\omega = \Big\{\{p\} : p \in \varphi(X) - \bigcup_{n<\omega} \mathscr{W}_n^*\Big\}.$$

易知 $\mathscr{W} = \bigcup_{n=0}^{\omega} \mathscr{W}_n$ 是 X 的最小开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. $\varphi(X)$ 是不可约的. 证完.

1976 年, van Douwen 宣告 "每一空间可以作为一闭子集浸没于某一不可约空间", 未见其构造. 上面的构造是 1979 年 Davis 和 Smith[105] 给出的. 这定理说明:

(i) 不可约性不是闭遗传的. 可取 X 为任一非不可约空间. X 的同胚像 $X \times \{\omega\}$ 是不可约空间 $\varphi(X)$ 的闭子集.

(ii) 不可约性 $\nRightarrow$ iso 紧性. 可取 X 为任一非 iso 紧的空间, 相应的不可约空间 $\varphi(X)$ 必非 iso 紧的. 不然的话, 由于 iso 紧性是闭遗传的, X 也将是 iso 紧的. 矛盾.

关于不可约空间性质的研究是很不够的, 有许多问题没有解决 (见文献 [143] 和 [145]). 1975 年, Boone[51] 提出: "不可约空间的映射性质怎样? 特别地, Arhangel'skiĭ 的 MOBI 类的每一空间是否都是不可约的?" 下面是朱俊 [449] 的一些结果.

定理 6.6.15[449] 设空间 X 是不可约的, 闭集 $A \subset X$, 则商空间 X/A 是不可约的.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X/A 的任一开覆盖. 存在 $U_0 \in \mathscr{U}$ 使点 $A \in U_0$. 令 $\mathscr{U}' = \{U - \{A\} : U \in \mathscr{U}\} \cup \{U_0\}$. 设 f 是 X 到 X/A 上的商映射. 由 X/A 上的商拓扑, X/A 中的单点集 $\{A\}$ 是闭的. 所以 $\mathscr{U}'$ 是 X/A 的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 从而 $f^{-1}(\mathscr{U}')$ 是 X 的开覆盖. 于是有加细 $f^{-1}(\mathscr{U}')$ 的 X 的最小开覆盖 $\mathscr{V}$. 令

$$\mathscr{V}_1 = \{V : V \in \mathscr{V},\ V \cap A = \varnothing\}, \quad \mathscr{V}_2 = \mathscr{V} - \mathscr{V}_1.$$

由于 $f|_{X-A} : X - A \to X/A - \{A\}$ 是同胚映射, 所以 $f(\mathscr{V}_1)$ 是加细 $\mathscr{U}$ 的关于 $X/A - f(\mathscr{V}_2^*)$ 的最小开集族. 因 $A \subset \mathscr{V}_2^*$, $f(\mathscr{V}_2^*)$ 是 X/A 中包含点 A 的开集. 又因每一 $V \in \mathscr{V}_2$, $V \cap A \neq \varnothing$, 所以 V 必含于 $f^{-1}(U_0)$. 从而 $\mathscr{V}_2^* \subset f^{-1}(U_0)$, $f(\mathscr{V}_2^*) \subset U_0$. 所以 $f(\mathscr{V}_1) \cup \{f(\mathscr{V}_2^*)\}$ 是 X/A 的最小开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. X/A 是不可约的. 证完.

例 6.6.1[449] 二对一的连续开映射不能保持不可约性.

设 X 是任一非不可约空间, 令 $Z = X \times \{0, 1\}$. 对 $(x, 0) \in Z$, 规定

$$\{V_x \times \{0\} : V_x \text{ 是 } x \text{ 在 } X \text{中的邻域}\}$$

为 $(x, 0)$ 的邻域基. 对 $(x, 1) \in Z$, 规定

$$\{V_x \times \{0\} \cup \{(x, 1)\} : V_x \text{ 是 } x \text{ 在 } X \text{ 中的邻域}\}$$

为 $(x, 1)$ 的邻域基. 定义 $f : Z \to X$ 为 $f((x, i)) = x$ $(i = 0, 1)$, 则 f 是连续的开映射. 下证 Z 是不可约的. 因 Z 的每一开覆盖都有形如 $\{V_x \times \{0\} \cup \{(x, 1)\} : x \in X\}$ 的加细覆盖, 这开覆盖是最小的. 证完.

由上述定理 6.6.15 及例 6.6.1, 提如下问题.

问题[143]　不可约空间能否为连续的闭映射 (或完备映射) 所保持?

1966 年, Arhangel'skiĭ[21] 定义 **MOBI 类**作为所有满足下列二条件的拓扑空间类的交 (即最小类):

(i) 每一度量空间属于这类;

(ii) 这类的每一空间在连续的开紧映射下的像属于这类.

1970 年, Bennett[42] 给出如下刻画: "空间 Y 是 MOBI 类中的元当且仅当存在一度量空间 M 及有限个连续的开紧映射 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$, 使 $(\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n)(M) = Y$". 1990 年, Bennett 和 Chaber[44] 构造了一个正则的弱 θ 加细空间不属于 MOBI 类. Boone[51] 提出 MOBI 类的每一元是否都是不可约的.

定理 6.6.16[145]　Arhangel'skiĭ 的 MOBI 类中的每一 T_1 空间都是不可约空间.

证明从略, 参见推论 7.6.2.

上述定理的有趣在于二对一的连续开映射尚不能保持不可约空间, 而由度量空间经任意有限回的连续开紧映射复合形成的 MOBI 类中的 T_1 空间子类的每一元却是不可约空间.

习　题　6

6.1[20]　证明正则 k 空间 X 是仿紧的当且仅当 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有紧有限的闭加细覆盖; 正规 k 空间 X 是仿紧的当且仅当 X 是 meso 紧的.

6.2[49]　证明弱仿紧空间是点态集态正规的. Sorgenfrey 平面是次仿紧的, 不是弱仿紧, 从而不是点态集态正规的 (定理 6.1.11). 点态集态正规性是 F_σ 遗传的, 为连续闭映射所保持.

6.3　证明广义贝尔零维空间 $N(A)$ (例 4.1.2) 当 A 是不可数集时是强仿紧空间 [114]. 证明 $N(A) \times (0,1)$ 当 A 是不可数集时不是强仿紧空间, 这里 $(0,1)$ 是数直线上的开区间 [316].

6.4[45]　在实数集 $\mathbb{R}$ 上赋以如下拓扑: 无理点是孤立点; 有理点 x 的邻域基为 $\{G(x,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 这里 $G(x,n) = \{x\} \cup \{y : y$ 是无理点且 $|y-x| < 1/n\}$. 试证明 X 是 T_2 弱 $\overline{\theta}$ 加细空间而不是 θ 加细空间.

6.5[164]　空间 X 称为**点星 ortho 紧的** (pointwise star-orthocompact), 如果对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在内核保持开覆盖 $\{V_x\}_{x\in X}$ 使对每一 $x \in X$, 满足 $x \in V_x \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U})$. 证明点星 ortho 紧性为连续闭映射保持.

6.6[218]　空间 X 称为**离散 ortho 紧的** (discretely orthocompact), 如果对 X 的任一离散闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 及任一开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha \in A$, 存在 X 的内核保持开集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 满足 $F_\alpha \subset V_\alpha \subset U_\alpha (\alpha \in A)$. 证明离散 ortho 紧性为连续闭映射保持.

6.7[440]　空间 X 称为**局部有限 ortho 紧的** (locally finitely orthocompact), 如果把上题中的闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 "离散" 改为 "局部有限". 证明:

(i) 局部有限 ortho 紧性为连续闭映射保持;

(ii) 点星 ortho 紧 $\Rightarrow$ 局部有限 ortho 紧, 从而 ortho 紧 $\Rightarrow$ 点星 ortho 紧 $\Rightarrow$ 局部有限 ortho 紧 $\Rightarrow$ 离散 ortho 紧;

(iii) $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是点星 ortho 紧的而是局部有限 ortho 紧的.

6.8[101] 空间 X 称为 ***Lindelöf 空间** (*Lindelöf space), 如果对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在可数开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\}_{x\in X}$. 证明:

(i) X 是 *Lindelöf 空间的充要条件是对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在可数子集 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x_n,\mathscr{U})=X$, 从而 *Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间与可分空间的共同推广;

(ii) *Lindelöf 空间为连续映射保持;

(iii) X 是 Lindelöf 空间当且仅当 X 是 *Lindelöf 空间及 meta-Lindelöf 空间.

6.9[82] 给出反例说明弱仿紧空间在连续的开、紧映射下的像未必是弱仿紧的.

6.10[147] 证明 meso 紧空间在连续的伪开、紧映射下的像是弱仿紧空间. 这结果回答了 Arhangel'skiĭ[22] 的问题: "仿紧空间在连续的伪开、紧映射下的像是弱仿紧空间否?"

6.11[48] 证明在第一可数空间, 每一紧有限的集族是局部有限的.

6.12[132] 设 X 是强仿紧空间且可分解为至多可数个连通区 (成分) 的并, 则 X 是 Lindelöf 空间. 从而连通的强仿紧空间是 Lindelöf 空间.

6.13 设 A 是不可数集. 对每一 $\alpha\in A$, I_α 同胚于单位区间 $I=[0,1]$. 在并 $\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$ 中把所有的 0 叠合为一点得到集 $S(A)$. 定义度量

$$\rho(x,y)=\begin{cases}|x-y|, & x,y\in I_\alpha,\ \alpha\in A,\\ x+y, & x\in I_\alpha,\ y\in I_\beta,\ \alpha\neq\beta,\end{cases}$$

则 $S(A)$ 是度量空间①. 试证明 $S(A)$ 不是强仿紧空间.

6.14 证明强仿紧性关于拓扑和保持.

6.15 开、完备映射保持强仿紧性 [336]. 连续的开、闭映射保持 T_2 强仿紧性 [58].

6.16[132] 设 f 是正则空间 X 到强仿紧空间 Y 上的连续闭映射, 且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是连通的强仿紧子空间, 则 X 是强仿紧空间.

6.17[274] 证明线性序空间 (例 1.2.3) 是集态正规的.

6.18[45] 线性序空间 X 是仿紧空间当且仅当 X 是弱 θ 加细空间.

6.19[421] 连续的伪开、紧映射的任意积是连续的伪开、紧映射②. 有限个连续的有限对一、伪开映射的积是连续的有限对一、伪开映射. 证明连续的有限对一、伪开映射保持: 完备性、可数 θ 加细性、点态集态正规性及第一可数性.

6.20 证明 iso 紧空间与遗传 iso 紧空间的积是 iso 紧的 [36]. 存在 iso 紧的 Tychonoff 空间与它自身的积不是 iso 紧的 [113].

6.21[129] 可数紧空间的每一点有限开覆盖具有有限子覆盖. 从而证明弱仿紧空间是 iso 紧的.

---

① $S(A)$ 称为**刺猬空间** (hedgehog space), 首次出现于 1927 年 Urysohn 发表的论文中 [114].

② 设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族映射, 这里映射 $f_\alpha: X_\alpha\to Y_\alpha$ $(\alpha\in A)$. 映射族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的积 $f=\prod_{\alpha\in A}f_\alpha:\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$ 定义为对每一 $x=\{x_\alpha\}\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$, $f(x)=(\prod_{\alpha\in A}f_\alpha)(\{x_\alpha\})=\{f_\alpha(x_\alpha)\}\in\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$. 见引理 7.2.5.

6.22[269]　构造不是 T_1 的, 非不可约的满足第二可数公理的空间.

6.23[13]　利用定理 6.6.11 证明弱仿紧空间是 iso 紧的.

6.24[449]　构造一个完备的非不可约空间. 证明完备的不可约空间是开遗传不可约的, 不是闭遗传不可约的.

6.25[449]　证明 T_1 拟仿紧空间在连续闭映射下的像是不可约的. 从而 T_1 拟仿紧空间是不可约的.

6.26[145]　证明完备的弱 $\delta\theta$ 加细空间是 $\delta\theta$ 加细的. 从而 T_1 完备的弱 $\delta\theta$ 加细空间是遗传不可约的.

6.27[433]　空间 X 称为具有**性质 B** (property B), 如果对每一良序的递减闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 满足 $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = \varnothing$, 存在递减开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $F_\alpha \subset G_\alpha$ $(\alpha \in A)$ 且 $\bigcap_{\alpha\in A} \overline{G}_\alpha = \varnothing$. 证明:

(i) 仿紧性 $\Rightarrow$ 性质 B $\Rightarrow$ 可数仿紧性;

(ii) 具有性质 B 的空间与紧空间的积具有性质 B;

(iii) 具有性质 B 的 T_2 空间是正则的;

(iv) 在具有性质 B 的正则空间, 可数紧性与紧性等价, $\aleph_1$ 紧性与 Lindelöf 性质等价.

6.28[426]　可数仿紧的仿 Lindelöf 空间具有性质 B.

6.29[393]　满足可数链条件 (习题 2.21) 且具有性质 B 的空间是 Lindelöf 空间.

6.30[155]　连续的双商、闭映射保持性质 B. 完备映射逆保持性质 B.

6.31[369]　把狭义拟仿紧空间的定义 (定义 6.1.9) 中的 “离散” 换为 “局部有限” 得到 Chaber 意义下的**性质 $\mathbf{b_1}$** (property b_1). 显然, 狭义拟仿紧 $\Rightarrow$ 性质 b_1. 证明: 性质 $b_1 \Rightarrow$ 不可约.

6.32[210]　完备映射逆保持性质 b_1.

6.33[154]　连续的闭 Lindelöf 映射逆保持性质 b_1.

第 7 章 广义度量空间 (上)

广义度量空间 (generalized metric space 或 generalized metrizable space) 顾名思义是指度量空间的推广. 仿紧空间以及第 6 章里借助于各种不同性质的覆盖所定义的空间 (除强仿紧空间外) 都是度量空间的推广, 但是这类空间已按其定义的独特方式 (覆盖) 称为覆盖性质, 不属于本章的广义度量空间的范畴. 覆盖性质与广义度量空间有密切联系.

推广度量空间可以减弱度量公理. 例如, 4.1 节把度量公理 (定义 4.1.1) 中的 (M1) ($\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$) 减弱为 (M1′) ($\rho(x,y)=0$ 当 $x=y$), 从而得到伪度量空间. 也可以把度量公理中的 (M3) (三角不等式) 去掉, 另外补充其他各种条件, 得到各种广义度量空间.

推广度量空间的主要方法是从度量化定理出发, 用各种方式减弱其条件. 例如, 由 Alexandroff-Urysohn 度量化定理 (定理 4.5.10) 出发, 去掉其条件 (i), 那就得到可展空间 (定义 4.4.1). 正则可展空间称为 Moore 空间. 也可以保持 (i) 而减弱 (ii) 而得 M 空间 (见定义 7.2.2). Moore 空间与 M 空间都是重要的广义度量空间. 如由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6 和定理 4.3.7) 出发, 从各方面减弱其条件可得更多、更重要的广义度量空间.

7.1 Moore 空间, 可展、拟可展空间与 G_δ 对角线

回忆 Alexandroff-Urysohn 度量化定理 (定理 4.5.10): 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0 的且存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(i) $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n (n\in\mathbb{N})$;

(ii) $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 $x\in X$ 的邻域基.

按存在上述定理中的覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 且满足 (ii) 的空间就是可展空间的定义 (定义 4.4.1), 而把覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为这空间的展开. 正则可展空间称为 **Moore 空间** (Moore space[299]).

定理 7.1.1 可展空间是次仿紧空间 [60]、完备空间 [416].

证明 比较可展空间的定义与次仿紧空间的刻画 [定理 6.1.1 的 (v)], 即知可展空间是次仿紧的. 关于完备性, 容易证明对任一闭集 F, 有 $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(F,\mathscr{U}_n)$ (习题 7.2). 证完.

在定理 4.5.6 后, 曾称积集 $X\times X$ 的子集 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 为 $X\times X$ 的对角线.

定义 7.1.1[80]　空间 X 称为具有 $\boldsymbol{G_\delta}$ **对角线** (G_δ-diagonal), 如果 $X\times X$ 的对角线 Δ 是积空间 X^2 中的 G_δ 集.

下面是 G_δ 对角线的有效刻画, 由此可与其他性质联系.

定理 7.1.2[80]　空间 X 具有 G_δ 对角线当且仅当存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对任意 $x,y\in X$, $x\neq y$, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $y\notin \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ (等价地, 对每一 $x\in X$, $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$).

证明　设 X 具有 G_δ 对角线 $\Delta=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$, V_n 开于 X^2. 对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 设 $U_n(x)$ 是 x 的开邻域使 $U_n(x)\times U_n(x)\subset V_n$, 置 $\mathscr{U}_n=\{U_n(x):x\in X\}$. 如果 $\{x,y\}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, $x\neq y$, 则对每一 $n\in\mathbb{N}$, 选取 $z_n\in X$ 使 $\{x,y\}\subset U_n(z_n)$, 那么 $(x,y)\in U_n(z_n)\times U_n(z_n)\subset V_n$, 从而 $(x,y)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 矛盾.

设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定理条件, 置 $V_n=\cup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_n\}$, 则 $\Delta\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 如果 $(x,y)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$, 则对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$, 使 $(x,y)\in U_n\times U_n$, 从而 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$, 即 $y=x$. 所以 $\Delta=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$. 证完.

满足上述定理 7.1.2 的覆盖序列称为关于 X 的 $\boldsymbol{G_\delta}$ **对角线序列** (G_δ-diagonal sequence[80]). 显然, T_1 可展空间具有 G_δ 对角线, 具有 G_δ 对角线的空间是 T_1 空间.

定理 7.1.3[370]　具有 G_δ 对角线的 T_2 紧空间可度量化.

证明　设 X 满足定理条件, 由定理 7.1.2, 存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使对每一 $x\in X,\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$. 由于 X 是紧且正则的, 存在有限开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\overline{\mathscr{V}}_n=\{\overline{V}:V\in\mathscr{V}_n\}$ 加细 $\mathscr{U}_n$, 且 $\mathscr{V}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{V}_n$. 从而

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\overline{\mathscr{V}}_n)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}.$$

置

$$\mathscr{B}=\{X-(\overline{V}_1\cup\cdots\cup\overline{V}_k):V_1,\cdots,V_k\in\mathscr{V}_n;\ k,n\in\mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是可数开集族, 下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基.

考察 $x_0\in X$ 及 x_0 的开邻域 U. 由定理 3.1.3, 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x_0,\overline{\mathscr{V}}_n)\subset U$. 因为 $\mathscr{V}_n$ 是 X 的覆盖, 对每一 $x\in X-U$, 存在 $V_x\in\mathscr{V}_n$ 使 $x\in V_x$. 易知 $x_0\notin\overline{V}_x$ (不然, 将有 $x\in U$, 矛盾). 由于 $X-U$ 是紧的, 有限个 $V_{x_1},\cdots,V_{x_k}$ 覆盖 $X-U$, 则 $X-(\overline{V}_{x_1}\cup\cdots\cup\overline{V}_{x_k})\in\mathscr{B}$, 而

$$x_0\in X-(\overline{V}_{x_1}\cup\cdots\cup\overline{V}_{x_k})\subset U.$$

所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 由 Urysohn 度量化定理 (定理 4.3.1) 得证. 证完.

定理 7.1.4 (Bing 度量化准则 [46]) 集态正规的可展空间可度量化.

证明 由引理 4.4.6 及 Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6) 知可展的 T_2 仿紧空间可度量化. 再由定理 7.1.1 及定理 6.1.8 得证. 证完.

上述定理是 Bing[46] 为了解决 1937 年 Jones[215] 提出的**正规 Moore 空间猜测** (正规 Moore 空间是可度量化空间) 而获得的. 这一著名的猜测已被证明在常用的公理体系 ZFC (Zermelo-Fraenkel 集论公理 + 选择公理) 中是不可判定的.

作为可展空间的推广有拟可展空间.

定义 7.1.2 [41] 空间 X 称为**拟可展空间** (quasi-developable space), 如果存在开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使对于 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 上述开集族序列称为 X 的**拟展开** (quasi-development).

定理 7.1.5 [43] 空间 X 是可展空间当且仅当 X 是拟可展的完备空间.

证明 必要性见定义 7.1.2 和定理 7.1.1. 下证充分性. 设 X 是拟可展的完备空间. 存在开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.1.2, 记 $\mathscr{U}_n^*=\cup\{U:U\in\mathscr{U}_n\}$, 那么 $\mathscr{U}_n^*$ 是开集, 因 X 是完备的, 置 $\mathscr{U}_n^*=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}F_{n,m}$, $F_{n,m}$ 是闭集. 再置

$$\mathscr{V}_{n,m}=\mathscr{U}_n\cup\{X-F_{n,m}\}\ \ (n,\ m\in\mathbb{N}).$$

显然, $\mathscr{V}_{n,m}$ 是开覆盖. 下证 $\{\mathscr{V}_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是 X 的展开. 对 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$, 于是 $x\in\mathscr{U}_n^*=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}F_{n,m}$, 从而 $x\in$ 某 $F_{n,m}\Rightarrow x\notin$ 某 $X-F_{n,m}$, 所以存在 $n,m\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_{n,m})=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 证完.

定理 7.1.6 [45] 拟可展空间是遗传弱 θ 加细空间.

证明 易知, 拟可展空间具有遗传性, 只要证明拟可展空间是弱 θ 加细的. 设 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的一个拟展开. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 使 $\mathscr{U}$ 良序化, 记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha<\Lambda\}$, 这里 Λ 是某序数. 对每一 $\alpha<\Lambda$, $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned}P(\alpha,n)&=\{x\in X:x\in U_\alpha-\cup\{U_\beta:\beta<\alpha\}\ \text{且}\ x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U_\alpha\},\\ \mathscr{P}_n&=\{P(\alpha,n):\alpha<\Lambda\},\end{aligned}$$

则 $\mathscr{P}=\cup\{\mathscr{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 X 且加细 $\mathscr{U}$. 考察 X 的子空间 $\cup\mathscr{P}_n$. 对 $x\in\cup\mathscr{P}_n$, 取最小的 α 使 $x\in P(\alpha,n)$, 易知 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$ 是 x 的邻域正好与 $\mathscr{P}_n$ 中一个元 (即 $P(\alpha,n)$) 相交, 所以 $\mathscr{P}_n$ 关于子空间 $\cup\mathscr{P}_n$ 是离散的, 由定理 6.1.5 的 (iii) 知 X 是弱 θ 加细的. 证完.

定义 7.1.3 [416] 空间 X 称为具有 ***θ* 基** (θ-base) $\mathscr{B}$, 如果 $\mathscr{B}$ 的每一元是 X 的开集, $\mathscr{B}=\cup\{\mathscr{B}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 且对 X 的每一开集 U 及点 $x\in U$, 存在 $n_x\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_{n_x})<\infty$ 且有某 $B\in\mathscr{B}_{n_x}$ 满足 $x\in B\subset U$.

显然, 具有 θ 基的空间是遗传弱 θ 加细的, 但未必是 θ 加细的 (见习题 6.4 和习题 7.4 中 Bennett 和 Lutzer 的例).

定理 7.1.7 [45] 空间 X 是拟可展空间当且仅当 X 具有 θ 基.

证明 设 X 是拟可展空间, $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的拟展开. 由定理 7.1.6, X 是遗传弱 θ 加细的, 所以 X 的子空间 $\cup\mathscr{G}_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 是弱 θ 加细的, 于是开集族 $\mathscr{G}_n$ (覆盖 $\cup\mathscr{G}_n$) 具有弱 θ 加细 $\{\mathscr{B}_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, 则 $\mathscr{B}_{n,m}$ 是 X 的开集族. 下证 $\{\mathscr{B}_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 θ 基.

对 X 的开集 U 及 $x\in U$, 因 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的拟展开, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U$. 因 $\{\mathscr{B}_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{G}_n$ 的弱 θ 加细, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 $1\leqslant\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_{n,m})<\infty$, 而 $\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_{n,m})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U$. 所以 $\{\mathscr{B}_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的 θ 基.

设 X 具有 θ 基 $\mathscr{B}=\cup\{\mathscr{B}_n:n\in\mathbb{N}\}$. 对 $n,\ k\in\mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned}&X(n,k)=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)=k\},\\&G(x,n,k)=\cap\{B\in\mathscr{B}_n:x\in B\},\quad x\in X(n,k),\\&\mathscr{G}_{n,k}=\{G(x,n,k):x\in X(n,k)\},\end{aligned}$$

则 $\mathscr{G}_{n,k}$ 中的元 $G(x,n,k)$ 是包含 x 的开集. 下证 $\{\mathscr{G}_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个拟展开.

对 X 的开集 U 及 $x\in U$, 因 $\mathscr{B}$ 是 θ 基, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)<\infty$, 且有某 $B\in\mathscr{B}_n$ 使 $x\in B\subset U$, 设 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)=k$, 即 $x\in X(n,k)$. 注意, 开集族 $\mathscr{G}_{n,k}$ 中只有一个集 $G(x,n,k)$ 包含点 x, 所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_{n,k})=G(x,n,k)\subset B\subset U$, 故 $\{\mathscr{G}_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是 X 的拟展开. 证完.

由定理 7.1.5 得下述推论.

推论 7.1.1 [416] 空间 X 是可展空间当且仅当 X 是具有 θ 基的完备空间.

7.2 wΔ 空间、M 空间与 p 空间

作为可展空间的另一个推广有 wΔ 空间.

定义 7.2.1 [55] 空间 X 称为 **wΔ 空间** (wΔ-space), 如果存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 如果对某 $x\in X$, $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ $(n\in\mathbb{N})$, 则序列 $\{x_n\}$ 有聚点. 上述序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 **wΔ 序列** (wΔ-sequence).

注记 上述定义中的聚点未必就是 x, 如果要求这聚点就是 x, 则容易验证 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的邻域基 (习题 7.5). 这样又得到可展空间 (定义 4.4.1), 所以可展空间是 wΔ 空间. 此外, 易知可数紧空间也是 wΔ 空间.

Morita[305] 引入 M 空间.

定义 7.2.2 [305] 空间 X 称为 **M 空间** (M-space), 如果存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足下列条件:

(i) $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n(n\in\mathbb{N})$;

(ii) 如果对某 $x\in X$, $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ $(n\in\mathbb{N})$, 则序列 $\{x_n\}$ 有聚点.

上述序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 **M 序列** (M-sequence).

可数紧空间是 M 空间 (可让每一 $\mathscr{U}_n = \{X\}$). 按上述定义中的 (ii) 就是 wΔ 空间的定义 (定义 7.2.1), 所以 M 空间是 wΔ 空间. 把 M 空间的条件与 Alexandroff-Urysohn 度量化定理的条件比较, 它们的差别正是 wΔ 空间与可展空间的差别. 形如 M 空间或 wΔ 空间以适当的序列存在聚点的方式定义的空间类常统称为**广义可数紧空间** (generalized countably compact space[198]).

引理 7.2.1 (Frink 引理 [126]) 设映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$ (非负实数集) 满足:

$$\text{对每一 } \varepsilon>0, \text{如果 } d(x,y)<\varepsilon,\ d(y,z)<\varepsilon,\ \text{则 } d(x,z)<2\varepsilon. \tag{7.2.1}$$

则存在映射 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}^+$ 使对所有 $x,y,z\in X$, 有

(i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

(ii) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

如果要求 d 是对称的 (即 $d(x,y)=d(y,x)$), 则 ρ 也是对称的.

证明 定义 ρ 如下:

$$\rho(a,b)=\inf\Big\{\sum_{i=0}^{n-1}d(x_i,x_{i+1}): n\in\mathbb{N},\ x_i\in X,\ x_0=a,\ x_n=b\Big\}.$$

显然, ρ 满足 (i) 且 $\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

为了完成证明, 只要证对每一组 $a,b,x_1,\cdots,x_n\in X$, 式 (7.2.2) 成立:

$$d(a,b)\leqslant 2d(a,x_1)+4\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_{i+1})+2d(x_n,b). \tag{7.2.2}$$

在 $n=1$ 时, 令 $\max\{d(a,x_1),\ d(x_1,b)\}=\varepsilon$. 由 (7.2.1),

$$d(a,b)\leqslant 2d(a,x_1)\ \text{或}\ d(a,b)\leqslant 2d(x_1,b),$$

所以 (7.2.2) 式成立. 下用归纳法证. 设 (7.2.2) 式对所有小于 n 的正整数成立. 设 $a,b,x_1,\cdots,x_n\in X$, 由 (7.2.1) 对任一 x_i 有 $d(a,b)\leqslant 2d(a,x_i)$ 或 $d(a,b)\leqslant 2d(x_i,b)$. 不妨设 k 是最小正整数使 $d(a,b)\leqslant 2d(a,x_k)$. 当 $k=1$ 时, (7.2.2) 式显然得证. 当 $k>1$ 时, 这时 $d(a,b)\nleqslant 2d(a,x_{k-1})$, 从而 $d(a,b)\leqslant 2d(x_{k-1},b)$, 故有

$$d(a,b)\leqslant d(a,x_k)+d(x_{k-1},b).$$

分别用归纳法假设于 $d(a,x_k)$ 及 $d(x_{k-1},b)$, 即得 (7.2.2) 式. 证完.

引理 7.2.2 [69] 设空间 X 存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$ ($n\in\mathbb{N}$), 则 X 上存在伪度量 ρ 满足:

(i) $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$;

(ii) U 是由伪度量 ρ 导出拓扑中的开集当且仅当对每一 $x\in U$ 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$.

证明　先在 X 上定义 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+$, 使

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n),\\ 1/2^n, & n=\min\{i\in\mathbb{N}: y\notin\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_i)\}.\end{cases}$$

设 $d(x,y)<1/2^{n+1}$, $d(y,z)<1/2^{n+1}$, 则 $y\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1})$, $z\in\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_{n+1})$. 从而

$$z\in\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1}),\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n),$$

所以 $d(x,z)<1/2^n$, d 满足引理 7.2.1 的 (7.2.1). 从而存在 X 上的伪度量 ρ, 由 d 的定义及引理 7.2.1 的 (ii) 得到这里的 (i). 此外, 由引理 7.2.1 的 (ii), 对每一 $x\in X$,

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+2})=S'_{1/2^{n+2}}(x)\subset S_{1/2^{n+2}}(x)\subset S'_{1/2^n}(x)=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n),\tag{7.2.3}$$

这里 $S_\varepsilon(x)=\{y\in X:\rho(x,y)<\varepsilon\}$, $S'_\varepsilon(x)=\{y\in X: d(x,y)<\varepsilon\}$. 这说明, 由 ρ 导出的拓扑正是以 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为点 x 的邻域基形成的拓扑. 到此证明了这里的 (ii). 证完.

引理 7.2.3　设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的 M 序列, 对 $x\in X$, 令 $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 则 C 是 X 的闭可数紧子集, 且 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 C 在 X 中的邻域基 (即对开集 $U\supset C$, 存在某 $n\in\mathbb{N}$ 使 $U\supset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$).

证明　由于 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1}),\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 所以 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1})}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 从而 $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$ 是 X 的闭集. 由定义 7.2.2 的 (ii), C 中的每一序列有聚点. 再由定理 3.5.2, C 是可数紧的. 如果引理不能成立, 存在开集 $V\supset C$ 及点 $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)-V(n\in\mathbb{N})$. 姑设序列 $\{x_n\}$ 有聚点 x', 由于 $x'\in\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}(n\in\mathbb{N})$, 于是 $x'\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset V$, 这不可能. 所以 $\{x_n\}$ 无聚点, 这与 M 空间的定义矛盾. 证完.

注意, 引理 7.2.2 中的 ρ 只能是伪度量, 因为 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 未必是单点集. 如果我们引入等价关系 R 使集 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 等同于一点 $[x]$, 所得到的商空间 Y 将是度量空间. 此外, 比较引理 7.2.3 的结果与 Alexandroff-Urysohn 度量化定理的条件 (ii), 同样启发我们尝试把 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 等同于一点.

定理 7.2.1 (Morita 定理 [305])　空间 X 是 M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的拟完备映射 f.

证明　设 X 是 M 空间, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 M 序列. 由引理 7.2.2 存在 X 上的伪度量 ρ 满足:

(i) $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$;

(ii) U 是由伪度量 ρ 导出拓扑中的开集当且仅当对每一 $x\in U$ 存在 $n\in\mathbb{N}$, 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$.

在 X 上定义等价关系 R 如下: xRy 当且仅当 $\rho(x,y)=0$. 置商集 $Y=X/R$ 及自然映射 $f:X\to Y$, 定义 $\rho':Y\times Y\to\mathbb{R}^+$, 使 $\rho'([x],[y])=\rho(x,y)$, 这里 $[x]$ 是对应着 x 的商集 Y 中的点. 容易验证, ρ' 的定义与代表元的选取无关且 ρ' 是集 Y 上的度量. 先证明 Y 上的商拓扑 $\mathscr{T}_R$ 与度量拓扑 $\mathscr{T}'$ 是一致的.

记 X 上的拓扑为 $\mathscr{T}$. 对于每一 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$, 记

$$S_\varepsilon(x)=\{y\in X:\rho(x,y)<\varepsilon\},S'_\varepsilon([x])=\{[y]\in Y:\rho'([x],[y])<\varepsilon\},$$

因为 $f^{-1}(S'_\varepsilon([x]))=S_\varepsilon(x)\in\mathscr{T}$, 所以 $S'_\varepsilon([x])\in\mathscr{T}_R$, 于是 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}_R$. 再设 $V\in\mathscr{T}_R$, 那么 $f^{-1}(V)\in\mathscr{T}$, 对于每一 $[x]\in V$, 在 X 中有 $[x]\subset f^{-1}(V)$, 由 (i) 和引理 7.2.3, $[x]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的可数紧的闭子集, 且存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset f^{-1}(V)$, 从而 $S_{1/2^{n+2}}(x)\subset f^{-1}(V)$ [引理 7.2.2 的 (7.2.3) 式], 故 $S'_{1/2^{n+2}}([x])\subset V$, 所以 $V\in\mathscr{T}'$. 因此 $\mathscr{T}_R=\mathscr{T}'$.

现证商映射 $f:X\to Y$ 是拟完备的. 对于每一 $[x]\in Y$,

$$f^{-1}([x])=\{y\in X:\rho(x,y)=0\}=[x]$$

是可数紧的. 下证 f 是闭的. 设 $H\subset X$ 是闭集, 由于 f 是商映射, 只要证明 $f^{-1}(f(H))$ 是闭集. 设 $x\notin f^{-1}(f(H))$, 则 $f^{-1}(f(x))\cap H=\varnothing$, 即 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\cap H=\varnothing$. 由引理 7.2.3, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap H=\varnothing$. 下证 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1})\cap f^{-1}(f(H))=\varnothing$, 从而 $f^{-1}(f(H))$ 是闭集得证. 对每一 $x'\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1})$, $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_{m+1})\subset\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1}),\mathscr{U}_{m+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_m)$, 故 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_{m+1})\cap H=\varnothing$. 从而 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_n)\cap H=\varnothing$, 即 $f^{-1}(f(x'))\cap H=\varnothing$. 故 $x'\notin f^{-1}(f(H))$. 所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{m+1})\cap f^{-1}(f(H))=\varnothing$. 到此证明了 f 是拟完备映射.

反之, 设 f 是空间 X 到度量空间 Y 上的拟完备映射. 由 Alexandroff-Urysohn 度量化定理, 空间 Y 存在一展开 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$ $(n\in\mathbb{N})$. 置 $\mathscr{G}_n=\{f^{-1}(U):U\in\mathscr{U}_n\}$, 容易验证 $\mathscr{G}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{G}_n$. 设对某 $x\in X$, $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)(n\in\mathbb{N})$, 要证 $\{x_n\}$ 有聚点, 从而 X 是 M 空间.

由 $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$ 知 $f(x_n)\in\mathrm{st}(f(x),\mathscr{U}_n)$, 因为 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的展开, 所以在 Y 中 $f(x_n)\to f(x)$. 令 $C=\{f(x)\}\cup\{f(x_n):n\in\mathbb{N}\}$, 则 C 是 Y 的紧子集, 从而是可数紧子集, 由于 f 是拟完备映射, 于是 $f^{-1}(C)$ 是 X 的可数紧子集 (拟完备映射逆保持可数紧性, 习题 3.31, 参考定理 5.6.6 的证明). 因为每一 $x_n\in f^{-1}(C)$ $(n\in\mathbb{N})$, 所以 $\{x_n\}$ 有聚点. 故 X 是 M 空间. 证完.

推论 7.2.1 空间 X 是 iso 紧的 M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的完备映射.

证明 由于 iso 紧性使可数紧闭子集成为紧集 (定义 6.6.1), 而完备映射逆保持 iso 紧性 (定理 6.6.4), 由定理 7.2.1 得证. 证完.

由推论 7.2.1 更有下述结果.

推论 7.2.2[305] 空间 X 是仿紧 M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的完备映射.

证明 仿紧空间是 iso 紧的且完备映射逆保持仿紧性 (推论 5.2.4). 证完.

注记 由上述两推论知, iso 紧的 M 空间是仿紧空间.

定理 7.2.1 和推论 7.2.2 分别用度量空间在拟完备、完备映射的逆像刻画 M 空间、仿紧 M 空间是 M 空间的重要结果. 另一重要结果是下面的定理 7.2.2, 是关于可数积方面的, 其实定理 7.2.2 也是定理 7.2.1 的推论.

引理 7.2.4[127] 设有一族空间 $\{X_s\}_{s\in S}$, A_s 是 X_s 的紧子集, W 是积空间 $\prod_{s\in S}X_s$ 中的开集, 且 $W\supset\prod_{s\in S}A_s$, 则存在开集 $U_s\subset X_s$, 使 $U_s\neq X_s$ 仅对有限个 s 成立, 且 $\prod_{s\in S}A_s\subset\prod_{s\in S}U_s\subset W$.

证明 这是习题 3.32 在任意多个空间的积的情况的推广. 设

$$A=\prod_{s\in S}A_s\subset W\subset\prod_{s\in S}X_s,$$

则 A 是积空间 $\prod_{s\in S}X_s$ 的紧集. 对每一点 $a\in A$, 取积空间的基中的元 $\prod_{s\in S}W_s$ 使 $a\in\prod_{s\in S}W_s\subset W$ (这里 W_s 仅对有限个 s, $W_s\neq X_s$). 因 A 是紧集, A 为有限个这种元素所覆盖. 记作

$$A\subset\prod_{s\in S}W_s^1\cup\prod_{s\in S}W_s^2\cup\cdots\cup\prod_{s\in S}W_s^k\subset W.$$

存在有限集 $S_0=\{s_1,s_2,\cdots,s_l\}\subset S$ 使 $W_s^i=X_s(i=1,2,\cdots,k)$ 对 $s\in S-S_0$ 成立. 设

$$W_1=\bigcup_{i=1}^{k}\Big(\prod_{s\in S_0}W_s^i\Big),\quad W_2=\prod_{s\in S-S_0}X_s,$$

则有

$$\prod_{s\in S_0}A_s\times\Big(\prod_{s\in S-S_0}A_s\Big)\subset W_1\times W_2\subset W.$$

由习题 3.32 (有限积情况), 存在开集 $U_s\subset X_s$ $(s\in S_0)$ 使

$$\prod_{s\in S_0}A_s\subset\prod_{s\in S_0}U_s\subset W_1.$$

对 $s\in S-S_0$, 取 $U_s=X_s$, 那么 $\prod_{s\in S}A_s=\prod_{s\in S}U_s\subset W$. 证完.

设有两族空间 $\{X_s\}_{s\in S}$, $\{Y_s\}_{s\in S}$ 及一族映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 使 $f_s: X_s \to Y_s$. 称映射 $f: \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S} Y_s$ 是映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 的**积** (product of mapping family, 记作 $f = \prod_{s\in S} f_s$), 如果 f 使 $\prod_{s\in S} X_s$ 中的点 $\{x_s\}_{s\in S}$ 对应 $\prod_{s\in S} Y_s$ 中的点 $\{f_s(x_s)\}_{s\in S}$.

引理 7.2.5[127] 一族完备映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 的积 $f = \prod_{s\in S} f_s$ 是完备映射.

证明 设 $f_s: X_s \to Y_s$ $(s \in S)$ 是完备映射. 对每一 $y = \{y_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Y_s$, $f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$ 显然是紧的. 利用积空间中基的构成, 易验证 f 是连续的. 还要证 f 是闭映射.

对每一 $y = \{y_s\}_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Y_s$ 及 $\prod_{s\in S} X_s$ 中开集

$$U \supset f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s),$$

由引理 7.2.4, 存在开集 $U_s \subset X_s$ 使 $U_s \neq X_s$ 仅对 S 的有限子集 S_0 中的元 s 成立, 且满足 $U \supset \prod_{s\in S} U_s \supset \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$. 设 $S_0 = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$. 对每一 $i \leqslant k$, 由于 f_{s_i} 是闭映射, $U_{s_i} \supset f_{s_i}^{-1}(y_{s_i})$, 由推论 1.5.1, 存在开集 U'_{s_i} 使

$$U_{s_i} \supset U'_{s_i} \supset f_{s_i}^{-1}(y_{s_i}), \quad U'_{s_i} = f_{s_i}^{-1}(f_{s_i}(U'_{s_i})) \text{ 且 } f_{s_i}(U'_{s_i}) \text{ 开于 } Y_{s_i}.$$

从而 $\prod_{s\in S} U_s \supset \prod_{s\in S} U'_s \supset \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$, 这里对 $s \in S - S_0$ 取 $U'_s = X_s$, 置 $U' = \prod_{s\in S} U'_s$, 则 U' 开,

$$U \supset U' \supset f^{-1}(y), \quad U' = f^{-1}(f(U')) \text{ 且 } f(U') \text{ 开于 } Y.$$

由推论 1.5.1 知, f 是闭映射. 证完.

定理 7.2.2[305] 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列仿紧 M 空间, 则积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 是仿紧 M 空间.

证明 对每一 X_i $(i \in \mathbb{N})$, 由推论 7.2.2, 存在度量空间 Y_i 及由 X_i 到 Y_i 上的完备映射 f_i. 由引理 7.2.5, $\prod_{i\in\mathbb{N}} f_i : \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ 是完备映射, 而 $\prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ 是度量空间 (定理 4.1.10), 再由推论 7.2.2 得证. 证完.

按两个仿紧空间的积未必是仿紧空间 (例 2.3.3 和例 2.3.4), Isiwata[203] 给出两个完全正则的 M 空间的积不是 M 空间, 所以定理 7.2.2 显得非常奇妙.

关于**仿紧空间的可数积的保持问题**的研究是由覆盖性质导向广义度量空间的一个途径. 这一问题可归结为找出这样的拓扑空间类 $\mathscr{P}$ (尽可能广泛些), 使 $\mathscr{P}$ 中仿紧元素序列的积是仿紧的. 对类 $\mathscr{P}$ 来说也要求关于通常的拓扑运算是封闭的.

1960 年, Frolík[127] 成功地把类 $\mathscr{P}$ 取为所有 **Čech 完全空间** (Čech-complete space[79]). 完全正则空间 X 称为 Čech 完全空间, 如 X 是它的 Stone-Čech 紧化 βX 中的 G_δ 集. 按 Čech 完全空间类关于可数积是封闭的 (习题 7.9). 1963 年,

Arhangel'skiĭ[18] 推广了 Frolík 的结果, 把 $\mathscr{P}$ 取为所有 p 空间, 这 p 空间类也关于可数积是封闭的 (定理 7.2.3).

定义 7.2.3[18]　完全正则空间 X 称为 ***p* 空间** (p-space), 如果存在 βX 中的开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(i) 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 X;

(ii) 对每一 $x\in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset X$;

如果还满足:

(iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$,

则称 X 为**严格 *p* 空间** (strict p-space).

按 T_2 局部紧空间 X 是它的 Stone-Čech 紧化 βX 中的开集 (引理 3.6.1), 显然, T_2 局部紧空间是 Čech 完全空间, 而 Čech 完全空间是 p 空间, 这是因为 Čech 完全空间 $X=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, U_n 开于 βX, 定义 7.2.3 中的 $\mathscr{U}_n$ 可取为单元素集族 $\{U_n\}$.

注记 1　定义 7.2.3 中的 Stone-Čech 紧化 βX 可用任一紧化 αX 代替, 因为如果 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 关于 αX 情况下的所有条件, 由定理 3.6.4, 存在映射 $f:\beta X\to\alpha X$, 使 $f|_X$ 是恒等映射. 容易验证 $f^{-1}(\mathscr{U}_n)=\{f^{-1}(U):U\in\mathscr{U}_n\}$ 满足定义 7.2.3 关于 βX 情况的相同条件. 由此可使下述定理 7.2.3 容易得证.

注记 2　可设 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$ ($n\in\mathbb{N}$), 因为可用 $\mathscr{U}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{U}_n$ 代替 $\mathscr{U}_n$ (符号 "$\mathscr{U}\wedge\mathscr{V}$" 表示集族 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 的交, 即 $\mathscr{U}\wedge\mathscr{V}=\{U\cap V:U\in\mathscr{U},V\in\mathscr{V}\}$).

定理 7.2.3[18]　设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列 p 空间, 则积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 是 p 空间.

证明　对每一 X_i, 设 $\{\mathscr{U}_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 βX_i 中的开集族序列, 满足定义 7.2.3 的 (i), (ii). 下面对积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 构造 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\beta X_i$ 中的开集族序列:

$$\mathscr{U}_1=\Big\{U_1\times\prod_{i>1}\beta X_i:U_1\in\mathscr{U}_{1,1}\Big\},$$

$$\mathscr{U}_2=\Big\{U_1\times U_2\times\prod_{i>2}\beta X_i:U_1\in\mathscr{U}_{1,2},\ U_2\in\mathscr{U}_{2,2}\Big\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathscr{U}_n=\Big\{\prod_{i\leqslant n}U_i\times\prod_{i>n}\beta X_i:U_i\in\mathscr{U}_{i,n},\ i\leqslant n\Big\}.$$

由上述注记 1, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 的 (i), (ii). 证完.

下面定理 7.2.4 是严格 p 空间的有效刻画.

定理 7.2.4[77]　完全正则空间 X 是严格 p 空间当且仅当存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(i) 对每一 $x\in X$, $P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$ 是紧集;

(ii) $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 P_x 的邻域基.

证明 设 X 是严格 p 空间, 存在 βX 中的开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 的 (i)~(iii), 由这定义的注记 2, 可设为 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$ ($n\in\mathbb{N}$).

$$P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)}$$

是紧空间 βX 的闭集且包含在 X 内, 所以 P_x 是 X 的紧集, 置

$$\mathscr{G}_n=\{U\cap X:U\in\mathscr{U}_n\},$$

显然, $P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)$. 下证 $\{\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 P_x 的邻域基.

设 X 中的开集 $U\supset P_x$, 如果存在 $x_n\in\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)-U$ ($n\in\mathbb{N}$), 则序列 $\{x_n\}$ 在 βX 中有聚点, 设为 x', 那么 $x'\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)}=P_x\subset U$, 从而无限项 $x_n\in U$, 矛盾. 所以存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U$, 故 $\{\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 P_x 的邻域基.

反之, 设 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的开覆盖序列, 满足本定理的 (i) 及 (ii), 置

$$\mathscr{U}_n=\{U:U\text{ 是 }\beta X\text{ 的开集且 }U\cap X\in\mathscr{G}_n\},$$

则 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 βX 中的开集族序列. 显然, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 的 (i). 下证它满足定义 7.2.3 的 (ii), (iii), 从而 X 是严格 p 空间.

$P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_n)$ 是紧集, 从而是 βX 中的闭集. 对任一 $y\in\beta X-X$, 由于 $P_x\subset X$, 所以 $\beta X-\{y\}$ 是含 P_x 的开集. 因为 βX 的正规性, 存在 βX 中开集 O 使

$$P_x\subset O\subset\overline{O}\subset\beta X-\{y\},\tag{7.2.4}$$

这里 $\overline{O}$ 是 O 关于 βX 的闭包. 由 (7.2.4), $P_x\subset O\cap X$. 因为 $O\cap X$ 是 X 中的开集, 由本定理的 (ii), 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使

$$P_x\subset\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_m)\subset O\cap X\subset\overline{O}\cap X,$$

又因 $\operatorname{st}(x,\mathscr{G}_m)=\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap X$, 所以 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)\cap X\subset\overline{O}\cap X$. 这说明 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)$ 中包含于 X 中的部分包含在 $\overline{O}$ 内, 于是 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)-\overline{O}\subset\beta X-X$. 由于 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)-\overline{O}$ 是 βX 中开集, 且 βX 中不空的开集必与 X 相交, 所以 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)-\overline{O}=\varnothing$. 从而 $\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)\subset\overline{O}\subset\beta X-\{y\}$ (由 (7.2.4)). 由于 y 是 $\beta X-X$ 中的任意点, 从而 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset X$, 满足定义 7.2.3 的 (ii). 此外, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 与 (7.2.4) 式类似, 存在 βX 中开集 O 和 $m\in\mathbb{N}$ 使

$$P_x\subset\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)\subset O\subset\overline{O}\subset\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n),\tag{7.2.5}$$

则 $\overline{\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_m)}\subset\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 从而 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\operatorname{st}(x,\mathscr{U}_n)}$, 满足定义 7.2.3 的 (iii). 证完.

推论 7.2.3 (a) 完全正则的可展空间是严格 p 空间 [77].

(b) 严格 p 空间是 wΔ 空间 [62].

证明 (a) 在 T_1 可展空间, $P_x=\{x\}$, 显然满足定理 7.2.4 的 (i), (ii).

(b) 如对某 $x, x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$, 不妨设 $\mathscr{G}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{G}_n$ $(n\in\mathbb{N})$ (定义 7.2.3 的注记 2), 则 $\bigcap_{k=1}^n \mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)=\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\supset\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$, 由于 $P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$ 紧, 易知 $\{x_n\}$ 有聚点属于 P_x. 证完.

引理 7.2.6[236] 设 X 是正则空间, $Y\subset X$ 是 θ 加细子空间, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的开集族序列, 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 Y. 则存在空间 X 的开集族序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使每一 $\mathscr{V}_n$ 覆盖 Y 且对每一 $y\in Y$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n).$$

证明 如 $\mathscr{U}$ 是 X 的子集族, 记 $\mathscr{U}|Y=\{U\cap Y: U\in\mathscr{U}\}$. 下面利用 Y 的 θ 加细性及 X 的正则性, 对每一 $m\in\mathbb{N}$, 归纳地定义 X 的开集族序列 $\{\mathscr{V}_{m,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使每一 $\mathscr{V}_{m,n}$ 覆盖 Y 并满足下述 (i), (ii).

$\mathscr{U}_1$ 具有关于 Y 的 θ 加细序列 $\{\mathscr{V}_{1,n}|Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathscr{V}_{1,n}$ 是 X 中的开集族覆盖 Y), 使 $\mathscr{V}_{1,n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 中元的闭包包含在 $\mathscr{U}_1$ 的某元中.

$\mathscr{U}_2\wedge\mathscr{V}_{1,1}$ 具有关于 Y 的 θ 加细序列 $\{\mathscr{V}_{2,n}|Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathscr{V}_{2,n}$ 是 X 中的开集族覆盖 Y), 使 $\mathscr{V}_{2,n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 中元的闭包包含在 $\mathscr{V}_{1,1}$ 的某元中及 $\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2$ 的某元中.

$\mathscr{U}_3\wedge(\bigwedge_{i,j<3}\mathscr{V}_{i,j})$ 具有关于 Y 的 θ 加细序列 $\{\mathscr{V}_{3,n}|Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathscr{V}_{3,n}$ 是 X 中的开集族覆盖 Y), 使 $\mathscr{V}_{3,n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 中元的闭包包含在 $\mathscr{V}_{i,j}$ $(i,j<3)$ 的某元中及 $\mathscr{U}_k$ $(k\leqslant 3)$ 的某元中.

继续下去, 可得到

(i) $\{\mathscr{V}_{m,n}|Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是每一 $\mathscr{V}_{i,j}|Y$ $(i,j<m)$ 及每一 $\mathscr{U}_k|Y$ $(k\leqslant m)$ 的 θ 加细序列;

(ii) 对每一 $V\in\mathscr{V}_{m,n}$, 存在 $W\in\mathscr{V}_{i,j}$ $(i,j<m)$ 使 $\overline{V}\subset W$ 及存在 $U_k\in\mathscr{U}_k$ $(k\leqslant m)$ 使 $\overline{V}\subset U_k$.

设 $x\in\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}$, 这里 $y\in Y$, 固定某 i,j, 让 $m>\max\{i,j\}$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 y 仅属于 $\mathscr{V}_{m,n}$ 中有限个元, 则 $\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{m,n})}=\cup\{\overline{V}: y\in V\in\mathscr{V}_{m,n}\}$, 由 (ii),

$$\cup\{\overline{V}: y\in V\in\mathscr{V}_{m,n}\}\subset\cup\{W: y\in W\in\mathscr{V}_{i,j}\}=\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j}).$$

而 $x\in\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}\Rightarrow x\in\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{m,n})}\subset\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$, 所以对每一对 $i,j\in\mathbb{N}$, 有 $x\in\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$, 即 $x\in\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$. 从而 $\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}=\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$.

由 (ii), 显然 $\bigcap_{i,j\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n)$, 把可数个集族 $\{\mathscr{V}_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ 重新编号为 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 则引理得证. 证完.

定理 7.2.5[62] 对完全正则的 θ 加细空间 X, 下列论断等价:

(i) X 是严格 p 空间;

(ii) X 是 p 空间;

(iii) X 是 wΔ 空间.

证明 只要证明 (ii) $\Rightarrow$ (i) 及 (iii) $\Rightarrow$ (i). 现证 (ii) $\Rightarrow$ (i). 设 X 是 θ 加细的 p 空间, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 的 (i), (ii). 由引理 7.2.6 可构造 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对每一 $x\in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 则 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 7.2.3 的 (i)~(iii), X 是严格 p 空间.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 θ 加细空间 X 的 wΔ 序列, 同样由引理 7.2.6 构造开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如上, 由引理 7.2.3 的证明知 $P_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)$ 是可数紧的闭子集, 且 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定理 7.2.4 的 (ii), 因 θ 加细性是 iso 紧的 (定理 6.6.1), 故 P_x 是紧集, 满足定理 7.2.4 的 (i), 故 X 是严格 p 空间. 证完.

推论 7.2.4 下列论断等价:

(i) X 是仿紧 p 空间;

(ii) X 是 T_2 仿紧 wΔ 空间;

(iii) X 是 T_2 仿紧 M 空间.

证明 只需证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii), 其余来自定理 7.2.5. 设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 T_2 仿紧 wΔ 空间 X 的 wΔ 序列, 由 X 的仿紧性, 存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使每一 $\mathscr{V}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{V}_n\wedge\mathscr{U}_n$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 M 序列. 证完.

由推论 7.2.2 得以下推论.

推论 7.2.5[18] T_2 空间 X 是仿紧 p 空间当且仅当 X 是某一度量空间在某一完备映射下的逆像.

更结合定理 7.2.2 有下述定理.

定理 7.2.6[18] 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列仿紧 p 空间, 则积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i$ 是仿紧 p 空间.

定理 7.2.5 证明了每一 θ 加细的 p 空间是严格 p 空间. 是否每一严格 p 空间是 θ 加细空间? 这是著名的**严格 p 空间问题** (strict p-space problem), 这一问题由 Chaber 和 Junnila[88] 明确提出, 而实质上 Burke[63] 于 1972 年已提出了. 此问题的答案如果肯定的话, 严格 p 空间可得一漂亮的刻画 (推论 7.2.6). 不仅如此, 由 Kullman[236] 证明的 "完全正则空间 X 是可展的当且仅当 X 是 θ 加细的 p 空间且具有 G_δ 对角线" 及 Worrell 证明的 (见文献 [66] 的表 1 或文献 [104] 的定理 1.8) "完备映射保持 θ 加细的 p 空间", 分别可得下述推论 7.2.7 及推论 7.2.8. 所以此问题的解决显得非常重要, 特别期待着正面的答案. 关于此问题的详细叙述见文献 [104]. 有趣的是, 正当 Davis 论文发表时, 此问题已被我国学者江守礼 [213] 正面解决. 这是 20 世纪后 25 年我国学者在覆盖性质与广义度量空间方面的最好结果, 也

是国际上这方面的最好结果之一 (见文献 [168], [222] 和 [71]). 限于篇幅, 这里不转录江守礼的证明, 仅叙述结果.

定理 7.2.7 (江守礼定理 [213]) 严格 p 空间是 θ 加细空间.

由定理 7.2.5, 有下述推论.

推论 7.2.6 空间 X 是严格 p 空间当且仅当 X 是 θ 加细的 p 空间.

由上述 Kullman[236] 的结果, 有下述推论.

推论 7.2.7 完全正则空间 X 是可展空间当且仅当 X 是严格 p 空间且具有 G_δ 对角线.

由上述 Worrell 的结果, 有下述推论.

推论 7.2.8 完备映射保持严格 p 空间.

M 空间与 p 空间的性质有些类似, 对比如下:

M 空间	p 空间
为拟完备映射的逆像保持 [306]	为完备映射的逆像保持 [18]
不能为完备映射保持 [306]	不能为完备映射保持 [84]
附加正规性能为拟完备映射保持 [200, 306]	附加 θ 加细性能为完备映射保持 [66]
附加正规性满足局部有限闭和定理 [381]	附加 θ 加细性满足局部有限闭和定理

M 空间与 p 空间是由不同方式定义的, 两者之间没有任何关系. Neimytzki 半平面 (例 2.2.3) 是 p 空间, 但不是 M 空间. 关于 M 空间不是 p 空间的例见文献 [166] 的例 3.23. 有趣的是, 在 T_2 仿紧空间情况两者等价 (推论 7.2.4). 两者对仿紧空间的可数积保持问题得到了相同的结论 (定理 7.2.2 和定理 7.2.6). 前面曾把此问题归结为找空间类 $\mathscr{P}$ 中的仿紧元素序列的积是仿紧的. 对类 $\mathscr{P}$ 说也要求对通常的拓扑运算封闭. Morita 取 $\mathscr{P}$ 为 M 空间类, Arhangel'skiĭ 取 $\mathscr{P}$ 为 p 空间类. p 空间类关于可数积封闭, M 空间类不然.

综上所述, 这两类空间的性质 (关于通常运算封闭) 未必良好. 在 7.3 节中将引入具有良好性质的空间类 (σ 空间类与 Σ 空间类), 更完善地解决仿紧空间的可积性问题.

7.3 σ 空间与 Σ 空间

7.1 节和 7.2 节中的广义度量空间是由 Alexandroff-Urysohn 度量化定理引入的. 下面将由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理引入更多的广义度量空间. 首先, 在本节中, 将减弱上述定理中的基的概念.

回忆 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6 和定理 4.3.7): 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且满足下列条件之一:

(i) 具有 σ 局部有限基;

(ii) 具有 σ 离散基.

3.1 节曾引入网络概念 (定义 3.1.2). 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{A}$ 称为此空间的网络, 如果对每一开集 U 及 $x \in U$, 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使 $x \in A \subset U$. 如果更设 $\mathscr{A}$ 是 σ 离散、σ 局部有限、σ 闭包保持的, 则分别称 X 具有 σ 离散网络、σ 局部有限网络、σ 闭包保持网络.

定义 7.3.1[324] 空间 X 称为 **σ 空间** (σ-space), 如果 X 具有 σ 局部有限网络.

上述定义无非是把 Nagata-Smirnov 定理中的 "基" 换为 "网络". 基的元素要求是开集, 网络没有这一要求. 当空间 X 是正则时, 则网络的元素可以设定为闭集, 这网络称为**闭网络** (closed network). 具有 σ 局部有限闭网络的空间显然是次仿紧的 (定理 6.1.1), 且容易验证这空间的开集是 F_σ 集, 所以有下述定理.

定理 7.3.1 正则 σ 空间是次仿紧的 [60], 且是完备的 [324].

不同于前面的 M 空间、p 空间, σ 空间具有良好的拓扑属性.

定理 7.3.2[324] σ 空间的任一子空间是 σ 空间 (即 σ 空间具有遗传性).

证明是直接的, 留给读者 (习题 7.14).

定理 7.3.3[324] 可数个 σ 空间的积是 σ 空间.

证明 设 $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, 每一 X_n ($n \in \mathbb{N}$) 是 σ 空间, 具有 σ 局部有限网络 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_m^n$, 每一 $\mathscr{A}_m^n$ 是局部有限的. 不失一般性, 可设对每一 n, $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A}_m^n \subset \mathscr{A}_{m+1}^n$, 置

$$\mathscr{A}_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} A^i \times \prod_{i>n} X_i : A^i \in \mathscr{A}_n^i, i \leqslant n \right\}.$$

容易验证, 每一 $\mathscr{A}_n$ 是 X 中的局部有限族, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_n$ 是空间 X 的 σ 局部有限网络, 所以 X 是 σ 空间. 证完.

定理 7.3.4[324] 可数个 σ 闭子空间的并是 σ 空间.

证明是直接的, 留给读者 (习题 7.14).

度量空间具有遗传性且可数个度量空间的积是度量空间 (定理 4.1.10), 具有相应于上述定理 7.3.2 及定理 7.3.3 的性质, 但不具有相应于定理 7.3.4 的性质, 见例 4.1.4, 但有下述推论.

推论 7.3.1 可数个可度量化闭子空间的并是 σ 空间.

证明 因度量空间是 σ 空间, 由定理 7.3.4 得证. 证完.

下面定理是 σ 空间的重要刻画.

定理 7.3.5 (Siwiec-Nagata 定理 [362])　对正则空间 X, 以下论断等价:

(i) X 具有 σ 闭包保持网络;

(ii) X 是 σ 空间 (即 X 具有 σ 局部有限网络);

(iii) X 具有 σ 离散网络.

证明　显然 (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), 下证 (i) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{A}_n$ 是 X 的网络, 每一 $\mathscr{A}_n$ 是闭包保持的, 因 X 是正则的, $\mathscr{A}$ 中元的闭包形成的集族仍是 X 的网络, 故可设 $\mathscr{A}_n$ 中的元是闭集. 记 $\mathscr{A}_n=\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$, 置

$$F_{\alpha,m}=\cup\{A\in\mathscr{A}_m:A\cap A_\alpha=\varnothing\}\quad(\alpha\in\Gamma_n;\ m\in\mathbb{N}).\tag{7.3.1}$$

$F_{\alpha,m}$ 是闭集. $\{A_\alpha,F_{\alpha,m}\}$ 是由两个不相交闭集形成的集族, 作这些集族的交, 记其为

$$\mathscr{H}_{n,m}=\bigwedge\{\{A_\alpha,F_{\alpha,m}\}:\alpha\in\Gamma_n\}.$$

$\mathscr{H}_{n,m}$ 中的元 H 可以记作

$$H(\Gamma')=(\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'\})\cap(\cap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}),\quad \Gamma'\subset\Gamma_n.\tag{7.3.2}$$

容易验证, $\mathscr{H}_{n,m}$ 是互不相交的闭集族, 为了证明 $\mathscr{H}_{n,m}$ 是离散的, 只要证明 $\mathscr{H}_{n,m}$ 是闭包保持的 (习题 5.6).

任取 $\{\Gamma'_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, 使 $\Gamma'_\lambda\subset\Gamma_n$. 设 $x\notin\cup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$, 则对每一 $\lambda\in\Lambda$, $x\notin H(\Gamma'_\lambda)$. 由 (7.3.2), 或者 $x\notin\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}$ 或者 $x\notin\cap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}$. 从而或者 $x\notin$ 某 A_{α_λ}, $\alpha_\lambda\in\Gamma'_\lambda$; 或者 $x\notin$ 某 $F_{\alpha_\mu,m}$, $\alpha_\mu\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda$. 置

$$\begin{aligned}\Lambda'&=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}\},\\ \Lambda''&=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\cap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}\}.\end{aligned}$$

显然, $\Lambda'\cup\Lambda''=\Lambda$, 并置

$$F_1=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}A_{\alpha_\lambda},\quad F_2=\bigcup_{\mu\in\Lambda''}F_{\alpha_\mu,m},$$

则 F_1,F_2 是闭集, 令 $V=X-(F_1\cup F_2)$, 那么 V 是 x 的开邻域与 $\cup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 不交, 故 $\cup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 是闭集. $\mathscr{H}_{n,m}$ 是闭包保持的, 从而是离散的.

现在证明 $\mathscr{H}=\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_{n,m}$ 是网络. 对 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U, 因 $\mathscr{A}$ 是网络, 存在 $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_0\in\Gamma_n$ 使 $x\in A_{\alpha_0}\subset U$. 令 $\Gamma'=\{\alpha\in\Gamma_n:x\in A_\alpha\}$, 则

$$x\in\cap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'\}\subset A_{\alpha_0}\subset U.\tag{7.3.3}$$

$\cup\{A \in \mathscr{A}_n : x \notin A\} = \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}$ 是不包含 x 的闭集, 从而 $X - \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}$ 是包含 x 的开集. 因 $\mathscr{A}$ 是网络, 存在 $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \Gamma_m$ 使

$$x \in A_{\alpha_1} \subset X - \cup\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}.$$

从而 $A_{\alpha_1} \cap (\cup\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}) = \varnothing$. 由 (7.3.1), $A_{\alpha_1} \subset F_{\alpha,m}$ 对所有 $\alpha \in \Gamma_n - \Gamma'$ 成立. 故有

$$x \in A_{\alpha_1} \subset \cap\{F_{\alpha,m} : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}.$$

结合 (7.3.3) 式得

$$x \in (\cap\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma'\}) \cap (\cap\{F_{\alpha,m} : \alpha \in \Gamma_n - \Gamma'\}) \subset A_{\alpha_0} \subset U.$$

由 (7.3.2), $x \in H(\Gamma') \subset U$. 故 $\mathscr{H}$ 是 X 的网络. 证完.

注记 定理 7.3.5 的证明表明, 具有 σ 闭包保持闭网络的空间具有 σ 离散的闭网络, 从而是 σ 空间.

推论 7.3.2[362] 设 f 是由 σ 空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射. 若 X 或 Y 是正则空间, 则 Y 是 σ 空间.

证明 若 X 是正则空间, 则 X 具有 σ 闭包保持的闭网络 $\mathscr{A}$, 因 f 连续闭, $f(\mathscr{A})$ 是空间 Y 的 σ 闭包保持的闭网络, 由定理 7.3.5 的注记, Y 是 σ 空间. 若 Y 是正则空间, 让 $\mathscr{A}$ 是 X 的 σ 闭包保持网络, 因 f 连续闭, $f(\mathscr{A})$ 是 Y 的 σ 闭包保持网络, 因 Y 是正则的, 由定理 7.3.5, Y 是 σ 空间. 证完.

下面将证明可数个 T_2 仿紧 σ 空间的积是 T_2 仿紧 σ 空间 (定理 7.3.6). 为此先给出下列两引理.

引理 7.3.1[324] 设 X, Y 都是 T_2 仿紧 σ 空间, 则 $X \times Y$ 是 T_2 仿紧 σ 空间, 从而是完备正规空间.

证明 由定理 7.3.5, 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ 是 σ 空间 X 的 σ 离散闭网络, 每一 $\mathscr{V}_n = \{V_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 是离散闭集族. 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是积空间 $X \times Y$ 的开覆盖. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in B_n$, 置

$$P(n,\beta,\alpha) = \cup\{P : P \text{ 是 } Y \text{ 中的开集使 } V_\beta \times P \subset U_\alpha\} \quad (\alpha \in A),$$
$$P(n,\beta) = \cup\{P(n,\beta,\alpha) : \alpha \in A\}.$$

$\{P(n,\beta,\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 $P(n,\beta)$ 的开覆盖. T_2 仿紧 σ 空间 Y 是完备正规空间, 是遗传仿紧的 (推论 5.3.1), 于是 $P(n,\beta)$ 是 Y 中的开、F_σ 集, 是仿紧的. 存在 Y 中局部有限的 (定理 5.3.1 的注记) 开集族 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖 $P(n,\beta)$ 且精确地加细 $\{P(n,\beta,\alpha)\}_{\alpha\in A}$. 因为 $\{V_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 是 X 中的离散集族, 所以 $\{V_\beta \times H_\alpha\}_{\beta\in B_n,\alpha\in A}$ 是 $X \times Y$ 中的局部有限集族. 置 $\mathscr{H} = \{V_\beta \times H_\alpha\}_{\beta\in B_n, n\in\mathbb{N},\alpha\in A}$, 下证 $\mathscr{H}$ 覆盖 $X \times Y$.

设 $(x,y) \in X \times Y$, 存在 $\alpha \in A$ 使 $(x,y) \in U_\alpha$, 分别存在 X,Y 的开集 V,U 使得 $(x,y) \in V \times U \subset U_\alpha$, 于是存在 $n \in \mathbb{N}, \beta \in B_n$ 使 $x \in V_\beta \subset V$, 从而 $(x,y) \in V_\beta \times U \subset U_\alpha$, 于是 $U \subset P(n,\beta,\alpha)$, 所以 $(x,y) \in V_\beta \times P(n,\beta,\alpha) \subset V_\beta \times P(n,\beta)$, 因 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖 $P(n,\beta)$, 存在 $\alpha' \in A$ 使 $(x,y) \in V_\beta \times H_{\alpha'} \in \mathscr{H}$, 故 $\mathscr{H}$ 覆盖 $X \times Y$.

对每一 $n \in \mathbb{N}, \mathscr{V}_n = \{V_\beta\}_{\beta \in B_n}$ 是离散闭集族. 由推论 5.1.2, 空间 X 是集态正规的, 存在离散开集族 $\{W_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 使对每一 $\beta \in B_n$, $W_\beta \supset V_\beta$. 从而 $\{W_\beta \times H_\alpha\}_{\beta\in B_n, \alpha\in A}$ 是 $X \times Y$ 中的局部有限开集族. 置

$$\mathscr{W} = \{(W_\beta \times H_\alpha) \cap U_\alpha\}_{\beta\in B_n, n\in\mathbb{N}, \alpha\in A},$$

则 $\mathscr{W}$ 是正则空间 $X \times Y$ 的 σ 局部有限开覆盖, 加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 所以 $X \times Y$ 是仿紧空间 (定理 5.1.1). σ 空间与 σ 空间的积是 σ 空间 (定理 7.3.3), 于是 $X \times Y$ 是 T_2 仿紧 σ 空间, 从而是完备正规空间. 证完.

下面的引理属于 K. Morita (据文献 [324]).

引理 7.3.2　设对每一 $n \in \mathbb{N}$, $X_1 \times \cdots \times X_n$ 是 T_2 仿紧 σ 空间, 则 $X = \prod_{i=1}^\infty X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间.

证明　易知 X 是正则 σ 空间 (定理 7.3.3), 只要证明 X 是仿紧的.

设 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖, 存在开加细覆盖 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ 使 $\mathscr{V}_n$ 中的每一元具有形式 $\prod_{i\leqslant n} V_i \times \prod_{i>n} X_i$, V_i 是 X_i 中的开集. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, X 中的开集族 $\mathscr{V}_n$ 在 $\prod_{i\leqslant n} X_i$ 上的投影 $\mathscr{V}'_n$ 覆盖着 $\prod_{i\leqslant n} X_i$ 的某开子集 G_n. 由于 $\prod_{i\leqslant n} X_i$ 是遗传仿紧的, G_n 是仿紧的, 存在 G_n 的局部有限开覆盖 $\mathscr{W}'_n$ 加细 $\mathscr{V}'_n$. 置

$$\mathscr{W}_n = \left\{W'_n \times \prod_{i>n} X_i : W'_n \in \mathscr{W}'_n\right\},$$

$\mathscr{W}_n$ 是 $G_n \times \prod_{i>n} X_i$ 的局部有限开覆盖, 因 $G_n \times \prod_{i>n} X_i$ 是 X 中的开集, 从而是 F_σ 集. 故上述局部有限性可作为关于空间 X 的 (定理 5.3.1 的注记). 从而 $\mathscr{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{W}_n$ 是 X 的 σ 局部有限开覆盖, 加细 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, X 是仿紧空间 (定理 5.1.1). 证完.

定理 7.3.6[324]　设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列 T_2 仿紧 σ 空间, 则积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间.

证明　由引理 7.3.1 及归纳法, 对 $n \in \mathbb{N}$, $X_1 \times \cdots \times X_n$ 是 T_2 仿紧 σ 空间, 由引理 7.3.2 知 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间. 证完.

关于 M 空间的定理 7.2.2、关于 p 空间的定理 7.2.6 和上述定理 7.3.6 都围绕着解决可数个仿紧空间的积仿紧性问题. 从上述可以看到 σ 空间的属性远比 M 空间、p 空间好. 但也有个别不足之处, 它不同于 M 空间、p 空间能分别为拟完备映射, 完备映射的逆像保持, σ 空间未必能为有限对一的连续闭映射逆像保持. 让

Z 是例 3.1.2 给出的 Alexandroff 双线空间, Y 是 Z 的子空间 C_1, 定义 $f: Z \to Y$ 是投影映射, 则 f 是二对一的连续闭映射. 由于 Y 是度量空间, 所以 Y 是 σ 空间. 又由于 Z 是 T_2 紧、不可度量空间, 所以 Z 不是 σ 空间 (见定理 7.3.13).

σ 空间与 M 空间是 "截然不同" 的两类空间 (不同于 M 空间与 p 空间), 即使加上仿紧性也不能使它们有所 "联系", Nagami[312] 曾给出这样的例: 仿紧 M 空间不是 σ 空间, 仿紧 σ 空间不是 M 空间. 其实, 上段已指出 Alexandroff 双线空间是紧空间不是 σ 空间, 从而它是仿紧 M 空间不是 σ 空间; 7.4 节的例 7.4.1 中的 Michael 空间是正则的可数空间不是第一可数空间, 于是它是仿紧 σ 空间不是 M 空间 (见定理 7.3.13).

下面叙述关于 σ 空间的和定理. 由 σ 空间的映射定理 (推论 7.3.2) 可得 σ 空间满足遗传闭包保持闭和定理.

定理 7.3.7 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖, 每一 F_α $(\alpha \in A)$ 是正则 σ 空间, 则 X 是 σ 空间.

证明 在定理 5.5.5 中取 $\mathscr{P}$ 为具有 σ 闭包保持的闭网络, 由定理 7.3.5、推论 7.3.2 及定理 5.5.5 得证. 证完.

更强于遗传闭包保持闭和定理的是控制闭和定理.

定义 7.3.2 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的闭集族, 称 X 为 $\mathscr{F}$ **所控制** (dominated[302]), 如果 X 的每一子集 K 是闭的当且仅当存在子集族 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ 满足, $\mathscr{F}'$ 覆盖 K, 且对任一 $F \in \mathscr{F}'$, $F \cap K$ 是闭集. 如果空间 X 为它的闭覆盖 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 所控制, 且每一 F_α $(\alpha \in A)$ 具有拓扑性质 $\mathscr{P}$, 则 X 也具有性质 $\mathscr{P}$, 那么称 $\mathscr{P}$ 满足**控制闭和定理** (dominated closed sum theorem[357]).

显然, 空间 X 为它的遗传闭包保持 (局部有限) 闭覆盖所控制.

Okuyama[326] 曾证明在假设空间是正规的情况下, σ 空间满足控制闭和定理. Burke 和 Lutzer[74] 曾提出能否去掉 "正规" 这假设, 直到 1991 年为林寿 [253] 所解决. 他的证法与 Okuyama 不同, 引入了新的概念, 本书限于篇幅, 不予转载.

定理 7.3.8 [253] 设空间 X 为它的闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 所控制, 每一 F_α $(\alpha \in A)$ 是正则 σ 空间, 则 X 是 σ 空间.

下面介绍一些有关的度量化定理, 首先改进上述 Šneider 度量化定理 (定理 7.1.3), 把 "紧" 减弱为 "可数紧".

引理 7.3.3 [81] 具有 G_δ 对角线的可数紧空间是紧空间.

证明 设 X 是可数紧空间, $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列. 若 X 不是紧的, 则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 不具有可数子覆盖. 取 $x_0 \in X$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使 $\mathscr{U}$ 不包含可数子族覆盖 $X - \mathrm{st}(x_0, \mathscr{G}_{n_0})$. 不然的话, 对每一 $n \in \mathbb{N}$ 都可找到可数子族

$\mathscr{U}_n \subset \mathscr{U}$ 覆盖 $X - \mathrm{st}(x_0, \mathscr{G}_n)$, 由于

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X - \mathrm{st}(x_0, \mathscr{G}_n)) = X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x_0, \mathscr{G}_n) = X - \{x_0\},$$

所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 将是 $X - \{x_0\}$ 的可数子覆盖, 从而 $\mathscr{U}$ 具有可数子族覆盖 X.

对每一 $\alpha \in \omega_1$, 可以归纳地选取点 $x_\alpha \in X$ 及 $n_\alpha \in \mathbb{N}$, 使

(i) $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$;

(ii) $\mathscr{U}$ 不包含可数子族覆盖 $X - \bigcup_{\beta\leqslant\alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$.

事实上, 由上段所证, 不妨设 α 是极限序数, 并要证明: 如果对每一 $\gamma < \alpha, \mathscr{U}$ 不包含可数子族覆盖 $X - \bigcup_{\beta\leqslant\gamma} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$, 则 $\mathscr{U}$ 不包含可数子族覆盖 $X - \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$. 不然的话, $\{\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta}) : \beta < \alpha\} \cup \mathscr{U}$ 将有有限子族覆盖 X (因 X 可数紧), 这有限子族必包含 $\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$ 型的开集 (因 $\mathscr{U}$ 没有有限子族覆盖 X). 设有限子族所包含 $\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$ 型集中最大的序数 β 是 γ, 则 $\mathscr{U}$ 具有有限子族覆盖 $X - \bigcup_{\beta\leqslant\gamma} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$, 与论断的假设矛盾. 从而可取 $x_\alpha \in X - \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{G}_{n_\beta})$ 以完成归纳法.

综上所述, 存在某 $n \in \mathbb{N}$ 及不可数集 $A \subset \omega_1$ 使对每一 $\beta \in A$ 有 $n_\beta = n$, 则由 (i) 易证开覆盖 $\mathscr{G}_n$ 的每一元 G 至多与 $\{x_\beta : \beta \in A\}$ 中一个元相交, 从而无限集 $\{x_\beta : \beta \in A\}$ 没有 ω 聚点, 这与 X 是可数紧空间矛盾 (定理 3.5.2). 所以 X 是紧的. 证完.

定理 7.3.9 (Chaber 定理 [81]) 具有 G_δ 对角线的 T_2 可数紧空间是紧可度量化空间.

证明 由定理 7.1.3 及引理 7.3.3 得证. 证完.

由 G_δ 对角线的刻画定理 7.1.2, 可以定义较强于 G_δ 对角线的 G_δ^* 对角线.

定义 7.3.3 空间 X 称为具有 G_δ^* **对角线** (G_δ^*-diagonal[196]), 如果存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使对任意 $x, y \in X$, $x \neq y$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$ (等价地, 对每一 $x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$). 上述覆盖序列称为 G_δ^* **对角线序列** (G_δ^*-diagonal sequence).

显然, 具有 G_δ^* 对角线的空间是 T_2 空间.

注记 由引理 7.2.6 知具有 G_δ 对角线的正则 θ 加细空间具有 G_δ^* 对角线. 然而, 存在具有 G_δ 对角线的 T_2, 次仿紧的 σ 空间不必具有 G_δ^* 对角线 [260].

定理 7.3.10 [196] 具有 G_δ^* 对角线的 wΔ 空间是可展空间.

证明 设 $\{\mathscr{H}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\mathscr{K}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 分别是空间 X 的 wΔ 序列、G_δ^* 对角线序列. 置

$$\mathscr{G}_n = \left\{G : G = \bigcap_{i=1}^{n}(H_i \cap K_i),\ H_i \in \mathscr{H}_i,\ K_i \in \mathscr{K}_i,\ i \leqslant n\right\}\ (n \in \mathbb{N}),$$

则 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 同时是 wΔ 序列及 G_δ^* 对角线序列, 且 $\mathscr{G}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{G}_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

设 $x \in X$ 及 $x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点 p, 由 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 递减, $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)}$. 因 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_δ^* 对角线序列, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)} = \{x\}$, 故 $p = x$, 从而 X 是可展空间 (习题 7.5 或定义 7.2.1 的注记). 证完.

注记 具有 G_δ 对角线的 wΔ 空间是否可展?[196] 这问题称为 **wΔ 空间问题** (wΔ-space problem). 1988 年, Alster, Burke 和 Davis[10] 在假设 CH 下对此问题给出否定的回答.

下面把定理 7.3.9 的度量化定理中的可数紧空间减弱为 M 空间.

定理 7.3.11[74] 空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_2, M 空间且具有 G_δ 对角线.

证明 必要性显然, 仅证充分性. 设 X 是 T_2, M 空间且具有 G_δ 对角线, 由定理 7.2.1, 存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的拟完备映射 f. 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数紧的, 因具有 G_δ 对角线这一性质是遗传性的, 由引理 7.3.3, $f^{-1}(y)$ 是紧的. 从而 f 是完备映射, 由推论 7.2.2, 知 X 是仿紧的. 由于 X 是 T_2 空间, 所以 X 是正则空间, 由定义 7.3.3 的注记, X 具有 G_δ^* 对角线. 由定理 7.3.10, X 是可展空间. 从而 X 可度量化 (定理 7.1.4). 证完.

定理 7.3.12 可展空间是 σ 空间 [77], 正则 σ 空间具有 G_δ^* 对角线.

证明 设 X 是可展空间, 具有展开 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由可展空间是次仿紧的, 对每一 $\mathscr{G}_n$ 存在 σ 离散闭加细覆盖 $\mathscr{F}_n$, 从而易证 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 离散网络, 所以 X 是 σ 空间. σ 空间的自乘积仍是 σ 空间, 仍是完备的, 于是对角线是 G_δ 集 (T_2 空间的对角线是闭的, 习题 2.7). 因正则 σ 空间是次仿紧的, 所以具有 G_δ^* 对角线 (定义 7.3.3 的注记). 证完.

引理 7.3.4[353] 可数紧的 σ 空间是紧空间.

证明 设 X 是可数紧的 σ 空间, 由于可数紧空间的局部有限集族是有限集 (定理 6.6.13 的注记 1), 所以 X 具有可数网络, 于是 X 是 Lindelöf 空间, 从而 X 是紧空间. 证完.

定理 7.3.13[353] 空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_2, M 空间且 σ 空间.

证明 只要证明充分性. 设 X 是 T_2, M 空间且是 σ 空间, 由引理 7.3.4、推论 7.2.1 和推论 7.2.2, X 是仿紧空间, 从而 X 是正则空间. 由定理 7.3.11 和定理 7.3.12 得证. 证完.

注记 由定理 7.3.13, T_2 可数紧的 σ 空间是可度量化空间. 然而, 具有 G_δ 对角线的 T_1 紧的 σ 空间未必是可度量化的. 例如, 让 X 是任一可数无限集, 赋予有限补拓扑 (例 2.3.1), 则 X 不是 T_2 空间, 从而不是可度量化空间, 但 X 是具有可数网的 T_1 紧的可展空间, 所以 X 具有 G_δ 对角线 (习题 7.34).

前面提到 M 空间与 σ 空间是两类 "截然不同" 的空间, 有趣的是把两者合在一起形成可度量化, 相当于把可度量化 "因式分解".

在证明了仿紧 M 空间的可数积保持后 (定理 7.2.2), 我们曾叙述关于仿紧空间的可数积保持问题, σ 空间类也解决了这问题 (定理 7.3.6), 但是仿紧 σ 空间类与仿紧 M 空间类 (或仿紧 p 空间类) 没有什么 "联系", 更不能各自包含对方. Frolík[127] 曾证明 "如果空间类 $\mathscr{P}$ 关于可数积是封闭的, 则 $\mathscr{P}$ 中元素按完备映射 f 的原像所得的类 $f^{-1}(\{\mathscr{P}\})$ 关于可数积是封闭的". 用上述结果于 σ 空间类, 所得的按完备映射的逆像类记作 $f^{-1}(\{\sigma\})$[312], 则 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类关于可数积是封闭的; 用上述结果于仿紧 σ 空间类, 由于仿紧空间按完备映射的逆像是仿紧空间, 知仿紧 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类关于可数积是封闭的. 由于仿紧 M 空间 (或仿紧 p 空间) 可以刻画为度量空间按完备映射的逆像, 而度量空间是 σ 空间, 所以仿紧 M 空间 (或仿紧 p 空间) 类包含于 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类, 因而可以取 $\mathscr{P}$ 为 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类, 使 $\mathscr{P}$ 的范围得到足够的扩展以统一 Frolík, Morita, Arhangel'skiĭ, Okuyama 等的结果.

Nagami[312] 引入下述空间 (见习题 7.16).

定义 7.3.4[312] 空间 X 称为 **Σ 空间** (Σ-space) (**强 Σ 空间** (strong Σ-space)), 如果存在 σ 局部有限闭集族 $\mathscr{F}$ 及由闭可数紧集 (紧集) 组成的覆盖 $\mathscr{C}$ 使对 X 中开集 U 和 $\mathscr{C}$ 中元 $C \subset U$, 存在 $F \in \mathscr{F}$ 使 $C \subset F \subset U$.

由定义 7.3.4, 易知正则 σ 空间按拟完备映射的逆像是 Σ 空间, 按完备映射 f 的逆像是强 Σ 空间. 正则强 Σ 空间类应包含正则 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类. 事实正是如此, Nagami[312] 给出一正则的强 Σ 空间不是某 σ 空间按完备映射的逆像, 所以正则强 Σ 空间类严格地大于正则 $f^{-1}(\{\sigma\})$ 空间类.

显然, 正则 σ 空间是强 Σ 空间, 由于 iso 紧性 (定义 6.6.1) 使可数紧闭子集成为紧集, 故 iso 紧的 Σ 空间是强 Σ 空间.

定理 7.3.14[59] T_2 空间 X 是强 Σ 空间当且仅当 X 是次仿紧的 Σ 空间.

证明 充分性是显然的, 因次仿紧空间是 iso 紧的 (定理 6.6.1). 下证 T_2 强 Σ 空间是次仿紧的, 完成必要性的证明.

设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是强 Σ 空间 X 的 σ 局部有限闭集族, $\mathscr{C}$ 是由 X 的某些 (闭) 紧集组成的覆盖, 满足定义 7.3.4. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 对 $x \in X$, 取定 $C_x \in \mathscr{C}$ 使 $x \in C_x$. 由定理 6.2.11 证明中的引理 6.2.1, 存在 X 中的开集 O_x, 使 $C_x \subset O_x$ 且 $\mathscr{U}|O_x = \{U \cap O_x : U \in \mathscr{U}\}$ 在 O_x 中有有限的闭加细覆盖 $\mathscr{H}_x$, 从而存在 $F_x \in \mathscr{F}$, 满足 $C_x \subset F_x \subset O_x$. 让 $\mathscr{H} = \{F_x \cap H : x \in X,\ H \in \mathscr{H}_x\}$. 则 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 局部有限加细覆盖. 对 $x \in X$ 和 $H \in \mathscr{H}_x$, 如果 $z \in X - (F_x \cap H)$, 置

$$L_z = \begin{cases} X - F_x, & z \in X - F_x, \\ O_x - H, & z \in F_x - H. \end{cases}$$

那么 L_x 是包含点 z 的开集且 $L_z \cap F_x \cap H = \varnothing$, 于是 $F_x \cap H$ 是 X 的闭集. 所以 $\mathscr{U}$ 有 σ 局部有限的闭加细覆盖. 故 X 是次仿紧空间. 证完.

定理 7.3.15[312] 可数个闭 Σ 空间 (强 Σ 空间) 的并是 Σ 空间 (强 Σ 空间).

证明是直接的, 留给读者.

引理 7.3.5[324] 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的拟完备映射, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的局部有限集族, 则 $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 Y 中的局部有限集族.

证明 因为 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的局部有限集族, 所以 $\{\overline{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 仍是局部有限的, 由 f 是闭映射, $\{f(\overline{U}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 Y 中的闭包保持闭集族. 下证 $\{f(\overline{U}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是点有限的. 如若不然, 存在 y 属于无限个 $f(\overline{U}_{\alpha'})$, $\alpha' \in A' \subset A$, A' 是 A 的无限子集, 则对每一 $\alpha' \in A'$, 存在 $x_{\alpha'} \in f^{-1}(y)$ 使 $x_{\alpha'} \in \overline{U}_{\alpha'}$, 即 $x_{\alpha'} \in f^{-1}(y)\cap\overline{U}_{\alpha'}$. 因 $\{\overline{U}_{\alpha'}\}_{\alpha'\in A'}$ 是点有限的, 不失一般性, 可作为这些 $x_{\alpha'}$ 是不同的. 由 $\{\overline{U}_{\alpha'}\}_{\alpha'\in A'}$ 的局部有限性, 易知无限集 $\{\{x_{\alpha'}\}: \alpha' \in A'\}$ 是局部有限的. 而 $\{x_{\alpha'}: \alpha' \in A'\} \subset f^{-1}(y)$, 这与 $f^{-1}(y)$ 是可数紧性矛盾 (可数紧空间的局部有限集族是有限集, 定理 6.6.13 的注记 1). 所以 $\{f(\overline{U}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是点有限的, 从而是局部有限的 (习题 5.6). 因此, $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 也是局部有限的. 证完.

定理 7.3.16[312] 设 $f: X \to Y$ 是 Σ 空间 (强 Σ 空间) X 到空间 Y 上的拟完备 (完备) 映射, 则 Y 是 Σ 空间 (强 Σ 空间).

证明 设 X 是 Σ 空间 (强 Σ 空间). 让 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限闭集族, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是局部有限的, $\mathscr{C}$ 是 X 的闭可数紧 (紧) 集组成的覆盖, 满足 Σ 空间 (强 Σ 空间) 的定义 (定义 7.3.4). 由引理 7.3.5, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $f(\mathscr{F}_n) = \{f(F): F \in \mathscr{F}_n\}$ 是 Y 中的局部有限集族. 此外, $f(\mathscr{C}) = \{f(C): C \in \mathscr{C}\}$ 是 Y 的闭可数紧 (紧) 集组成的覆盖. 容易验证, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(\mathscr{F}_n)$ 及 $f(\mathscr{C})$ 满足 Σ 空间 (强 Σ 空间) 的定义. 证完.

推论 7.3.3[312] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 F_α ($\alpha \in A$) 是 X 的 Σ 子空间 (强 Σ 子空间), 则 X 是 Σ 空间 (强 Σ 空间).

证明 因 Σ 空间 (强 Σ 空间) 关于拓扑和保持, 由定理 7.3.16 及一般性定理 5.5.3 得证. 证完.

定理 7.3.17[312] 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到 Σ 空间 (强 Σ 空间) Y 上的拟完备 (完备) 映射, 则 X 是 Σ 空间 (强 Σ 空间).

证明 设 Y 是 Σ 空间 (强 Σ 空间), $\mathscr{F}$ 是 Y 的 σ 局部有限闭集族, $\mathscr{C}$ 是 Y 的闭可数紧 (紧) 集组成的覆盖, 满足 Σ 空间 (强 Σ 空间) 的定义. $f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(F): F \in \mathscr{F}\}$ 是空间 X 的 σ 局部有限闭集族, $f^{-1}(\mathscr{C}) = \{f^{-1}(C): C \in \mathscr{C}\}$ 是 X 的闭可数紧 (紧) 集组成的覆盖 (习题 3.31 和习题 3.30). 设 $C \in \mathscr{C}$ 及 X 中开集 $U \supset f^{-1}(C)$, 因 f 是闭映射, 由推论 1.5.1, 存在 X 中的开集 V 使 $U \supset V \supset f^{-1}(C)$, $f(V)$ 是 Y 中的开集且 $V = f^{-1}(f(V))$. 因 $f(V) \supset C$, 存在

$F \in \mathscr{F}$ 使 $f(V) \supset F \supset C$, 从而

$$U \supset V = f^{-1}(f(V)) \supset f^{-1}(F) \supset f^{-1}(C), \quad f^{-1}(F) \in f^{-1}(\mathscr{F}).$$

故 X 是 Σ 空间 (强 Σ 空间). 证完.

推论 7.3.4[312]　M 空间是 Σ 空间, 仿紧 M 空间是强 Σ 空间.

证明　M 空间可刻画为度量空间在拟完备映射下的逆像, 而度量空间是 Σ 空间, 推论后半的证明类似. 证完.

推论 7.3.5[312]　Σ 空间与紧空间的积是 Σ 空间.

证明　Σ 空间 X 与紧空间 Y 的积在 X 上的投影是完备映射 (定理 3.3.1), 而紧空间是 Σ 空间. 证完.

定理 7.3.18[312]　可数个强 Σ 空间的积是强 Σ 空间.

证明　设 $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, 每一 X_i 是强 Σ 空间, $\mathscr{F}^i$ 是 X_i 中的 σ 局部有限闭集族, $\mathscr{C}^i$ 是 X_i 中由闭紧集组成的覆盖, 满足强 Σ 空间的定义. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 记 $\mathscr{F}^i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}^i_n$, 这里每一 $\mathscr{F}^i_n$ 是局部有限的, 且不妨设 $\mathscr{F}^i_n \subset \mathscr{F}^i_{n+1} (n \in \mathbb{N})$. 置

$$\mathscr{F}_n = \Big\{ \prod_{i \leqslant n} F^i \times \prod_{i > n} X_i : F^i \in \mathscr{F}^i_n,\ i \leqslant n \Big\},$$

则 $\mathscr{F}_n$ 在 X 中局部有限, $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限闭集族, 从而容易验证 (利用引理 7.2.4) $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{C} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^i$ 满足强 Σ 空间的定义, 因此 X 是强 Σ 空间. 证完.

定理 7.3.19[312]　设 $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 是一列 T_2 仿紧 Σ 空间, 则积空间 $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ 是 T_2 仿紧 Σ 空间.

证明　由定理 7.3.14, 每一 X_i 是强 Σ 空间, 下面证明借用上述定理 7.3.18 的假设符号及论证过程.

设 $\mathscr{U}$ 是 $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ 的开覆盖, $\mathscr{F}^i_n$ 是 X_i 中的局部有限闭集族, 由 X_i 的 T_2 仿紧性, 存在 X_i 中的局部有限开集族 $\mathscr{V}_{i,n}$, 使对每一 $F^i \in \mathscr{F}^i_n$ 存在 $V(F^i) \in \mathscr{V}_{i,n}$, 满足 $F^i \subset V(F^i)$ 且 $\mathscr{V}_{i,n} \subset \mathscr{V}_{i,n+1} (n \in \mathbb{N})$ (引理 4.4.1 的注记). 置

$$\mathscr{V}_n = \Big\{ \prod_{i \leqslant n} V(F^i) \times \prod_{i > n} X_i : V(F^i) \in \mathscr{V}_{i,n},\ i \leqslant n \Big\}.$$

$\mathscr{V}_n$ 是空间 X 的局部有限开集族.

取 $\mathscr{F}_n$ 中的某些元 A (具有形式 $\prod_{i \leqslant n} F^i \times \prod_{i > n} X_i$) 之能被 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}(A)$ 所覆盖者 (因为 X 是强 Σ 空间 (定理 7.3.18), 覆盖 $\mathscr{C}$ 的每一元 (紧集) 为 $\mathscr{U}$ 的有限子族覆盖, 从而由强 Σ 空间的定义知具有此性质的 A 是存在的, 且这些

$A \in \mathscr{F}$ 的全体覆盖 X), 置 $\mathscr{U}(A)=\{U_j(A): j \leqslant n(A)\}$, 其中 $n(A)$ 是某正整数. 取 $\mathscr{V}_n$ 中对应的元 B (具有形式 $\prod_{i\leqslant n} V(F^i)\times\prod_{i>n} X_i$), 记为 $B(A)$. 置

$$W_j(A)=U_j(A)\cap B(A),\ A\in\mathscr{F}_n,\ j\leqslant n(A);$$

$$\mathscr{W}_{n,j}=\{W_j(A): A\in\mathscr{F}_n,\ A \text{ 能被 } \mathscr{U} \text{ 的有限子族覆盖}\}.$$

$\mathscr{W}_{n,j}$ 是局部有限开集族, $\mathscr{W}=\bigcup_{n,j\in\mathbb{N}}\mathscr{W}_{n,j}$ 是 X 的 σ 局部有限开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 因 X 是正则的, X 是仿紧空间. 证完.

拓扑空间 X 的覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为**加细序列** (refined sequence), 如果每一 $\mathscr{U}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{U}_n$ ($n\in\mathbb{N}$).

引理 7.3.6 可数紧空间 X 的 G_δ^* 对角线加细序列是 X 的一个展开.

证明 设 X 是可数紧空间, 具有 G_δ^* 对角线加细序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 由定义 7.3.3, 有 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$, 对 $x\in X$ 成立. 下证 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的邻域基, 从而得证 (定义 4.4.1).

对 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U, $\{U\}\cup\{X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}: n\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 X, 因 X 是可数紧的, U 及有限个 $X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$ 型的开集覆盖 X, 设这有限个开集中 $\mathscr{U}_n$ 的足标最大者为 n_0, 则 $U\cup(X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n_0})})=X$, 从而 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n_0})}\subset U$. 证完.

定理 7.3.20[74] 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当 X 是具有 G_δ 对角线的 Σ 空间.

证明 必要性. 正则 σ 空间是 Σ 空间且具有 G_δ 对角线 (定理 7.3.12).

充分性. 设 X 是 Σ 空间, $\mathscr{F}=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_l$ 是 X 中的 σ 局部有限闭集族, 每一 $\mathscr{F}_l$ 是局部有限的, $\mathscr{C}$ 是 X 的闭可数紧集组成的覆盖, 满足 Σ 空间的定义. 设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的 G_δ 对角线序列, 由引理 7.3.3, $\mathscr{C}$ 中的元 (可数紧集) 是紧集, 所以 X 是强 Σ 空间. 因为 T_2 强 Σ 空间是次仿紧的 (定理 7.3.14), 从而可设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G_δ^* 对角线加细序列 (定义 7.3.3 的注记), 即对每一 $x\in X$, $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$.

因 X 是次仿紧的, 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 设 $\mathscr{H}_n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_{n,m}$ 是 X 的 σ 离散闭覆盖, 加细 $\mathscr{U}_n$, 每一 $\mathscr{H}_{n,m}$ 是离散的. 置

$$\mathscr{K}(n,m,l)=\{H\cap F: H\in\mathscr{H}_{n,m}, F\in\mathscr{F}_l\},$$

则 $\mathscr{K}(n,m,l)$ 是局部有限的. 从而 $\mathscr{K}=\cup\{\mathscr{K}(n,m,l): m,n,l\in\mathbb{N}\}$ 是 σ 局部有限闭集族, 下证 $\mathscr{K}$ 是 X 的网络, 从而 X 是 σ 空间.

取 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U, 并取紧集 $C\in\mathscr{C}$ 使 $x\in C$. 用引理 7.3.6 于紧子空间 C (用该定理所证最后结果), 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $C\subset U\cup(X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)})$, 于是

$$(C-U)\cap\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}=\varnothing.$$

取 $y \in C - U$, 存在包含 y 的开集 V_y 使 $V_y \cap \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)} = \varnothing$. 置 $V = \cup\{V_y : y \in C - U\}$, 则 $C \subset U \cup V$, 存在 $F \in \mathscr{F}_l$ 使 $C \subset F \subset U \cup V$. 另一方面, $\mathscr{H}_n$ 是 X 的覆盖, 点 x 属于某 $H \in \mathscr{H}_{n,m}$. 因 $\mathscr{H}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$, H 包含在 $\mathscr{U}_n$ 的某元中, 故有 $x \in H \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 从而 $x \in H \cap F \in \mathscr{K}(n, m, l)$. 由 $F \subset U \cup V$ 及 $V \cap \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \varnothing$, 知 $F \cap \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U \cap \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U$, 而 $H \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$, 所以 $H \cap F \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \cap F \subset U$. 因此 $\mathscr{K}$ 是 X 的网络. 证完.

Michael[286] 给出一仿紧 Σ 空间在某连续闭映射下的像不是 Σ 空间的例说明: Σ 空间、强 Σ 空间不能为连续的闭映射所保持. 因此, 我们不能期望像定理 7.3.5 对 σ 空间那样, 利用 σ 闭包保持集族刻画 Σ 空间、强 Σ 空间, 从而 Michael 在定义 7.3.4 中把 "局部有限" 代以 "闭包保持" 以引入 **$\Sigma^\sharp$ 空间** ($\Sigma^\sharp$-space)、**强 $\Sigma^\sharp$ 空间** (strong $\Sigma^\sharp$-space), 使它们能为连续的闭映射所保持, 这类空间也具有相应于定理 7.3.14[217] (习题 7.18)、推论 7.3.5[327]、定理 7.3.18、定理 7.3.19[331]、定理 7.3.20[217] 等性质, 这表明 $\Sigma^\sharp$ 空间是具有良好性质的广义度量空间类.

我们自然会考虑到把定义 7.3.4 中的 "局部有限" 代以 "遗传闭包保持" 以引入新的空间, 这类空间也为连续的闭映射所保持, 并被 Okuyama[327] 命名为 **Σ^* 空间** (Σ^*-space)、**强 Σ^* 空间** (strong Σ^*-space), 并指出如果 X 是仿紧 Σ^* 空间而不是 Σ 空间 (上述 Michael[286] 的例的像空间就是这样的空间), 则 X 与单位闭区间的积不是 Σ^* 空间, 不具有相应于推论 7.3.5 的性质, 因此 Σ^* 空间的意义不大. 利用前 Michael[286] 的例, 可以间接证明存在着 $\Sigma^\sharp$ 空间而不是 Σ^* 空间.

在本节的最后, 给出正则 σ 空间的闭像的分解定理. Lašnev[240] 证明如下定理: "设 $f: X \to Y$ 是度量空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, 则 Y 可分解为 $Y = Y_0 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n)$, 每一 Y_n 是离散的闭子集; 对每一 $y \in Y_0$, $f^{-1}(y)$ 是紧集." 这一定理通常称为 **Lašnev 分解定理** (Lašnev's decomposition theorem). 下面把这一定理推广到正则 σ 空间.

介绍空间中一点的网络概念. 设 $x \in X$, 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{N}$ 称为点 x 在 X 中的**网络** (network of a point in a space), 如果 $x \in \cap\mathscr{N}$, 且对 X 中包含 x 的每一邻域 U, 存在 $N \in \mathscr{N}$ 使 $N \subset U$.

定理 7.3.21[86] 设 f 是正则 σ 空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, 则 Y 可分解为 $Y = Y_0 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n)$, 每一 Y_n $(n \in \mathbb{N})$ 是离散闭子集; 对每一 $y \in Y_0$, $f^{-1}(y)$ 是紧集.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是正则空间 X 的 σ 局部有限闭网络, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{F}_n = \{f(P) : P \in \mathscr{P}_n\}$, 对每一 $y \in Y$, 置 $F_n(y) = \cap\{F \in \mathscr{F}_n : y \in F\}$. 因 f 是闭映射, $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持的闭集族, 从而 $\{F_n(y) : y \in Y\}$ 也是闭包保持的. 事实上, 对每一 $A \subset Y$, 若 $z \notin \cup\{F_n(y) : y \in A\}$, 令 $V = Y - \cup\{F \in \mathscr{F}_n : z \notin F\}$, 则 V 是包含点 z 的开集且

$V \cap F_n(y) = \varnothing$, $y \in A$.

置 $Y_n = \{y \in Y : F_n(y) = \{y\}\}$, 则 Y_n 可看作 $\{F_n(y) : y \in Y\}$ 的子族, 它的元是由单点集 $\{y\} = F_n(y)$ 形成, 从而此子族是离散的, 故 Y_n 是离散闭子集.

置 $Y_0 = Y - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, 要证每一 $y \in Y_0$, $f^{-1}(y)$ 是紧的. 为此, 先证 $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的. 固定点 $y \in Y_0$, 有

(1) $\{F_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 y 在 Y 中的递减网络.

由于 $y \in Y_0$, $F_n(y)$ 不是单点集, 以及 Y 是 T_1 空间, 易知每一 $F_n(y)$ 是无限集. 从而可取 Y 中不同的点形成的序列 $\{y_n\}$ 使 $y_n \in F_n(y) - \{y\}$. 由 (1), 序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y.

由 $F_n(y)$ 的定义易知:

(2) $P \in \mathscr{P}_m$ 及 $P \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing \Rightarrow$ 对 $n \geqslant m$, $P \cap f^{-1}(y_n) \neq \varnothing$.

下面证明:

(3) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{P \in \mathscr{P}_n : P \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing\}$ 是有限的.

如果 (3) 式不成立, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使 $\mathscr{P}_m$ 中有无限个元 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $P_n \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$. 由 (2), 对 $n \geqslant m$, $P_n \cap f^{-1}(y_n) \neq \varnothing$, 取 $x_n \in P_n \cap f^{-1}(y_n)$. 因 $\mathscr{P}_m$ 局部有限, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是闭集, 而 f 是闭映射, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是闭集. 这与 $\{y_n\}$ 收敛于 y 矛盾. 因此 (3) 式成立.

这样, 子空间 $f^{-1}(y)$ 具有可数网络, 从而可知 $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的.

下证 $f^{-1}(y)$ 是紧的. 令 $K = f^{-1}(y)$. 若 K 不是 X 的紧集, 则

(4) 存在 X 的递增的开集列 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 覆盖 K 且 $K \cap (U_{k+1} - \overline{U}_k) \neq \varnothing (k \in \mathbb{N})$.

事实上, K 不是 X 的可数紧集 (引理 7.3.4), 从而存在 X 的可数开集族 $\mathscr{V}$, 使 $\mathscr{V}$ 覆盖 K, 但是 $\mathscr{V}$ 的任何有限集不能覆盖 K. 对 $x \in K$, 存在 $V_x \in \mathscr{V}$, 以及 X 的开集 W_x, 使 $x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset V_x$. 因为 K 是 Lindelöf 的, 所以 K 的覆盖 $\{W_x\}_{x\in K}$ 有可数子覆盖 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 这时 $\{\overline{W}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的任何有限子族不能覆盖 K. 取定 $x_1 \in K \cap W_1$, 令 $U_1 = W_1$. 存在 $x_2 \in K - \overline{U}_1$, $n_1 \in \mathbb{N}$, 使 $x_2 \in W_{n_1}$. 令 $U_2 = \bigcup_{i\leqslant n_1} W_i$, 则 $U_1 \subset U_2$, $x_2 \in K \cap (U_2 - \overline{U}_1)$. 依此类推, 可构造 X 的递增的开集列 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 (4).

现在, 取 $x_k \in K \cap (U_{k+1} - \overline{U}_k)(k \in \mathbb{N})$. 因 $x_k \in X - \overline{U}_k$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是网络, 存在 $P_k \in \mathscr{P}_{n_k}$ 使 $x_k \in P_k \subset X - \overline{U}_k$, 这里 n_k 可取作 $n_k > n_{k-1}$. 由于 $x_k \in P_k \cap K$ 及 (2), $P_k \cap f^{-1}(y_{n_k}) \neq \varnothing$, 取 $z_k \in P_k \cap f^{-1}(y_{n_k})$. $\{f(z_k)\}$ 作为 $\{y_n\}$ 的子序列, 收敛于 y, 从而 $\{z_k\}$ 有聚点 $z \in K$, 设 $z \in$ 某 U_{k_0}. 另一方面, 按 z_k 的取法, $z_k \in P_k$, 而 $P_k \cap \overline{U}_k = \varnothing$, 所以 $z_k \notin U_k \supset U_{k_0}$, $k > k_0$. 这一矛盾证明了 $K = f^{-1}(y)$ 是紧的. 证完.

注记 Chaber[86] 更构造反例说明上述定理中如把 “正则 σ” 换为 “T_2, σ” 则不能成立.

7.4 M_i 空 间

还是从 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理 (定理 4.3.6 和定理 4.3.7) 说起.

"正则空间 X 可度量化当且仅当 X 满足下列条件之一:

(i) X 具有 σ 局部有限基;

(ii) X 具有 σ 离散基."

这是分别于 1950 年和 1951 年得到的, 启发了 Michael 于 1953 年给出仿紧性的刻画定理 (定理 5.1.1 和定理 5.1.2):

"正则空间 X 是仿紧的当且仅当 X 满足下列条件之一:

(i′) X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限开加细覆盖;

(ii′) X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖."

此后, Michael 企图证明闭映射保持仿紧性, 引入闭包保持集族概念 (定义 5.1.2), 于 1957 年证明了 (定理 5.1.4):

"正则空间 X 是仿紧的当且仅当 X 满足下列条件:

(iii′) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持开加细覆盖."

并指出不能在 Bing-Nagata-Smirnov 定理中, 以 "σ 闭包保持基" 代替 "σ 局部有限基" 或 "σ 离散基" (例 7.4.1), 给出了正则具有 σ 闭包保持基的不可度量化空间. 接着 Michael 于 1959 年又引入较弱于 "闭包保持" 的 "垫状" 集族概念 (定义 5.1.3), 证明了 (引理 5.1.6):

"T_1 空间 X 是仿紧的当且仅当 X 满足下列条件:

(iv′) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状开加细覆盖."

Michael 关于仿紧性的后面的两个刻画 ((iii′), (iv′)) 反过来启发 Ceder 于 1961 年引入垫状对基概念 (定义 7.4.1), 定义了广义度量空间: M_1 空间、M_3 空间如下 (定义 7.4.2):

"正则空间 X 称为 M_1 空间如果 X 具有 σ 闭包保持基;

T_1 空间 X 称为 M_3 空间如果 X 具有 σ 垫状对基."

这种以类推形式的相互启发、相互影响的情况是有趣的.

以上说明由度量化定理到仿紧性的刻画及由仿紧性的新刻画引入新的广义度量空间的思路. 下面正式定义 M_i $(i=1,2,3)$ 空间.

定义 7.4.1[80] 空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的**拟基** (quasi-base), 如果对每一 $x\in X$ 及 x 的开邻域 U, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B^\circ\subset B\subset U$. 设有集对 (P_1,P_2) 所成的族 $\mathscr{P}=\{(P_1,P_2)\}$, 这里 P_1 是开集且 $P_1\subset P_2$, 称 $\mathscr{P}$ 是 X 的**对基** (pair-base), 如果对每一 $x\in X$ 及 x 的开邻域 U, 存在 $(P_1,P_2)\in\mathscr{P}$ 使 $x\in P_1\subset P_2\subset U$. 对族

$\mathscr{P}$ 称为**垫状的** (cushioned), 如果对任一 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$,

$$\overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}} \subset \cup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}.$$

显然, 拟基是对基, 只要取 (P_1, P_2) 为 (B°, B).

定义 7.4.2[80] 正则空间 X 称为 **$\mathbf{M_1}$ 空间** (M_1-space), 如果 X 具有 σ 闭包保持基; 称为 **$\mathbf{M_2}$ 空间** (M_2-space), 如果 X 具有 σ 闭包保持拟基. T_1 空间 X 称为 **$\mathbf{M_3}$ 空间** (M_3-space), 如果 X 具有 σ 垫状对基.

定理 7.4.1[80] $M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3 \Rightarrow$ 仿紧、完备正规.

证明 显然, $M_1 \Rightarrow M_2$.

(1) 证明 $M_2 \Rightarrow M_3$. 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 是正则空间 X 的 σ 闭包保持拟基, 每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathscr{P}_n = \{(B^\circ, \overline{B}) : B \in \mathscr{B}_n\}$, 则对任一 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}_n$,

$$\overline{\cup\{B^\circ : (B^\circ, \overline{B}) \in \mathscr{P}'\}} \subset \overline{\cup\{\overline{B} : (B^\circ, \overline{B}) \in \mathscr{P}'\}} = \cup\{\overline{B} : (B^\circ, \overline{B}) \in \mathscr{P}'\}.$$

显然, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 成为 X 的 σ 垫状对基.

(2) 证明 $M_3 \Rightarrow$ 仿紧、完备正规. 设 X 是 M_3 空间. 由 M_3 空间的定义 (定义 7.4.2) 易知 X 是正则空间, 再由仿紧性的刻画 (定理 5.1.4) 易知 M_3 空间是仿紧的, 从而是正规的 (推论 5.1.2). 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是空间 X 的 σ 垫状对基, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 如果 G 是 X 的开集, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$F_n = \overline{\cup\{P_1 : P_2 \subset G,\ (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n\}},$$

则 $F_n \subset \cup\{P_2 : P_2 \subset G, (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n\} \subset G$. 因 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是对基, $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 是 F_σ 集, 所以 X 是完备正规的. 证完.

度量空间显然是 M_1 空间, 但存在不可度量化的 M_1 空间 (见例 7.4.1).

例 7.4.1 Michael 空间 [280].

取正整数集 $\mathbb{N}$ (作为数直线的子空间) 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间 $\mathbb{N} \cup \{x\} = X$, 这里 $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \cup \{x\}$ 称为 Michael 空间. Michael 空间 X 是正则空间, 但不是第一可数的 (例 3.6.2), 从而不可度量化. 包含点 x 的所有开集形成的集族是闭包保持的, 连同由单点集 $\{n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ 形成的集族是空间 X 的 σ 闭包保持基, 所以 X 是 M_1 空间.

一个具有 σ 闭包保持基的空间, 如果是正则的第一可数空间, 它是否可度量化? J. Nagata 给出了一个不可度量化的第一可数的 M_1 空间, 此例较复杂 (见文献 [80] 的例 9.2).

也存在仿紧完备正规空间而不是 M_3 空间. Sorgenfrey 直线 (例 2.3.3) 就是这样的空间, 读者可以自己验证 (习题 7.20).

至于是否有 $M_2 \Rightarrow M_1$ 及 $M_3 \Rightarrow M_2$ (简称为 **M_i 空间问题**), Ceder[80] 当年未能解决. Gruenhage[163] 及 Junnila[216] 独立地证明了 $M_3 \Rightarrow M_2$. 下面我们将通过一系列准备工作叙述这一证明. 至于是否有 $M_2 \Rightarrow M_1$ 是迄今未解决的难题.

下面引入 M_3 空间的两种有效刻画: 利用层对应和利用 g 函数.

引理 7.4.1[319]　T_1 空间 X 是 M_3 空间当且仅当存在函数 H 使对每一开集 $U \subset X$ 及每一 $n \in \mathbb{N}$ 对应着闭集 $H(U,n)$, 满足:

(i) $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(U,n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(U,n)^\circ$;

(ii) 对开集 U, V, $U \subset V \Rightarrow H(U,n) \subset H(V,n)(n \in \mathbb{N})$.

证明　设 X 是 M_3 空间, $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是它的 σ 垫状对基, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 对每一开集 U 及 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$H(U,n) = \overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n,\ P_2 \subset U\}},$$

显然满足 (ii). 因为每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的, 所以

$$H(U,n) \subset \cup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n,\ P_2 \subset U\} \subset U.$$

对每一 $x \in U$, 因 $\mathscr{P}$ 是对基, 存在 $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ 使 $x \in P_1 \subset P_2 \subset U$, 所以 $x \in P_1 \subset H(U,n)$, 而 P_1 是开集, 于是 $x \in P_1 \subset H(U,n)^\circ$. 因此, $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(U,n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(U,n)^\circ$, 满足 (i).

反之, 设 X 具有上述对应 H, 满足 (i), (ii). 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{P}_n = \{(H(U,n)^\circ, U) : U \in \tau\},\quad \tau \text{ 是 } X \text{ 的拓扑}.$$

对每一开集 U 及 $x \in U$, 由 (i), 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使 $x \in H(U,m)^\circ \subset U$, 所以 $\mathscr{P}$ 是对基. 下证每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 设 $\tau' \subset \tau$. 置 $V = \cup\{U : U \in \tau'\}$, 则 $U \subset V \Rightarrow H(U,n) \subset H(V,n)$, 故有

$$\overline{\cup\{H(U,n)^\circ : U \in \tau'\}} \subset H(V,n) \subset V = \cup\{U : U \in \tau'\}.$$

所以 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 证完.

注记 1　上述定理中的对应 H 称为空间 X 的一个**层对应** (stratification[373]), 而具有层对应的 T_1 空间称为**层空间** (stratifiable space). 层空间是 M_3 空间的另一名称.

在上述层对应 H 中, 为了证明方便可以附加条件

(iii)　$H(U,n+1) \supset H(U,n)(n \in \mathbb{N})$.

因为如以 $H'(U,n) = \bigcup_{i\leqslant n} H(U,i)$ 代 $H(U,n)$, 则同样满足 (i), (ii). 利用层对应 H, 对 X 的开集 U, 记 $U_n = H(U,n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$, 简记为 $U \to \{U_n\}$. 这是 Borges[54] 最早定义的层对应, 并以此引入层空间的概念.

注记 2 上述层对应 H 可以从它的对偶形状出现 [191]: 存在函数 G 使对每一闭集 $F \subset X$ 及每一 $n \in \mathbb{N}$ 对应着一开集 $G(F,n)$, 满足:

(i′) $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(F,n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(F,n)}$;

(ii′) 对闭集 F, K, $F \subset K \Rightarrow G(F,n) \subset G(K,n)(n \in \mathbb{N})$;

(iii′) $G(F,n+1) \subset G(F,n)(n \in \mathbb{N})$.

上述对应称为层对应 G.

在以下的证明中, 常因方便起见, 采用层对应 H 或 $U \to \{U_n\}$ (注记 1), 或层对应 G (注记 2).

注记 3 上述层对应 H (或 G) 所满足的条件 (i) (或 (i′)) 如减弱为

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(U,n) \quad \Big(\text{或 } F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(F,n)\Big),$$

则相应 H (或 G) 称为**半层对应** (semi-stratification), 具有半层对应的空间称为**半层空间** (semi-stratifiable space[98, 99]). 对偶形状也是在 Henry[191] 的论文中给出的.

设 (X,τ) 是拓扑空间, 函数 $g : \mathbb{N} \times X \to \tau$ 称为 $\mathbb{N} \times X$ 上的 ***g* 函数**[183] (g-function), 如果对 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in X$, 有

(i) $x \in g(n,x)$;

(ii) $g(n+1,x) \subset g(n,x)$.

如未特别说明, g 函数均用 g 表示. 若 $g(n,x)$ 是 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数, 对 $A \subset X$, 记

$$g(n,A) = \cup\{g(n,x) : x \in A\}.$$

定理 7.4.2[186] T_1 空间 X 是 M_3 空间 (即层空间) 当且仅当存在 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数满足: 如 $y \notin$ 闭集 F, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin \overline{g(n,F)}$.

证明 设 X 是层空间, 具有层对应 G (引理 7.4.1 的注记 2). 对 $n \in \mathbb{N}$ 及 $x \in X$, 置 $g(n,x) = G(\{x\},n)$, 则 $g(n,x)$ 是 g 函数. 设 $y \notin$ 闭集 F. 由于层对应所满足的 (i′), 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin \overline{G(F,n)}$. 由 $g(n,x)$ 的定义及 G 所满足的 (ii′), $G(F,n) \supset \bigcup_{x\in F} G(\{x\},n)$, 所以 $y \notin \overline{g(n,F)}$.

反之, 设 $g(n,x)$ 是 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数. 对 X 的闭集 F 及 $n \in \mathbb{N}$, 置 $G(F,n) = \bigcup_{x\in F} g(n,x)$. 显然, $G(F,n)$ 满足 (ii′) 及 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(F,n) \supset F$. 如 $y \notin$ 闭集 F, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin \overline{g(n,F)} = \overline{G(F,n)}$. 故有 $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(F,n)}$, 满足 (i′). 所以 G 是 X 上的层对应, X 是层空间. 证完.

对半层空间有下列刻画.

定理 7.4.3[99] 下列论断等价:

(i) 空间 X 是半层空间;

(ii) 存在 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数满足: 如 $y \notin$ 闭集 F, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin g(n,F)$;

(iii) 存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足: 对 $x\in X$ 及序列 $\{x_n\}$, 如 $x\in g(n,x_n)$, 则 $x_n\to x$.

证明　同定理 7.4.2 知 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), 下面证明 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 设 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足 (ii). 如果存在 $x\in X$ 及序列 $\{x_n\}$, 使 $x\in g(n,x_n)$, 让 U 是点 x 的开邻域, 则 $x\notin$ 闭集 $X-U$, 于是存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\notin g(n,X-U)$, 那么当 $k\geqslant n$ 时, $x\notin g(k,X-U)$, 从而 $x_k\notin X-U$, 即 $x_k\in U$. 故 $x_n\to x$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足 (iii). 如果 $y\notin$ 闭集 F, 且对每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $y\in g(n,F)$, 则存在 $x_n\in F$ 使 $y\in g(n,x_n)$, 于是 $x_n\to y\in F$, 矛盾. 证完.

定理 7.4.4[318]　T_1 空间 X 是 M_2 空间当且仅当存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足:

(i) 如 $y\notin$ 闭集 F, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $y\notin\overline{g(n,F)}$;

(ii) $y\in g(n,x)\Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$.

证明　设 X 是 M_2 空间, $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 X 的 σ 闭包保持拟基, 每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 因 X 是正则的, $\mathscr{B}$ 的元可作为闭集. 置

$$g(n,x)=X-\cup\{B:B\in\mathscr{B}_i,\ i\leqslant n,\ x\notin B\},\tag{7.4.1}$$

则 $g(n,x)$ 是 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数. 显然 $g(n,x)$ 满足 (ii). 对 $y\notin$ 闭集 F, $y\in X-F$. 因 $\mathscr{B}$ 是 X 的拟基, 存在 $B\in\mathscr{B}_n$ 使 $y\in B^\circ\subset B\subset X-F$, 于是 $B\cap F=\varnothing$. 由 (7.4.1), $B^\circ\cap g(n,x)=\varnothing$ 对所有 $x\in F$ 成立. 故 $g(n,x)$ 满足 (i).

反之, 设存在 g 函数满足 (i), (ii). 由 (i), X 是正则的. 置

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}_n=\{g(n,x):x\in X\},\\&\mathscr{B}_n=\{X-\cup\mathscr{G}_n':\mathscr{G}_n'\subset\mathscr{G}_n\},\\&\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n.\end{aligned}$$

对 X 的开集 U 及 $x\in U$, $x\notin X-U$. 由 (i), 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\notin\overline{g(n,X-U)}$. 令 $\mathscr{G}_n'=\{g(n,y):y\in X-U\}\subset\mathscr{G}_n$. 由于

$$x\notin\overline{\cup\mathscr{G}_n'}\Rightarrow x\in X-\overline{\cup\mathscr{G}_n'}=(X-\cup\mathscr{G}_n')^\circ\subset X-\cup\mathscr{G}_n'\subset U,$$

而 $X-\cup\mathscr{G}_n'\in\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}$, 所以 $\mathscr{B}$ 是拟基. 下证每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的.

为了证明 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的, 只要证明 $\{\cup\mathscr{G}_n':\mathscr{G}_n'\subset\mathscr{G}_n\}$ 是内核保持的. 设对每一 $\alpha\in A$, $\mathscr{G}_n(\alpha)\subset\mathscr{G}_n$, 要证明 $\{\cup\mathscr{G}_n(\alpha):\alpha\in A\}$ 的交 $\bigcap_{\alpha\in A}(\cup\mathscr{G}_n(\alpha))$ 是开集. 设 $y\in\bigcap_{\alpha\in A}(\cup\mathscr{G}_n(\alpha))$. 对每一 $\alpha\in A$, $y\in\cup\mathscr{G}_n(\alpha)\Rightarrow y\in\mathscr{G}_n(\alpha)$ 的某一元 $g(n,x)$. 由

(ii), $g(n,y) \subset g(n,x) \subset \cup\mathscr{G}_n(\alpha)$. 从而 $g(n,y) \subset \bigcap_{\alpha\in A}(\cup\mathscr{G}_n(\alpha))$, 故 $\bigcap_{\alpha\in A}(\cup\mathscr{G}_n(\alpha))$ 是开集. 证完.

同样的证法对 σ 空间也成立 (相应于定理 7.4.4 中 (i) 可去掉闭包符号).

定理 7.4.5[187] 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足:

(i) 如 $y \notin$ 闭集 F, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $y\notin g(n,F)$;

(ii) $y\in g(n,x) \Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$.

证明 由于正则 σ 空间可以用 σ 闭包保持闭网络刻画 (定理 7.3.5), 证法同定理 7.4.4. 证完.

比较定理 7.4.2 与定理 7.4.4 中对 M_3, M_2 空间的刻画, 后者比前者多一条件 "(ii) $y\in g(n,x) \Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$". 为了证明 M_3 空间是 M_2 空间, 要构造 M_3 空间中的 g 函数, 不仅满足 (i) 且满足 (ii). 而在定理 7.4.4 的充分性证明中要证明 $\{\cup\mathscr{G}_n' : \mathscr{G}_n' \subset \mathscr{G}_n\}$ 是内核保持的, 所以我们要求 $\mathscr{G}_n$ 是点有限的 (从而内核保持的). 因此, 先把 $g(n,x)$ 适当 "扩大些", 然后取其加细使达到要求.

设有拓扑空间 (X,τ) 上的函数 $N: X\to\tau$ 使对每一 $x\in X$ 确定着 x 的开邻域 $N(x)$. 置

$$N^2(x) = \cup\{N(y) : y\in N(x)\},$$

$$N^3(x) = \cup\{N(z) : z\in N^2(x)\}.$$

引理 7.4.2[216] 设 (X,τ) 是弱仿紧的半层空间, $N: X\to\tau$ 使对每一 $x\in X$ 确定着 x 的开邻域 $N(x)$, 则存在 X 的点有限的开覆盖 $\mathscr{V}$, 使对每一 $x\in X$, $\cap\{V\in\mathscr{V} : x\in V\}\subset N^3(x)$.

证明 因 X 是半层空间, 由定理 7.4.3, 存在 g 函数满足:

$$\text{对 } x\in X \text{ 及序列 } \{x_n\},\quad x\in g(n,x_n) \Rightarrow x_n\to x. \tag{7.4.2}$$

不妨设 $g(1,x)\subset N(x)$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 让 $\mathscr{G}_k = \{g(k,x) : x\in X\}$, $\mathscr{Q}_k$ 是 $\mathscr{G}_k$ 的点有限的开加细覆盖. 置

$$H_k = \{x\in X : x\in g(k,y) \Rightarrow y\in N(x)\}. \tag{7.4.3}$$

易知 $H_k\subset H_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$. 由于 (7.4.2) 知对每一 $x\in X$, $x\in$ 某 H_k (不然的话, 对每一 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $y_k\in X$ 使 $x\in g(k,y_k)$ 且 $y_k\notin N(x)$, 由 (7.4.1), $y_k\to x$, 矛盾). 设 $k(x)$ 是使 $x\in\overline{H}_n$ 的最小 n. 置

$$Q_n(x) = \cap\{Q\in\mathscr{Q}_i : i\leqslant n, x\in Q\}\quad (n\in\mathbb{N});$$
$$V(x) = Q_{k(x)}(x) - \cup\{\overline{H}_i : i < k(x)\}.$$

易知 $\mathscr{V}=\{V(x):x\in X\}$ 是 X 的点有限的开覆盖. 下证对每一 $x\in X$, 存在 $y,z\in X$ 使 $\cap\{V\in\mathscr{V}:x\in V\}\subset N(y)$, 而 $y\in N(z)$ 及 $z\in N(x)$ 以完成证明.

设 $m=k(x)$. 因 $x\in\overline{H}_m$, x 的开邻域 $g(m,x)\cap Q_m(x)$ 与 H_m 相交. 故存在 $z\in H_m\cap g(m,x)\cap Q_m(x)$. 从而 $z\in g(m,x)\subset N(x)$. 由于 $\mathscr{Q}_m$ 加细 $\mathscr{G}_m$, 存在 $y\in X$ 使 $Q_m(x)\subset g(m,y)\subset N(y)$, 所以

$$\cap\{V\in\mathscr{V}:x\in V\}\subset V(x)\subset Q_m(x)\subset N(y).$$

余下来, 只要证 $y\in N(z)$. 由于 $z\in Q_m(x)\subset g(m,y)$, 而 $z\in H_m$, 由 (7.4.3), 所以 $y\in N(z)$. 证完.

定理 7.4.6 (Gruenhage-Junnila 定理 [163, 216]) M_3 空间是 M_2 空间.

证明 设 X 是 M_3 空间 (即层空间), 利用定理 7.4.4 证明 X 是 M_2 空间. 由定理 7.4.2, 存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足定理 7.4.4 的 (i), 即如 $y\notin$ 闭集 F, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $y\notin\overline{g(n,F)}$. 固定 $n\in\mathbb{N}$, 把 g 函数看成引理 7.4.2 中的 $N(x)$, 类似地引入:

$$g^2(n,x)=g(n,g(n,x)),$$
$$g^3(n,x)=g(n,g^2(n,x))=g(n,g(n,g(n,x))).$$

$g^3(n,x)$ 仍是 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数. 下面证明 $g^3(n,x)$ 仍满足 (i).

因 $g(n,x)$ 满足 (i), 如 $y\notin$ 闭集 F, 则存在 $k\in\mathbb{N}$ 使 $y\notin\overline{g(k,F)}$, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant k$ 使 $y\notin\overline{g(m,\overline{g(k,F)})}$, 从而存在 $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant m$ 使

$$y\notin\overline{g(n,\overline{g(m,\overline{g(k,F)})})}\supset\overline{g(n,g(n,g(n,F)))}=\overline{g^3(n,F)}.$$

到此证明了 $g^3(n,x)$ 满足 (i).

由引理 7.4.2, 对 $n\in\mathbb{N}$, 存在 X 上的点有限开覆盖 $\mathscr{V}_n$ 使

$$\cap\{V\in\mathscr{V}_n:x\in V\}\subset g^3(n,x)\ (x\in X). \tag{7.4.4}$$

置

$$g'(n,x)=\cap\{V\in\mathscr{V}_i:i\leqslant n,\ x\in V\}. \tag{7.4.5}$$

易知 $g'(n,x)$ 是一 g 函数. 由 (7.4.4), $g'(n,x)\subset g^3(n,x)$, 易知 $g'(n,x)$ 满足 (i). 由 (7.4.5), 易验证: 如 $y\in g'(n,x)=\cap\{V\in\mathscr{V}_i:i\leqslant n,\ x\in V\}$, 则

$$\cap\{V\in\mathscr{V}_i:i\leqslant n,\ y\in V\}\subset\cap\{V\in\mathscr{V}_i:i\leqslant n,\ x\in V\},$$

即 $g'(n,y)\subset g'(n,x)$. 所以 $g'(n,x)$ 又满足定理 7.4.4 的 (ii). X 是 M_2 空间. 证完.

通过证明 $\mathrm{M}_3 \Rightarrow \mathrm{M}_2$ 的一系列工作, 这里以独特的方式得到下面重要结果.

定理 7.4.7[186] M_3 空间 (即层空间) 是 σ 空间.

证明 由定理 7.4.4、定理 7.4.5 及定理 7.4.6 得证. 证完.

注记 M_3 空间是 σ 空间的最初证明是异常困难的. 首先由 Heath[186] 证明于 1969 年, 未公布其证法, 后 Heath 和 Hodel[187] 给出了 σ 空间的如下刻画:

(*) "正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足: 对 X 中的点 x 及序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $x\in g(n,x_n)$ 且 $x_n\in g(n,y_n)$, 则 $y_n\to x$."

由此刻画 (*) 证明 M_3 空间是 σ 空间就比较容易 (读者可自证, 习题 7.21). 至于刻画 (*) 的证明也够困难, 证法非常精致, 将在 7.5 节开始时叙述 (见定理 7.5.1), 以免冲淡本节主题.

下面叙述 M_i 空间的一些性质. 首先, 同 σ 空间的可数积的证法 (定理 7.3.3), 有下述结果.

定理 7.4.8[80] 可数个 M_i 空间的积是 $\mathrm{M}_i(i=1,2,3)$ 空间.

以上性质 (定理 7.4.8) 为 M_i $(i=1,2,3)$ 空间所共有. 以下定理 7.4.9、定理 7.4.10 及推论 7.4.1 对 M_2 空间 (即 M_3 空间或层空间) 成立. 下面的证明有时用 M_2 空间的定义, 有时用 M_3 空间的层对应的刻画.

定理 7.4.9[80] M_2 空间 (即 M_3 空间或层空间) 具有遗传性.

证明 下面就 M_2 空间证明. 设 X 是 M_2 空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 闭包保持拟基, 不妨设 $\mathscr{B}$ 的元都是 X 的闭集. 对 $A\subset X$, 易验证, $\mathscr{B}|A=\{B\cap A: B\in\mathscr{B}\}$ 是子空间 A 的 σ 闭包保持拟基, 所以 A 是 M_2 空间. 证完.

下面证明 M_3 空间 (即层空间) 为闭映射所保持, 为此先引入下述引理.

引理 7.4.3[54] 设 X 是层空间. 对 X 的每一对集 (A,U), 这里 A 是闭集, U 是开集, 则存在开集 $U_A\subset U$ 满足:

(i) 对闭集 $A,B,A\subset B$; 开集 $U,V,U\subset V$; 有开集 U_A,V_B 满足 $U_A\subset V_B$;

(ii) $A\cap U\subset U_A\subset \overline{U}_A\subset A\cup U$;

(ii′) 当 $A\subset U$ 时, 有 $A\subset U_A\subset\overline{U}_A\subsetneq U$ ((ii) 的特款).

证明 设 X 上的层对应为 $U\to\{U_n\}$ (引理 7.4.1 的注记 1). 对每一对闭、开集 (A,U), 置

$$U_A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_n-\overline{(X-A)_n}\},$$

立得 (i). 下证 $A\cap U\subset U_A$. 设 $x\in A\cap U$, 则 $x\in U$, 存在 $k\in\mathbb{N}$ 使 $x\in U_k$, 而 $x\in A$, 于是 $x\notin X-A$, 所以 $x\in U_k-\overline{(X-A)_k}\subset U_A$ (由层对应, $\overline{(X-A)_k}\subset X-A$). 再证 $\overline{U}_A\subset A\cup U$. 如 $x\notin A\cup U$, 则 $x\notin A$, 取 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in(X-A)_n$, 则 $(X-A)_n\cap(X-\overline{U}_n)$ 是 x 的邻域与 U_A 不交, 故得 (ii). (ii′) 显然由 (ii) 得出. 证完.

定理 7.4.10[54] 连续的闭映射保持层空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是层空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, $U \to \{U_n\}$ 是 X 上的层对应. 显然, Y 是 T_1 空间. 对空间 Y 的开集 V, 置 (使用引理 7.4.3 的记号)

$$T_n = f^{-1}(V)_n, \quad S_n = f^{-1}(f(\overline{T}_n)),$$
$$Q_n = f^{-1}(V)_{S_n}, \quad V_n = f(Q_n)^{\circ},$$

则有

(a) $f(\overline{T}_n) \subset V_n$.

由上述引理 7.4.3 的 (ii′) 的前半, 开集 Q_n 包含着饱和集 S_n, 因 f 是连续闭映射, 由推论 1.5.1, 知 $f(Q_n)$ 是 $f(\overline{T}_n)$ 的邻域, 所以 $f(\overline{T}_n) \subset V_n$.

(b) $\overline{V}_n \subset V$.

因 $\overline{V}_n \subset \overline{f(Q_n)} = f(\overline{Q}_n)$, 而由引理 7.4.3 的 (ii′) 的后半, $\overline{Q}_n \subset f^{-1}(V)$, 从而 $f(\overline{Q}_n) \subset V$, 故得 $\overline{V}_n \subset V$.

(c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = V$.

由已证 (b) 及 (a), $V \supset V_n \supset f(T_n)$, 所以

$$V \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(T_n) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\Big) = V,$$

故有 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = V$.

设 V, W 是 X 中的开集, 且 $V \subset W$. 因 X 是层空间, T_n、S_n 仍保持相应的次序, Q_n 保持相应的次序由引理 7.4.3 的 (i) 得到, 从而 V_n 保持相应次序, 即 $V_n \subset W_n (n \in \mathbb{N})$.

综上所述, $V \to \{V_n\}$ 是空间 Y 的层对应, Y 是层空间. 证完.

Ceder[80] 曾证明 M_3 空间满足局部有限闭和定理, 利用定理 5.5.5 和定理 7.4.10, 可得较一般的结果.

推论 7.4.1[356] 层空间满足遗传闭包保持闭和定理.

Borges[54] 证明了更有力的定理: 层空间满足控制闭和定理.

定理 7.4.9 和定理 7.4.10 是否对 M_1 空间也成立? 也就是 M_1 空间的任何子空间是否 M_1? M_1 空间是否为连续闭映射所保持? 迄今尚未解决. 从推论 7.4.4 可知: 上述两问题中的任何一个的肯定的或否定的解决等同于是否有 $M_3 \Rightarrow M_1$?

关于 M_1 空间的子空间, 显然, M_1 空间的开子空间是 M_1 的. 此外, 有如下命题.

命题 7.4.1[204] M_1 空间的稠子空间是 M_1 的. 从而 M_1 空间 X 是遗传 M_1 空间当且仅当 X 的每一闭子空间是 M_1 的 (即对 M_1 空间来说, 闭遗传性 $\Rightarrow$ 遗传性).

证明 设 D 是 M$_1$ 空间 X 的稠子集, 即 $\overline{D}=X$. 易证对 X 的任一开集 B 有 $\overline{B\cap D}=\overline{B}$ (习题 1.18). 设 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 M$_1$ 空间 X 的 σ 闭包保持基, 每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 置 $\mathscr{B}_n|D=\{B\cap D: B\in\mathscr{B}_n\}$. 由于 $\overline{B\cap D}=\overline{B}$, $\mathscr{B}_n|D$ 在 D 是闭包保持的. 从而 $\cup\{\mathscr{B}_n|D: n\in\mathbb{N}\}$ 是子空间 D 的 σ 闭包保持基, D 是 M$_1$ 空间.

如果 M$_1$ 空间 X 的每一闭集是 M$_1$ 的, 设 A 是 X 的任意子集, 则 $\overline{A}$ 是 M$_1$ 的, 从而知 A 是 M$_1$ 的. 证完.

关于 M$_1$ 空间为怎样的闭映射保持, 有下面的定理 7.4.11 及推论 7.4.9 (下面述及的可数双商映射见定义 5.2.1, 拟开映射及正则闭集见定理 5.5.7 前的有关叙述).

引理 7.4.4[133] 设 $f: X\to Y$ 是连续的拟开、闭映射, 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的闭包保持的开集族, 则 $\mathscr{C}=\{f(B)^\circ: B\in\mathscr{B}\}$ 是 Y 的闭包保持的开集族.

证明 下面记集族 $\mathscr{U}$ 的元的并为 $\mathscr{U}^*=\cup\{U: U\in\mathscr{U}\}$.

设 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$ 及 $y\in\overline{\cup\{f(B)^\circ: B\in\mathscr{B}'\}}$, 由于 $f(B)\supset f(B)^\circ$, 故有

$$f(\overline{\mathscr{B}'^*})\supset f(\mathscr{B}'^*)\supset\cup\{f(B)^\circ: B\in\mathscr{B}'\}.$$

因 f 是闭映射, $f(\overline{\mathscr{B}'^*})$ 是闭集, 于是

$$f(\overline{\mathscr{B}'^*})\supset\overline{\cup\{f(B)^\circ: B\in\mathscr{B}'\}}\ni y,$$

从而 $f^{-1}(y)\cap\overline{\mathscr{B}'^*}\neq\varnothing$. 由于 $\mathscr{B}'$ 是闭包保持的, 存在 $B\in\mathscr{B}'$ 使 $f^{-1}(y)\cap\overline{B}\neq\varnothing$. 设 U 是 y 的任一开邻域, 则 $f^{-1}(U)\cap B\neq\varnothing$. 由于 f 是拟开映射, 不空开集 $f^{-1}(U)\cap B$ 的像的内核不空, 而

$$f(f^{-1}(U)\cap B)^\circ=(U\cap f(B))^\circ=U\cap f(B)^\circ,$$

知 $U\cap f(B)^\circ$ 不空. 这说明 y 的任一开邻域 U 与 $f(B)^\circ$ 相交, 即 $y\in\overline{f(B)^\circ}$. 这证明了 $\mathscr{C}$ 是闭包保持的. 证完.

定理 7.4.11[133] 连续的拟开、可数双商闭映射保持 M$_1$ 空间.

证明 设 $f: X\to Y$ 是由 M$_1$ 空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续的拟开、可数双商闭映射. 设 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$ 是 M$_1$ 空间 X 的 σ 闭包保持基, 每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 注意, 如果 $\mathscr{U}$ 是闭包保持集族, 则 $\mathscr{U}$ 的所有子族的元的并所形成的集族仍是闭包保持的. 可以假设 $\mathscr{B}_n$ 的任一子族的元的并是 $\mathscr{B}_n$ 的一个元. 此外, 不失一般性, 可设 $\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. 置 $\mathscr{C}=\{f(B)^\circ: B\in\mathscr{B}\}$, 由引理 7.4.4, 知 $\mathscr{C}$ 是空间 Y 的 σ 闭包保持开集族.

对每一 $y\in Y$, 设 V 是 y 的开邻域, 因 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$ 使 $f^{-1}(y)\subset\mathscr{B}'^*\subset f^{-1}(V)$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{B}'_n=\mathscr{B}'\cap\mathscr{B}_n$, 则

$$\mathscr{B}'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}'_n,\quad f^{-1}(y)\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}'^*_n\subset f^{-1}(V).$$

由于 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, 序列 $\{\mathscr{B}_n'^*\}$ 是递增的. 因 f 是可数双商映射, 存在正整数 m 使 $y \in f(\mathscr{B}_m'^*)^\circ \subset V$. 由假设存在 $B \in \mathscr{B}_m \subset \mathscr{B}$, 使 $B = \mathscr{B}_m'^*$, 所以 $f(B)^\circ \in \mathscr{C}$ 及 $y \in f(B)^\circ \subset V$. 到此证明了 $\mathscr{C}$ 是空间 Y 的 σ 闭包保持基. 显然, Y 是正则的, 所以 Y 是 M_1 空间. 证完.

回忆 6.6 节中介绍过的不可约映射的概念. 映射 $f: X \to Y$ 称为不可约的, 如果 f 不能把 X 的任何真闭子集映成整个空间 Y. 此定义等价于对 X 的任何不空的开集 U 总能包含着某一 $y \in Y$ 的纤维, 即存在 $y \in Y$ 使 $U \supset f^{-1}(y)$. 对 $k \in \mathbb{N}$, 映射 $f: X \to Y$ 称为 **k 对一的** (k-to-one), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 正好包含着 X 中 k 个点.

推论 7.4.2 下列映射保持 M_1 空间:

(i) 不可约的完备映射 [56];

(ii) 既开且闭的连续映射 [133];

(iii) k 对一的连续开映射 [162].

证明 由于完备映射 $\Rightarrow$ 双商、闭映射 $\Rightarrow$ 可数双商、闭映射, 而易证伪开的不可约映射是拟开映射 (习题 7.23), 所以由定理 7.4.11 得 (i). 因为开映射是拟开、可数双商映射, 于是由定理 7.4.11 得 (ii). 不难证明 T_2 空间上的 k 对一的连续开映射是闭的 (习题 7.24), 从而由 (ii) 得 (iii). 证完.

注记 存在着开 (从而拟开、可数双商)、闭映射既不是不可约的, 又不是完备的. 如设 X 是可数紧而不是紧的空间, Y 是第一可数的, f 是积空间 $X \times Y$ 到空间 Y 上的投影, 则 f 是闭映射 (习题 3.16). 此外, 有限对一的连续开映射未必能保持 M_1 空间 (例 4.4.1).

推论 7.4.3 [133, 204] M_1 空间满足局部有限正则闭和定理.

证明 由定理 7.4.11 和定理 5.5.8 得证. 证完.

下面叙述 Heath-Junnila 定理 (定理 7.4.12). 由此可看到 $\mathrm{M}_3 \Rightarrow \mathrm{M}_1$ 问题联系着 M_1 空间的遗传性及映射性质.

引理 7.4.5 正则空间 X 是 M_1 空间当且仅当 X 具有由正则闭集组成的 σ 闭包保持拟基.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基, 则 $\overline{\mathscr{B}} = \{\overline{B} : B \in \mathscr{B}\}$ 是 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 反之, 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基, 则 $\mathscr{B}^\circ = \{B^\circ : B \in \mathscr{B}\}$ 是 X 的 σ 闭包保持基. 证完.

引理 7.4.6 [388] 设 X 是正则 σ 空间. 若 $\mathscr{F}$ 是 X 的闭包保持闭集族, 则存在 X 的 σ 闭离散稠子集 D, 使对每一 $F \in \mathscr{F}$, $F \cap D$ 在 F 中稠密.

证明 由定理 7.4.5 和定理 7.4.3, 正则 σ 空间是半层空间. 存在空间 X 的半层对应 G (引理 7.4.1 的注记 3) 满足:

(i) 对闭集 F, $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G(F, n)$, $G(F, n)$ 是开集;

(ii) 对闭集 F, K, $F \subset K \Rightarrow G(F,n) \subset G(K,n)(n \in \mathbb{N})$.

令

$$Q(\mathscr{F}') = \cap\mathscr{F}' - \cup(\mathscr{F} - \mathscr{F}'), \quad \mathscr{F}' \subset \mathscr{F},$$

其中 $Q(\varnothing) = X - \cup\mathscr{F}$. 那么 $\{Q(\mathscr{F}') : \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}\}$ 是 X 的覆盖. 对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$Q_n(\mathscr{F}') = \cap\mathscr{F}' - G(\cup(\mathscr{F} - \mathscr{F}'), n), \quad \mathscr{F}' \subset \mathscr{F},$$

其中 $Q_n(\varnothing) = X - G(\cup\mathscr{F}, n)$. 那么 $Q(\mathscr{F}') = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\mathscr{F}')$ 且 $\{Q_n(\mathscr{F}') : \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}\}$ 是 X 的离散闭集族.

事实上, 对 $x \in X$, 定义

$$(\mathscr{F})_x = \{F \in \mathscr{F} : x \in F\}, \quad U = G(\{x\}, n) - \cup(\mathscr{F} - (\mathscr{F})_x),$$

则 U 是开集且 $x \in U$. 对 $(\mathscr{F})_x \neq \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$, 如果存在 $F \in \mathscr{F}' - (\mathscr{F})_x$, 则

$$Q_n(\mathscr{F}') \subset F \text{ 且 } U \subset X - \cup(\mathscr{F} - (\mathscr{F})_x) \subset X - F,$$

于是 $Q_n(\mathscr{F}') \cap U = \varnothing$; 如果存在 $F \in (\mathscr{F})_x - \mathscr{F}'$, 那么

$$Q_n(\mathscr{F}') \subset X - G(\cup(\mathscr{F} - \mathscr{F}'), n) \subset X - G(F, n) \subset X - G(\{x\}, n),$$

从而 $Q_n(\mathscr{F}') \cap U = \varnothing$.

令

$$\mathscr{Q} = \{Q_n(\mathscr{F}') : \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}, \ n \in \mathbb{N}\},$$

则 $\mathscr{Q}$ 是 $\{Q(\mathscr{F}') : \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}\}$ 的 σ 离散闭加细. 设 $\mathscr{H}$ 是 X 的 σ 离散闭网络. 对 $H \in \mathscr{H}$, $Q \in \mathscr{Q}$, 若 $H \cap Q \neq \varnothing$, 取定 $x(H,Q) \in H \cap Q$. 定义

$$D = \{x(H,Q) : H \in \mathscr{H}, \ Q \in \mathscr{Q}, \ H \cap Q \neq \varnothing\},$$

则 D 满足引理的要求. 显然, D 是 X 的 σ 闭离散集. 对 $F \in \mathscr{F}$, 及 F 的非空开集 W, 存在 X 的开集 V, 使 $V \cap F = W$. 取定 $y \in W$. 那么存在 $H \in \mathscr{H}$, $Q \in \mathscr{Q}$, 使 $y \in H \cap Q \subset H \subset V$. 记 $Q = Q_n(\mathscr{F}')$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. 由于 $Q \cap F \neq \varnothing$, 于是 $F \in \mathscr{F}'$, 从而 $Q \subset F$, 因此 $x(H,Q) \in H \cap Q \subset V \cap F = W$, 故 $F \cap D$ 是 F 的稠子集. 同理可证, D 是 X 的稠子集. 证完.

定理 7.4.12 (Heath-Junnila 定理 [188]) 每一 M$_3$ 空间是某一 M$_1$ 空间在完备映射下的像.

证明 设 X 是 M$_3$ 空间, $S = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ 是数直线的子空间. 作集合 $Z = X \times S$, 赋予下述拓扑: $X \times (S - \{0\})$ 的点取为 Z 的孤立点; $X \times \{0\}$ 中点的

邻域基取为 $X\times S$ 中相应点在积拓扑下的邻域基. 显然, Z 是正则空间, 并且 X 同胚于 Z 的闭子空间 $X\times\{0\}$. 先证明 Z 是 M_1 空间.

对 $B\subset X$, 引入记号

$$B[0]=B\times\{0\},$$

$$B[n]=B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant n\})\ (n\in\mathbb{N}).$$

若 B 是 X 的闭集, 那么 $B[n]=\overline{B[n]-B[0]}$, 于是 $B[n]$ 是 Z 的正则闭集.

由定理 7.4.6, X 具有闭拟基 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 置

$$\mathscr{U}_{nm}=\{B[m]:B\in\mathscr{B}_n\}\quad(n,\ m\in\mathbb{N}),$$

$$\mathscr{V}_n=\{\{(x,1/n)\}:x\in X\}\quad(n\in\mathbb{N}),$$

则 $\mathscr{U}_{nm}$ 是 Z 的闭包保持的正则闭集族, $\mathscr{V}_n$ 是 Z 的离散开、闭集族, 从而

$$\Big(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_{nm}\Big)\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n\Big)$$

是 Z 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 由引理 7.4.5, Z 是 M_1 空间.

下面构造 Z 的子集 Y, 使 Y 仍是 M_1 空间且 Y 到 X 上的投影是完备映射.

由引理 7.4.6, X 存在稠子集 $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$, 其中 D_n 是 X 的闭离散子空间且 $D_n\subset D_{n+1}$, 满足对 $B\in\mathscr{B}, B\cap D$ 是 B 的稠子集. 定义

$$Y=X[0]\cup(\cup\{D_n\times\{1/n\}:n\in\mathbb{N}\}).$$

其次证明 Y 是 M_1 空间.

为此验证: 对 $B\in\mathscr{B}$, 子集 $(B[n]-B[0])\cap Y$ 在子空间 Y 中的闭包

$$\mathrm{Cl}_Y((B[n]-B[0])\cap Y)=B[n]\cap Y. \tag{7.4.6}$$

事实上, 显然,

$$\mathrm{Cl}_Y((B[n]-B[0])\cap Y)\subset\overline{B[n]-B[0]}\cap Y=B[n]\cap Y.$$

若 $x\in B$, 设 W 是 x 在 X 的邻域, 对 $k\geqslant n$, 由于 $B\cap D$ 稠于 B, 存在 $m\geqslant k$ 和 $x'\in B\cap W\cap D_m$, 那么 $(x',1/m)\in W[k]\cap((B[n]-B[0])\cap Y)$, 因而

$$B[n]\cap Y\subset\mathrm{Cl}_Y((B[n]-B[0])\cap Y).$$

至此证明了 (7.4.6) 式. 这表明, $B[n]\cap Y$ 是 Y 的正则闭集, 从而

$$\Big(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}}\mathscr{U}_{nm}|Y\Big)\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_n|Y\Big)$$

是 Y 的 σ 闭包保持的正则闭拟基. 故 Y 是 M_1 空间.

最后, 证明 Y 到 X 上的投影 f 是完备映射.

显然, f 是紧映射. 下证 f 是闭的. 对 Y 的闭集 F, 若 $x \in X - f(F)$, 那么 $(x,0) \notin F$, 于是存在 x 的开邻域 V 和 $m \in \mathbb{N}$, 使 $V[m] \cap F = \varnothing$. 对 $n < m$, 由于 $x \notin f(F \cap (X \times \{1/n\})) \subset D_n$, 所以存在 x 的开邻域 V_n, 使 $V_n \cap f(F \cap (X \times \{1/n\})) = \varnothing$. 令 $U = V \cap (\bigcap_{n<m} V_n)$, 那么 U 是 x 的开邻域且 $U \cap f(F) = \varnothing$, 从而 $f(F)$ 是闭集, 故 f 是闭映射. 证完.

推论 7.4.4[188] 下列论断等价:

(i) 每一 M_3 空间是 M_1 空间;

(ii) 每一 M_1 空间的每一子空间是 M_1 空间;

(iii) 每一 M_1 空间的每一闭子空间是 M_1 空间;

(iv) M_1 空间在连续闭映射下的像是 M_1 空间;

(v) M_1 空间在完备映射下的像是 M_1 空间.

证明 由于 M_3 空间是遗传的 (定理 7.4.9) 及 M_3 空间为连续闭映射保持 (定理 7.4.10) 可得 (i) $\Rightarrow$ (ii) 及 (i) $\Rightarrow$ (iv). (ii) $\Rightarrow$ (iii) 及 (iv) $\Rightarrow$ (v) 是平凡的. 在定理 7.4.12 的证明中, 我们证明了每一个 M_3 空间可以同胚于一个 M_1 空间的闭子空间, 所以 (iii) $\Rightarrow$ (i). (v) $\Rightarrow$ (i) 由定理 7.4.12 得证. 证完.

回忆拓扑空间中在一点是局部有限集族、闭包保持集族的概念. 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为在点 $x \in X$ 是局部有限的, 如果存在 x 的邻域 U 使 U 仅与 $\mathscr{P}$ 中的有限个元相交; 称集族 $\mathscr{P}$ 在点 $x \in X$ 是闭包保持的, 若对每一 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$, 如果 $x \in \overline{\cup \mathscr{P}'}$, 则 $x \in \cup \overline{\mathscr{P}'} = \cup\{\overline{P} : P \in \mathscr{P}'\}$. 对 $A \subset X$, 如果 $\mathscr{P}$ 在 A 的每一点是局部有限的 (闭包保持的), 则称 $\mathscr{P}$ 在 A (或关于 A) 是局部有限的 (闭包保持的).

定理 7.4.13[80] M_2 空间 X 的每一闭集具有闭包保持的邻域拟基, 即对每一闭集 A, 存在闭包保持集族 $\mathscr{W}$ 满足: 对每一开集 $G \supset A$, 存在 $V \in \mathscr{W}$ 使

$$A \subset V^\circ \subset V \subset G.$$

证明 设 A 是 M_2 空间 X 的闭集. 由 X 的层对应 (引理 7.4.1 的注记 2), 存在递减开集序列 $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使每一 $O_n \supset A$, 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{O}_n = A$. 令 $\overline{O}_n = H_n$, 则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = A$. 设 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$ 是 X 的 σ 闭包保持拟基, 每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的闭集族. 置 $\mathscr{U}_n = \mathscr{B}_n|H_n = \{B \cap H_n : B \in \mathscr{B}_n\}$, 则 $\mathscr{U}_n$ 仍是闭包保持闭集族. 因 $\mathscr{U}_n^* = \cup\{U : U \in \mathscr{U}_n\} \subset H_n$ $(n \in \mathbb{N})$, 而 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $X - A$ 是局部有限的, 所以 $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ 在 $X - A$ 是闭包保持的. 设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的所有子族的并所成的集族, 则 $\mathscr{V}$ 在 $X - A$ 是闭包保持的. 置 $\mathscr{W} = \{V \in \mathscr{V} : A \subset V^\circ\}$, $\mathscr{W}$ 在 X 中是闭包保持的 ($\mathscr{W}$ 的每一元包含 A).

下证 $\mathscr{W}$ 是 A 的邻域拟基. 设 G 是包含 A 的开集. 因 $\mathscr{B}$ 是 X 的拟基, 对每一 $x \in A$ 存在 $n(x) \in \mathbb{N}$, $B_x \in \mathscr{B}_{n(x)}$ 使 $x \in B_x^\circ \subset B_x \subset G$. 置

$$V = \cup\{B_x \cap H_{n(x)} : x \in A\},$$

则 $V \in \mathscr{V}$, 且易知 $A \subset V^\circ \subset V \subset G$, 所以 $V \in \mathscr{W}$. 故 $\mathscr{W}$ 是集 A 的邻域拟基. 证完.

定理 7.4.14[56] 设 X 是集态正规的 σ 空间, 且 X 的每一闭集具有 σ 闭包保持的邻域拟基, 则 X 是 M_2 空间.

证明 因 X 是正则 σ 空间, 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 离散网络, 每一 $\mathscr{P}_n = \{P_{\alpha,n} : \alpha \in A_n\}$ 是离散闭集族. 由集态正规性, 存在离散开集族 $\{Q_{\alpha,n} : \alpha \in A_n\}$ 使 $P_{\alpha,n} \subset Q_{\alpha,n}$, $\alpha \in A_n$. 设 $\mathscr{B}_{\alpha,n} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 是闭集 $P_{\alpha,n}$ 的 σ 闭包保持邻域拟基, 每一 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 是闭包保持的. 不妨设 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 的每一元包含在 $Q_{\alpha,n}$ 内. 对每一对正整数 n, k, 让 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 按 α 的指标集 A_n 取并, 得集族

$$\mathscr{C}_{n,k} = \bigcup_{\alpha\in A_n} \mathscr{B}_{\alpha,n,k}.$$

由于 $\mathscr{B}^*_{\alpha,n,k} \subset Q_{\alpha,n}$, 而 $\{Q_{\alpha,n} : \alpha \in A_n\}$ 是离散的, 所以 $\mathscr{C}_{n,k}$ 是闭包保持的.

下证 $\mathscr{C} = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_{n,k}$ 是 X 的拟基. 对 $x \in X$ 及包含 x 的开集 U, 因 $\mathscr{P}$ 是 X 的网络, 存在闭集 $P_{\beta,j} \in \mathscr{P}_j$ 使 $x \in P_{\beta,j} \subset U$. 因 $\mathscr{B}_{\beta,j}$ 是闭集 $P_{\beta,j}$ 的邻域拟基, 存在 $V \in \mathscr{B}_{\beta,j} \subset \mathscr{C}$ 使 $x \in P_{\beta,j} \subset V^\circ \subset V \subset U$. 所以 $\mathscr{C}$ 是 X 的 σ 闭包保持拟基, X 是 M_2 空间. 证完.

定理 7.4.15[56] 设 M_3 空间 X 的每一闭集具有 σ 闭包保持开邻域基, 则 X 是 M_1 空间.

证明 因 M_3 空间是集态正规 (定理 7.4.1 和推论 5.1.2)、σ 空间 (定理 7.4.7), 在上述定理的证明中, 换 "拟基" 为 "基", 换 "邻域拟基" 为 "开邻域基", 即得证. 证完.

至于 M_1 空间是否有相应于定理 7.4.13 的结果, 也就是 M_1 空间的每一闭集具有闭包保持开邻域基否? 相关的问题有: Ceder[80] 问 M_1 空间的每一点是否有闭包保持的开邻域基? Borges 和 Lutzer[56] 问 M_1 空间的每一闭集是否有 σ 闭包保持开邻域基? 这些问题直至 2004 年才由 Mizokami[298] 解决. 本节的下文把每一闭集具有闭包保持开邻域基的 M_3 空间类记作 $\mathscr{P}$ **类** (class $\mathscr{P}$). $\mathscr{P}$ 类在 M_1 空间问题的研究中起到很好的过渡作用. 由定理 7.4.15, $\mathscr{P}$ 类 $\subset \mathrm{M}_1$ 空间类. 可以直接证明, 在 Heath-Junnila 定理 (定理 7.4.12) 的证明中的空间 Z 及 Y 的每一闭集都具有闭包保持开邻域基, 也就是 Z, $Y \in \mathscr{P}$ 类 (习题 7.27).

定理 7.4.16[205] 设 M_3 空间的每一点具有闭包保持的开邻域基, 则 X 的每一闭集具有闭包保持开邻域基, 即 $X \in \mathscr{P}$ 类. 从而 X 是 M_1 空间.

证明 设 F 是 M_3 空间 X 的闭集. 因 $M_3 = M_2$, 由 Ceder 的定理 7.4.13, F 具有闭包保持邻域拟基 $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha \in A\}$. 不失一般性, 可作为 $\mathscr{B}$ 中元是闭集.

因 M_3 空间是 σ 空间, 由引理 7.4.6, 存在 σ 离散闭集 $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, 每一 D_n 是离散闭集, 满足对 $B_\alpha \in \mathscr{B}$, $B_\alpha \cap D$ 在 B_α 中稠密. 不妨设 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是互不相交的. 离散闭集 D_n 可看作是由单点集 $\{x\}$ $(x \in D_n)$ 形成的离散集族, 由 X 的集态正规性, 存在离散开集族 $\mathscr{W}_n = \{W_n(x) : x \in D_n\}$ 使 $x \in W_n(x)$, $x \in D_n$.

由定理 7.4.2, 让 $g(n,x)$ 是 M_3 空间 X 所确定的 g 函数. 对于 X 的每一闭集 E, 定义 $E_n = \overline{g(n,E)}(n \in \mathbb{N})$. 则闭集序列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(i) $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)^\circ$;

(ii) 若 $E \subset K$ (闭集), 则 $E_n \subset K_n (n \in \mathbb{N})$;

(iii) 若 $m > n$, 则 $E_m \subset E_n$.

由定理假设, 每一点 $x \in D$ 具有闭包保持开邻域基 $\mathscr{U}_x$. 不失一般性, 当 $x \in B_\alpha \cap D_n$ 时 (这 n 是惟一的), 可作为 $\mathscr{U}_x$ 的每一元 (开集) 包含在

$$W_n(x) \cap (B_\alpha)_n^\circ \subset W_n(x) \cap (B_\alpha)_n.$$

从而当 $x \in B_\alpha \cap D_n$ 时,

$$\cup \mathscr{U}_x \subset W_n(x) \cap (B_\alpha)_n \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{7.4.7}$$

设 φ 是定义在 $B_\alpha \cap D$ 上的函数使对每一 $x \in B_\alpha \cap D$, $\varphi(x) \in \mathscr{U}_x$ ($\varphi(x)$ 为 x 的某开邻域). 记这些 φ 的全体为 Φ_α. 置

$$B_\alpha^\varphi = B_\alpha^\circ \cup (\cup\{\varphi(x) : x \in B_\alpha \cap D\}) \quad (\varphi \in \Phi_\alpha), \tag{7.4.8}$$

则 B_α^φ 是开集. 置

$$\mathscr{B}^\# = \{B_\alpha^\varphi : \alpha \in A, \varphi \in \Phi_\alpha\}.$$

下证 $\mathscr{B}^\#$ 是 F 的闭包保持的邻域基.

对开集 $G \supset F$, 因 $\mathscr{B}$ 是 F 的邻域拟基, 存在 $B_\alpha \in \mathscr{B}$ 使 $F \subset B_\alpha^\circ \subset B_\alpha \subset G$. 对每一点 $x \in B_\alpha \cap D$, 由 $x \in G$, 存在 $U_x \in \mathscr{U}_x$ 使 $x \in U_x \subset G$. 故存在 $\varphi \in \Phi_\alpha$ 使 $F \subset B_\alpha^\circ \subset B_\alpha^\varphi \subset G$. 所以 $\mathscr{B}^\#$ 是 F 的邻域基.

任取 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}^\#$. 设

$$x_0 \notin \cup\{\overline{B_\alpha^\varphi} : B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\}. \tag{7.4.9}$$

置

$$A' = \{\alpha \in A : 对某些\ \varphi \in \Phi_\alpha, B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\},$$
$$H = \cup\{B_\alpha : \alpha \in A'\},$$
$$\Phi_\alpha' = \{\varphi \in \Phi_\alpha : B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\} \quad (\alpha \in A').$$

由 (7.4.8), $B_\alpha \cap D \subset B_\alpha^\varphi$, 于是 $\overline{B_\alpha \cap D} \subset \overline{B_\alpha^\varphi}$. 由于 $B_\alpha \cap D$ 稠于 B_α, $B_\alpha = \overline{B_\alpha \cap D}$. 所以 $B_\alpha \subset \overline{B_\alpha^\varphi}$. 由 (7.4.9), $x_0 \notin H$, 从而存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $x_0 \notin H_n$. 置

$$C = \cup\Big\{B_\alpha^\circ \cup \Big(\cup\Big\{\varphi(x) : x \in B_\alpha \cap \Big(\bigcup_{k\geqslant n} D_k\Big)\Big\}\Big) : B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\Big\}.$$

设 $x \in B_\alpha \cap D_m$, 这里 $\alpha \in A', m \geqslant n$. 对于 $\varphi \in \Phi'_\alpha$, 按 $\varphi(x) \in \mathscr{U}_x$, 由 (7.4.7), $\cup\mathscr{U}_x \subset (B_\alpha)_m$, 而 $B_\alpha \subset H$, 故有 $\varphi(x) \subset (B_\alpha)_m \subset (B_\alpha)_n \subset H_n$. 从而 $C \subset H_n$. 因 H_n 是闭集, 所以 $\overline{C} \subset H_n$, 又因 $x_0 \notin H_n$, 故有 $x_0 \notin \overline{C}$. 再置

$$\mathscr{D} = \Big\{\varphi(x) : x \in B_\alpha \cap \Big(\bigcup_{1\leqslant k<n} D_k\Big),\ B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\Big\}.$$

每一 $\varphi(x) \in \mathscr{U}_x$. 由 (7.4.7), 当 $x \in B_\alpha \cap D_k$ 时, $\cup\mathscr{U}_x \subset W_k(x) \in \mathscr{W}_k$. 每一 $\mathscr{W}_k$ $(1 \leqslant k < n)$ 是离散集族, 从而 $\mathscr{W} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathscr{W}_k$ 是局部有限集族. 由于 $\mathscr{U}_x$ 是闭包保持集族, 而 $\cup\mathscr{U}_x$ 包含在 $\mathscr{W}$ 的某一元中, 所以 $\mathscr{D}$ 是闭包保持集族. 对 $\mathscr{D}$ 中的每一元 $\varphi(x)$, 由 (7.4.9), $x_0 \notin \overline{\varphi(x)}$, 由 $\mathscr{D}$ 的闭包保持性, $x_0 \notin \overline{\cup\mathscr{D}}$. 由 (7.4.8), $C \cup (\cup\mathscr{D}) = \cup\{B_\alpha^\varphi : B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\}$, 故得 $x_0 \notin \overline{\cup\{B_\alpha^\varphi : B_\alpha^\varphi \in \mathscr{B}'\}}$, 于是 $\mathscr{B}^\#$ 是闭包保持的.

综上所述, $X \in \mathscr{P}$ 类. 由定理 7.4.15, X 是 M_1 空间. 证完.

拓扑空间 X 称为 **Nagata 空间** (Nagata space[80]), 如果 X 是第一可数的 M_3 空间.

推论 7.4.5 [205]　每一 Nagata 空间是 M_1 空间.

证明　第一可数空间中每一点的可数开邻域基可作为递减的, 从而是闭包保持的. 证完.

下面是 Itō 另一重要结果 (定理 7.4.18).

引理 7.4.7　设 U 是空间 X 的既开且闭集. 若 $\mathscr{B}$ 是 X 中的闭包保持集族, 则 $\mathscr{B}|U = \{B \cap U : B \in \mathscr{B}\}$ 是闭包保持的.

证明　取 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$. 设 $x \notin \cup\{\overline{B \cap U} : B \in \mathscr{B}'\}$. 由于 U 是闭集,

$$\overline{\cup\{B \cap U : B \in \mathscr{B}'\}} = \overline{U} \cap \overline{(\cup\{B : B \in \mathscr{B}'\})} \subset \overline{U} = U.$$

当 $x \notin U$ 时, $x \notin \overline{\cup\{B \cap U : B \in \mathscr{B}'\}}$. 当 $x \in U$ 时, 由于 U 是开集, 对每一 $B \in \mathscr{B}'$, 因为 $U \cap \overline{B} \subset \overline{B \cap U}$, 所以 $x \notin \overline{B}$. 由于 $\mathscr{B}$ 是闭包保持的, 于是 $x \notin \overline{\cup\{B : B \in \mathscr{B}'\}} \supset \overline{\cup\{B \cap U : B \in \mathscr{B}'\}}$. 证完.

引理 7.4.8　设 $\mathscr{U} = \cup\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X 的闭集 F 的 σ 闭包保持邻域基. 若 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的既开且闭集组成的递减序列满足 $F = \cap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则 $\cup\{\mathscr{U}_n|G_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 F 的闭包保持邻域基.

证明 由引理 7.4.7, 每一 $\mathscr{U}_n|G_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 是闭包保持集族. 记

$$\mathscr{D}=\cup\{\mathscr{U}_n|G_n:n\in\mathbb{N}\}=\{U_\alpha:\alpha\in D\}.$$

显然, $\mathscr{D}$ 是 F 的邻域基. 下证 $\mathscr{D}$ 是闭包保持的.

取 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$, 记 $\mathscr{D}'=\{U_\alpha:\alpha\in D'\}$, $D'\subset D$. 设 $x\notin\cup\{\overline{U}_\alpha:\alpha\in D'\}$, 则 $x\notin F$. 存在 $n\in\mathbb{N}$, 当 $m>n$ 时, $x\notin G_m=\overline{G}_m$. 置

$$\mathscr{D}''=\{U_\alpha:\alpha\in D' \text{ 且 } U_\alpha\in\cup\{\mathscr{U}_m|G_m:m>n\}\}.$$

记 $\mathscr{D}''=\{U_\alpha:\alpha\in D''\}$, $D''\subset D'$, 则 $G_m\supset\cup\{U_\alpha:\alpha\in D''\}$. 因此

$$x\notin\overline{\cup\{U_\alpha:\alpha\in D''\}}.$$

而 $\cup\{U_\alpha:\alpha\in D'-D''\}\subset\cup\{\mathscr{U}_i|G_i:i\leqslant n\}$, 且 $\cup\{\mathscr{U}_i|G_i:i\leqslant n\}$ 是闭包保持的, 所以

$$x\notin\overline{U}_\alpha\ (\alpha\in D'-D'')\Rightarrow x\notin\overline{\cup\{U_\alpha:\alpha\in D'-D''\}},$$

故 $x\notin\overline{\cup\{U_\alpha:\alpha\in D'\}}$, $\mathscr{D}$ 是闭包保持的. 证完.

引理 7.4.9 设 S 是空间 X 的正则闭集, T 是子空间 S 的正则闭集, 则 T 是空间 X 的正则闭集. 从而每一由 S 中正则闭集组成的在 S 中闭包保持的集族也是由 X 中正则闭集组成的在 X 中闭包保持的集族.

证明留给读者.

定理 7.4.17[204] 设 X 是 M_1 空间, 且 X 的每一正则闭集是 M_1 的, 则 X 的每一闭集具有闭包保持开邻域基. 从而遗传 M_1 空间类 $\subset\mathscr{P}$ 类.

证明 由定理 7.4.16, 只要证明 X 的每一点具有闭包保持开邻域基. 对 $x\in X$, 不妨设 x 是 X 的聚点, 下面构造 X 的两个正则闭集 H_1 及 H_2 使满足:

(i) $X=H_1\cup H_2$;

(ii) 对每一 $i=1,2$, 如 $x\in H_i$, 则存在子空间 H_i 的既开且闭集形成的序列 $\{H_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\{x\}=\cap\{H_{i,n}:n\in\mathbb{N}\}$.

利用空间 X 的完备正规性, 可以取 X 的正则开集的序列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使

$$X=G_1\supset\overline{G}_2\supset G_2\supset\overline{G}_3\supset\cdots;\qquad \{x\}=\cap\{G_n:n\in\mathbb{N}\}.$$

置

$$H_1=\overline{\cup\{G_{2n-1}-G_{2n}:n\in\mathbb{N}\}},$$

$$H_2=\overline{\cup\{G_{2n}-G_{2n+1}:n\in\mathbb{N}\}}.$$

由于 G_k ($k \in \mathbb{N}$) 是正则开集, 可以证明, $\overline{G_k - G_{k+1}} = \overline{G_k - \overline{G}_{k+1}}$, 且容易证明:

$$H_1 = \overline{\cup\{\overline{G_{2n-1} - G_{2n}} : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\cup\{G_{2n-1} - \overline{G}_{2n} : n \in \mathbb{N}\}},$$

$$H_2 = \overline{\cup\{\overline{G_{2n} - G_{2n+1}} : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\cup\{G_{2n} - \overline{G}_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}}.$$

所以 H_1, H_2 是正则闭集, 满足 (i). 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$H_{1,n} = H_1 \cap \overline{G}_{2n-1}, \quad H_{2,n} = H_2 \cap \overline{G}_{2n}.$$

那么

$$H_{1,n} = H_1 \cap G_{2n-2}, \quad H_{2,n} = H_2 \cap G_{2n-1}.$$

$H_{1,n}$, $H_{2,n}$ 分别关于子空间 H_1, H_2 是既开且闭的. 显然满足: 如 $x \in H_i$, 则 $\{x\} = \cap\{H_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$, 所以, H_1, H_2 满足 (ii).

由假设, 正则闭子空间 H_1, H_2 是 M_1 空间. 若 $x \in H_i$, 由引理 7.4.5, 存在点 x 关于子空间 H_i 的 σ 闭包保持邻域基 $\mathscr{U}_i = \cup\{\mathscr{U}_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$, 这里 $\mathscr{U}_i$ 是 H_i 中闭包保持的正则闭集族. 由 (ii) 及引理 7.4.8, $\cup\{\mathscr{U}_i|H_{i,n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 在子空间 H_i 的闭包保持邻域基, 记作 $\mathscr{C}_i$. $\mathscr{C}_i$ 中的每一元是 H_i 中的正则闭集 (因正则闭集与既开且闭集的交是正则闭集, 习题 7.19). 由引理 7.4.9, $\mathscr{C}_i$ 是由 X 中的正则闭集组成的 X 中的闭包保持集族. 当 $x \notin H_i$ 时, 定义 $\mathscr{C}_i = \varnothing$. 置

$$\mathscr{C} = \{C_1 \cup C_2 : C_i \in \mathscr{C}_i, \ i = 1, 2\}.$$

由 (i) 知 $\mathscr{C}$ 中的每一元是 x 在 X 中的邻域, 仍是 X 中的正则闭集 (两个正则闭集的并仍是正则闭集, 习题 7.19). $\mathscr{C}$ 仍是 X 中的闭包保持集族, 所以 $\mathscr{C}$ 是由 X 中正则闭集组成的点 x 的闭包保持邻域基. 从而 $\mathscr{C}^\circ = \{C^\circ : C \in \mathscr{C}\}$ 是点 x 的闭包保持开邻域基. 证完.

Itō[204] 为了证明该文的主要结果 (定理 7.4.18), 引入下述 Gruenhage 的结果.

引理 7.4.10[165] 具有下述性质 (G) 的 M_1 空间 X 的连续闭映像是 M_1 空间:

(G) 对空间 X 的任意两个闭集 H, K, 若 $H \subset K$, 则 H 在子空间 K 中具有 σ 闭包保持开邻域基.

Gruenhage 在论文中记上述性质为 (*), 为便于下文引用这里改记为 (G). 此引理的证明复杂冗长, 这里只能略去, 有兴趣的读者可参阅所引 Gruenhage 的论文.

易知具有性质 (G) 的 M_1 空间的任何闭集是 M_1 空间, 因此 Gruenhage 提出问题: "是否具有闭遗传性的 M_1 空间的连续闭像是 M_1 空间?" 由命题 7.4.1 和定理 7.4.18 正面回答了 Gruenhage 的问题.

定理 7.4.18[204] 遗传 M_1 空间的连续闭像是遗传 M_1 空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是遗传 M_1 空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射. 设 H, K 是 X 的两个闭集, 且 $H \subset K$. 子空间 K 是遗传 M_1 的, H 是 K 中的闭集, 由定理 7.4.17, H 在 K 中具有闭包保持开邻域基, 所以 X 具有引理 7.4.10 的性质 (G), 故由引理 7.4.10 知 Y 是 M_1 空间. 从而易证 Y 是遗传 M_1 空间. 证完.

推论 7.4.6[204] Nagata 空间的连续闭像是遗传 M_1 空间.

证明 由推论 7.4.5 和定理 7.4.9 及第一可数性是遗传的, 所以 Nagata 空间是遗传 M_1 空间, 再由定理 7.4.18 得证. 证完.

度量空间的连续闭映像称为 **Lašnev 空间** (Lašnev space).

推论 7.4.7[363] Lašnev 空间是遗传 M_1 空间.

2004 年, Mizokami[298] 证明了下述结果, 这是 Itō 之后关于 M_i 空间问题的重要进展. 定理 7.4.19 的证明请读者参阅所引文献.

定理 7.4.19[298] M_1 空间的每一闭集具有闭包保持的开邻域基.

推论 7.4.8 下列论断等价:

(i) X 是 M_1 空间;

(ii) X 是每一点具有闭包保持开邻域基的层空间;

(iii) X 是每一闭集具有闭包保持开邻域基的层空间;

(iv) X 是每一闭集具有 σ 闭包保持开邻域基的层空间.

证明 由定理 7.4.19, (i) $\Rightarrow$ (ii); 由定理 7.4.16, (ii) $\Rightarrow$ (iii); (iii) $\Rightarrow$ (iv) 是显然的; 由定理 7.4.15, (iv) $\Rightarrow$ (i). 证完.

注记 由于 Mizokami[297] 证明了如果一个层空间是可数个属于 $\mathscr{P}$ 类的闭子空间之并, 则这层空间也属于 $\mathscr{P}$ 类, 所以如果一个层空间是可数个闭 M_1 空间之并, 则这层空间是 M_1 空间. 从而有限个闭 M_1 空间之并是 M_1 空间.

推论 7.4.9 连续的拟开、闭映射保持 M_1 空间.

证明 设 f 是从 M_1 空间 X 到空间 Y 上的连续拟开、闭映射. 由定理 7.4.10, Y 是 M_3 空间. 对每一 $y \in Y$, 由定理 7.4.19, $f^{-1}(y)$ 在 X 中具有闭包保持的开邻域基 $\mathscr{B}$, 又由引理 7.4.4, $\{f(B)^\circ : B \in \mathscr{B}\}$ 是 y 的闭包保持开邻域基. 由推论 7.4.8, Y 是 M_1 空间. 证完.

因为不可约的闭映射是似开映射 (见习题 7.23), 有下列推论, 它回答了 Tamano 的一个问题 [388].

推论 7.4.10 不可约的连续闭映射保持 M_1 空间.

推论 7.4.11 设 X 是 M_1 空间, A 是 X 的闭子空间, 则商空间 X/A 是 M_1 空间.

证明 让 $f: X \to X/A$ 是自然商映射. 则 f 是闭映射, 于是 X/A 是 M_3 空间. 由推论 7.4.8, X/A 的每一点具有闭包保持的开邻域基, 从而 X/A 是 M_1 空间.

证完.

下面概略地叙述 $M_3 \Rightarrow M_1$ 问题以结束 M_i 空间 (所论空间均设为正则空间).

Heath 和 Junnila[188] 曾引入 **M_0 空间** (M_0-space, 具有 σ 闭包保持既开且闭基的空间), 显然 M_0 空间是 M_1 空间. Gruenhage[165] 引入性质 (G) (引理 7.4.10) 及 **F_σ 可度量化空间** (F_σ-metrizable space, 可表示为可数个可度量化闭子空间的并的空间) 并证明 F_σ 可度量化的层空间及其连续闭像均具有性质 (G), 从而是 M_1 的. 此后, 日本学者引入一些层空间类: Mizokami[295] 的**层 μ 空间** (stratifiable μ-space), Tamano[386] 的**规则层空间** (regularly stratifiable space)、**强规则层空间** (strongly regularly stratifiable space) 及 Mizokami[297] 的**具有 M 结构的层空间** (stratifiable space with M-structures). Junnila 和 Mizokami[223] 证明上述四类空间是重合的. 下面介绍其中定义较简的 **μ 空间** (μ-space[313]). 空间 X 称为 μ 空间, 如果它可以嵌入到仿紧 F_σ 可度量化空间的可数积中. 显然, μ 空间是 F_σ 可度量化的层空间的推广, 且 μ 空间是仿紧的 σ 空间. Mizokami[297] 证明了层 μ 空间是 M_1 空间, 且是 M_0 空间在完备映射下的像, 而 M_0 空间等价于零维的层 μ 空间. 存在着 Lašnev 空间不是 F_σ 可度量化的 (见文献 [117] 的例 2), 故 F_σ 可度量化不能为连续闭映射所保持. 而 Junnila 和 Mizokami[223] 证明了 F_σ 可度量化的层空间的连续闭像是层 μ 空间, 所以存在着层 μ 空间而不是 F_σ 可度量化的. Tamono[389] 构造了一个正则 Lindelöf 的 σ 空间不是 μ 空间.

Itō 和 Tamano[206] 引入几乎局部有限集族的概念. 空间 X 的集族 $\mathscr{A}$ 称为关于点 $x \in X$ 是**几乎局部有限的** (almost locally finite), 如果存在点 x 的邻域 U 及有限集族 $\mathscr{B}$ 使

$$\{A \cap U : A \in \mathscr{A}\} \subset \{B \cap V : B \in \mathscr{B},\ V \text{ 是 } x \text{ 的邻域}\}.$$

$\mathscr{A}$ 称为在 X 中是几乎局部有限的, 如果 $\mathscr{A}$ 关于 X 的每一点是几乎局部有限的. 他们研究了具有 σ 几乎局部有限基的空间, 证明了这类空间是 M_1 的, 而包含着 μ 层空间类.

Ohta[322] 引入有限型闭包保持集族的概念. 空间 X 的集族 $\mathscr{A}$ 称为关于点 $x \in X$ 是**有限型闭包保持的** (finitely closure-preserving), 如果对每一 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$, 存在 x 的开邻域 U 及 $\mathscr{A}'$ 的有限子族 $\mathscr{B}$, 使

$$U \cap \overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}'\}} = U \cap \overline{\bigcup\{B : B \in \mathscr{B}\}}.$$

$\mathscr{A}$ 称为在 X 中是有限型闭包保持的, 如果 $\mathscr{A}$ 关于 X 的每一点是有限型闭包保持的. Ohta 研究了具有 σ 有限型闭包保持基的空间, 证明了这类空间包含着具有 σ 几乎局部有限基的空间类及 M_0 空间的完备像, 而包含在遗传 M_1 空间类内.

这些空间类的关系如图 7.1 所示 [141].

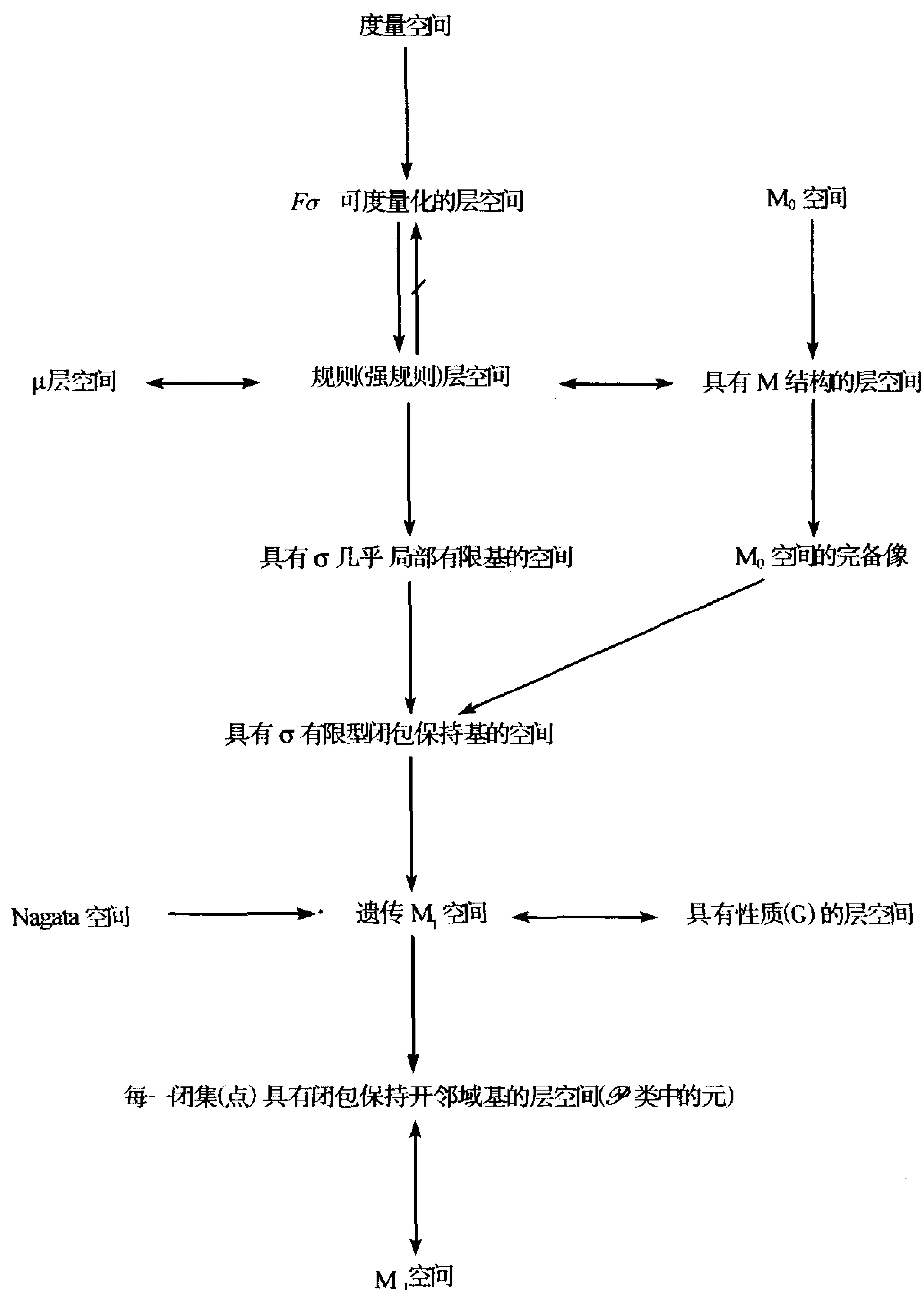


图 7.1

上述空间类关于子空间、连续闭像或完备像及可数积的保持情况见表 7.1[141].

学者们似乎都有这样的想法：加强 M_3 空间能使蕴含 M_1 而具有比 M_1 较好的性质. 所加强的内容逐步减弱 (图 7.1) 以 "逼近" M_1, 总希望 M_1 能满足相应的加强内容 (例如, T. Mizokami 希望每一 M_1 空间具有 M 结构, M. Itō 希望每一 M_1 空间具有 σ 几乎局部有限基). 这样 $M_3 \Rightarrow M_1$ 问题可解决. 但是从图 7.1 上看, M_1 空间等价于每一点具有闭包保持开邻域基的 M_3 空间 (即 $\mathscr{P}$ 类中的元). 这又回到

1961 年 J. G. Ceder 提出的问题 (Mizokami[298] 解决了这一问题, 定理 7.4.19), 所以这种逐步 "逼近" 的办法很难说有成功的可能. 对于这方面的内容及问题详见文献 [141], [165], [170], [388] 等. $M_3 \Rightarrow M_1$ 这一至今无法解决的问题很有魅力, 著名拓扑学家 Mary Rudin[346] 对此也感兴趣, 重又提出此问题. 按她的猜测, 答案可能是正面的. G. Gruenhage[170] 提到答案可能独立于集论公理 ZFC. 究竟如何, 尚未可知.

表 7.1

空间类	遗传性	映射性质	可数可积性
度量空间	子空间保持	闭像不保持, 完备像保持	可数积保持
M_1 空间	闭子空间?	闭像或完备像?	可数积保持
F_σ 可度量化的层空间	子空间保持	闭像不保持, 完备像保持	有限积保持, 可数积?
M_0 空间的完备像	闭子空间保持	闭像? 完备像保持	可数积保持
层 μ 空间	子空间保持	闭像? 完备像保持	可数积保持
具有 σ 几乎局部有限基的空间	子空间保持	完备像? 有限对一闭像保持	可数积保持
具有 σ 有限型闭包保持基的空间	子空间保持	闭像? 完备像保持	可数积保持
遗传 M_1 空间	子空间保持	闭像保持	可数积?

7.5　半层、k 半层空间, 单调正规空间, 对称与半度量空间

正则 σ 空间的刻画有著名的 Siwiec-Nagata 定理 (定理 7.3.5). 证法很别致. 由此容易得到关于 σ 空间为闭映射保持的结果 (推论 7.3.2). 那时尚未引入 g 函数, 不能利用 g 函数得到正则 σ 空间的另一类型的刻画. 在 7.4 节引入 g 函数, 充分利用它刻画 M_2 空间与 M_3 空间, 从而证明了 $M_2 = M_3$ 这一重要结果 (定理 7.4.6), 并指出用类似的证法可以得到 (不必先在 7.3 节叙述致重复) 用 g 函数刻画正则 σ 空间 (定理 7.4.5) 的类似于 M_2 空间的刻画 (定理 7.4.4):

(定理 7.4.5) 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数满足下述 (i), (ii) ((i) $\Leftrightarrow$ (i′), 见定理 7.4.3):

(i) 如 $y \notin$ 闭集 F, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $y \notin g(n, F)$;

(i′) 对 $x \in X$ 及序列 $\{x_n\}$, 如 $x \in g(n, x_n)$, 则 $x_n \to x$;

(ii) $y \in g(n, x) \Rightarrow g(n, y) \subset g(n, x)$.

比较 M_2 空间与正则 σ 空间的刻画 (定理 7.4.4 和定理 7.4.5), 由于已证 $M_3 \Rightarrow M_2$, 我们轻易得到 $M_3 \Rightarrow \sigma$ (定理 7.4.7). 这一结果是 Heath 和 Hodel 用 g 函数精致地刻画正则 σ 空间 (见定理 7.4.7 的注记中述及的刻画 (*)) 而得到的. 刻画 (*) 的证明异常困难, 需要许多篇幅, 不论与定理 7.3.5 放在一起或紧接定理 7.4.5 后叙

述都难免冲淡该节主题, 故在本节开端时叙述. 接着用它证明较近代的结果 (定理 7.5.6).

定理 7.5.1 (Heath-Hodel 定理 [187]) 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数满足:

(*) 对于 X 中的点 x 及序列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 如果 $x\in g(n,x_n)$ 且 $x_n\in g(n,y_n)$, 则 $y_n\to x$.

证明 首先证明正则 σ 空间满足条件 (*), 这里利用定理 7.4.5 的条件 (i′), (ii). 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是正则空间 X 中的序列, 而 $x\in g(n,x_n)$, $x_n\in g(n,y_n)$, 用定理 7.4.5 的条件 (ii) 于 $x_n\in g(n,y_n)$, 得 $g(n,x_n)\subset g(n,y_n)$, 从而 $x\in g(n,y_n)$. 由定理 7.4.5 的 (i′) 得 $y_n\to x$.

下面证明具有 g 函数满足 (*) 的空间是 σ 空间. 这一证明异常困难, 我们将利用条件 (*) 构造 X 的 σ 离散网络, 从而由定义 7.3.1 得证.

注意到, 定理 7.4.5 中的 (i′) 可以作为 (*) 的特例 (在 (*) 中取 y_n 为 x_n), 所以在下面构造中可以引用定理 7.4.5 的 (i′) 或 (i).

设空间 X 具有 g 函数满足 (*), 把 X 按序 " $<$ " 良序化, 对每一 $x\in X$ 及 $i,n\in\mathbb{N}$, 置

$$H(x,i,n)=X-[(\cup\{g(i,y):y<x\})\cup(\cup\{g(n,y):y\notin g(i,x)\})]. \tag{7.5.1}$$

显然, $H(x,i,n)\subset g(i,x)$. 置

$$\mathscr{H}(i,n)=\{H(x,i,n):x\in X\}.$$

下证 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族. 设 $z\in X$, y 是 X 中的最小元之使 $z\in g(i,y)$ 者. 显然, 当 $y<x$ 时, $g(i,y)\cap H(x,i,n)=\varnothing$ [由 (7.5.1) 式右端减数的第一部分]. 当 $x<y$ 时, 由所取 y 的最小性, $z\notin g(i,x)$, 从而 $g(n,z)\cap H(x,i,n)=\varnothing$ [由 (7.5.1) 式右端减数的第二部分]. 所以 $g(i,y)\cap g(n,z)$ 是包含 z 的开集至多与 $\mathscr{H}(i,n)$ 中一个集 $H(y,i,n)$ 相交, 于是 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族.

对 $m\in\mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned}&F(x,i,n,m)=\{y\in H(x,i,n):x\in g(m,y)\},\\&\mathscr{F}(i,n,m)=\{F(x,i,n,m):x\in X\}.\end{aligned} \tag{7.5.2}$$

$\mathscr{F}(i,n,m)$ 中的元 [由 (7.5.2) 式] 分别是 $\mathscr{H}(i,n)$ 中的元 $H(x,i,n)$ 的子集, 故由于 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族, 知 $\mathscr{F}(i,n,m)$ 是离散集族.

下面证明 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}(i,n,m):i,n,m\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X 的网络. 设 $p\in U$, U 是开集. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, x_i 是 X 中的最小元之使 $p\in g(i,x_i)$ 者, $p\notin$ 闭集 $X-g(i,x_i)$, 由定理 7.4.5 的 (i) (见上述注意), 存在 $n(i)\in\mathbb{N}$ 使

$$p\notin\cup\{g(n(i),y):y\notin g(i,x_i)\},$$

由 x_i 的最小性及 (7.5.1) 式, 知 $p \in H(x_i, i, n(i)) \subset g(i, x_i)$. 由定理 7.4.5 的 (i′) (见上述注意) 知 $x_i \to p$. 从而对 p 的每一开邻域 $g(m, p)$, 存在 $i(m) \geqslant m$ 使 $x_{i(m)} \in g(m, p)$. 由 (7.5.2) 式及 $p \in H(x_i, i, n(i))$ 对每一 $i \in \mathbb{N}$ 成立, 故有

$$p \in F(x_{i(m)}, i(m), n(i(m)), m).$$

记上式右端为 F_m.

下面证明存在某些 m 使 $F_m \subset U$. 如若不然, 选取 $y_m \in F_m - U$, 按

$$p \in g(i(m), x_{i(m)}), \quad i(m) \geqslant m,$$

故 $p \in g(m, x_{i(m)})$. 而 $y_m \in F_m$, 由 (7.5.2) 式, $x_{i(m)} \in g(m, y_m)$. 故由 (*) 得 $y_m \to p$. 这与 $p \in U$, $y_m \notin U$ 矛盾. 所以到此证明了 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ 离散网络. 证完.

上述条件 (*) 构造 σ 离散网络的过程构思神妙, 天衣无缝. 利用 (*) 不仅可以证明层空间 $\Rightarrow \sigma$ 空间, 还可以证明弱于层空间的 k 半层空间 (定义 7.5.1) $\Rightarrow \sigma$ 空间 (定理 7.5.7).

在 7.4 节曾引入半层空间 (引理 7.4.1 的注记 3). 限于该节的主题 (M_i 空间), 未能涉及半层空间的性质. 下面补充阐述. 为方便起见, 把半层对应 (即半层对应 H) 记为 $U \to \{U_n\}$, 这里 U 是开集, U_n 是闭集, 满足 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 对开集 $V \subset U$ 有 $V_n \subset U_n$ (V_n 是闭集), 且可设当 $n < m$ 时, $U_n \subset U_m$.

定理 7.5.2~ 定理 7.5.4 均属于 Creede[99].

定理 7.5.2 半层空间是遗传的, 且是可数可积的.

证明 关于半层空间的遗传性及可数积性质, 可利用半层空间的 g 函数刻画 (定理 7.4.3). 先设 X 是半层空间. 让 $g(n, x)$ 是 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数, 满足定理 7.4.3 的 (iii). 对 X 的子空间 A, 定义 $\mathbb{N} \times A$ 上的 g 函数

$$g'(n, x) = g(n, x) \cap A \quad (n \in \mathbb{N};\ x \in A),$$

则 $g'(n, x)$ 仍满足定理 7.4.3 的 (iii), 所以 A 是半层空间.

关于可积性保持, 设 X_i ($i \in \mathbb{N}$) 是半层空间, 记 $\mathbb{N} \times X_i$ 上的 g 函数为 g_i, 满足定理 7.4.3 的 (iii). 对 $x = (x_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, 置

$$g(n, x) = \prod_{i \leqslant n} g_i(n, x_i) \times \prod_{i > n} X_n,$$

则 g 是 $\mathbb{N} \times (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n)$ 上的 g 函数, 满足定理 7.4.3 的 (iii). 证完.

定理 7.5.3 半层空间为连续闭映射所保持.

证明 设 $f : X \to Y$ 是半层空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, 设 G 开于 Y, 则 $f^{-1}(G)$ 开于 X, 因 X 是半层空间, 有半层对应 $f^{-1}(G) \to \{f^{-1}(G)_n\}$. 则 $G \to \{f(f^{-1}(G)_n)\}$ 是空间 Y 上的半层对应, Y 是半层空间. 证完.

推论 7.5.1[356] 半层空间满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 由一般性定理 5.5.5 得证. 证完.

定理 7.5.4 可展空间是半层空间, 半层空间是次仿紧空间.

证明 先设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可展空间 X 的展开. 不妨设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是加细序列. 定义 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数为

$$g(n,x)=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\ \ (n\in\mathbb{N},\ x\in X).$$

易验证, g 满足定理 7.4.3 的 (iii). 所以 X 是半层空间.

现在, 设 $\mathscr{U}$ 是半层空间 X 的开覆盖, 设 X 上的半层对应为 $U\to\{U_n\}$. 把集族 $\mathscr{U}$ 按序 "$<$" 良序化, 设 $\mathscr{U}=\{O_\alpha:\alpha\in A\}$, A 是良序集, 最小元是 0. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned}&F_{0,n}=(O_0)_n,\\&F_{\alpha,n}=(O_\alpha)_n-\cup\{O_\beta:\beta\in A,\beta<\alpha\}\ \ (\alpha>0),\\&\mathscr{F}_n=\{F_{\alpha,n}:\alpha\in A\},\\&\mathscr{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n.\end{aligned}$$

先证 $\mathscr{F}$ 是覆盖. 对 $x\in X$, 设 $\mathscr{U}$ 中元之包含 x 的最小者为 O_α, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in(O_\alpha)_n$, 由最小性, $x\in F_{\alpha,n}$.

下证每一 $\mathscr{F}_n$ 是离散闭集族. 显然, 每一 $F_{\alpha,n}$ 是闭集. 对 $x\in X$, 仍取 $\mathscr{U}$ 中元之包含 x 的最小者 O_α. 对 $\beta>\alpha$ 的 $F_{\beta,n}$, O_α 已被减去, 故 $F_{\beta,n}\cap O_\alpha=\varnothing$. 对 $\beta<\alpha$ 的 O_β, 由最小性, $x\notin O_\beta$, 所以 $O_\beta\subset X-\overline{\{x\}}$, $(O_\beta)_n\subset(X-\overline{\{x\}})_n$, 从而

$$[X-(X-\overline{\{x\}})_n]\cap(O_\beta)_n=\varnothing,\quad \beta<\alpha.$$

$X-(X-\overline{\{x\}})_n$ 是包含 x 的开集, 故 x 的开邻域 $O_\alpha\cap(X-(X-\overline{\{x\}})_n)$ 至多与 $\mathscr{F}_n$ 中一个元 $F_{\alpha,n}$ 相交.

综上所述, $\mathscr{F}$ 是 σ 离散闭覆盖, 显然加细 $\mathscr{U}$, 由定义 6.1.1, X 是次仿紧的. 证完.

由半层空间的定义, 知它是完备的 (每一闭集是 G_δ 集). 由定理 7.5.2, 两个半层空间的积是半层空间, 从而也是完备的. 当 T_2 空间 X 的自乘积 X^2 是完备时 (一般未必成立), 易知 X 具有 G_δ 对角线 (见习题 2.7), 所以 T_2 半层空间具有 G_δ 对角线, 又由定理 7.5.4, 半层空间是次仿紧的. 故知正则半层空间具有 G_δ^* 对角线 (定义 7.3.3 及其注记).

推论 7.5.2[201] T_2, M 的半层空间是可度量化空间.

证明 设 X 是 T_2, M 的半层空间, 则 X 具有 G_δ 对角线. 由定理 7.3.11, X 是可度量化空间. 证完.

定义 7.5.1[270]　空间 X 称为 ***k* 半层空间** (k-semistratifiable space), 如果存在半层对应 $U \to \{U_n\}$, 且对紧集 $K \subset$ 开集 U, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $K \subset U_n$. 上述对应称为 ***k* 半层对应** (k-semistratification).

显然, k 半层空间是半层空间, 且易知层空间是 k 半层空间 (利用层对应). 下面证明第一可数的 k 半层空间是层空间. 更进一步的结果见定理 8.2.3.

定理 7.5.5[270]　第一可数的 k 半层、T_1 空间是层空间, 从而是 M_1 空间.

证明　设 X 是第一可数的 k 半层、T_1 空间. 设 $U \to \{U_n\}$ 是空间 X 的 k 半层对应. 设 $x \in U$, U 是空间 X 的开集, 设 $\{W_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的可数开邻域基, 使 $U \supset W_1(x) \supset W_2(x) \supset \cdots$. 如对每一 $n \in \mathbb{N}$, $W_n(x) \not\subset U_n$, 选取 $y_n \in W_n(x) - U_n$, 则序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x. 从而 $K = \{x\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是紧集, $K \subset U$. 因 $U \to \{U_n\}$ 是 k 半层对应, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使 $K \subset U_m$, 所以 $y_m \in U_m$, 这与 y_m 的取法矛盾. 因此存在某 $W_n(x) \subset U_n$, 于是 $x \in (U_n)^\circ$. 故 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U_n)^\circ$. 由引理 7.4.1, 知 X 是层空间, 再由推论 7.4.5, X 是 M_1 空间. 证完.

定理 7.5.6[149, 243]　T_2 空间 X 是 k 半层空间, 当且仅当存在 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数满足: 对 $x \in X$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $x_n \in g(n, y_n)$, 且 $x_n \to x$, 则 $y_n \to x$.

证明　设 $U \to \{U_n\}$ 是 X 上的 k 半层对应, 定义 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数 $g(n,x) = X - (X - \{x\})_n$. 设 $x \in X$ 及 X 中序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如 $x_n \in g(n, y_n)$, 且 $x_n \to x$, 要证 $y_n \to x$.

设 U 是 X 中任一开集, $x \in U$, 因 $x_n \to x$, 不失一般性, 可作为紧集 $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$, 由 k 半层对应, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使

$$\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U_m.$$

由于 $x_n \in g(n, y_n) = X - (X - \{y_n\})_n$, 当 $n \geqslant m$ 时, 有

$$x_n \in U_n \cap (X - (X - \{y_n\})_n) = U_n - (X - \{y_n\})_n. \tag{7.5.3}$$

下证 $y_n \in U$, 从而 $y_n \to x$. 如若不然, $y_n \notin U$, 则 $U \subset X - \{y_n\}$, 所以 $U_n \subset (X - \{y_n\})_n$, 与 (7.5.3) 式矛盾.

反之, 设 $g(n,x)$ 是 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数满足定理的条件, 此条件蕴含定理 7.4.3 的 (iii), 所以 X 是半层空间. 对 X 中开集 U, $n \in \mathbb{N}$, 置

$$U_n = X - \cup\{g(n,x) : x \in X - U\}. \tag{7.5.4}$$

为了证明 $U \to \{U_n\}$ 是 k 半层对应, 由于它是半层对应 (定理 7.4.3), 只要证明对紧集 $K \subset U$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $K \subset U_n$.

如若不然, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $K \not\subset U_n$, 则存在 K 的子集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使 [由 (7.5.4) 式]

$$x_n \in K - U_n = K \cap (\cup\{g(n,x) : x \in X - U\}).$$

由 $x_n \in \cup\{g(n,x) : x \in X - U\}$, 知 $x_n \in$ 某 $g(n,y_n)$, $y_n \in X - U$. 所以存在两个序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 满足 $\{x_n\} \subset K$, $\{y_n\} \subset X - U$ 及 $x_n \in g(n,y_n)$. 由推论 7.5.2, K 是紧度量子空间 (使用了 T_2 空间条件), 从而是序列式紧空间 (定理 3.5.4), $\{x_n\}$ 具有收敛子序列. 不失一般性, 作为 $x_n \to x_0 \in K \subset U$, 从而由定理的假设, $y_n \to x_0$. 这与 $\{y_n\} \subset X - U$ 矛盾. 证完.

定理 7.5.7[149, 243] k 半层空间是 σ 空间.

证明 设 X 是 k 半层空间. 由定理 7.5.6 的必要性 (无分离公理的假设), 存在 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数 $g(n,x)$ 满足: 对 $x \in X$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $x_n \in g(n,y_n)$, 且 $x_n \to x$, 则 $y_n \to x$. 设 X 中的点 x 及序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $x \in g(n,x_n)$, 且 $x_n \in g(n,y_n)$. 由 $x \in g(n,x_n)$ 可得 $x_n \to x$, 从而得 $y_n \to x$. 由 Heath-Hodel 定理 (定理 7.5.1 的充分性无分离公理的假设) 得 X 是 σ 空间. 证完.

综上所述, 有如下蕴含关系:

$$\text{层空间} \Rightarrow \text{正则 } k \text{ 半层空间} \Rightarrow \text{正则 } \sigma \text{ 空间} \Rightarrow \text{半层空间}.$$

上述蕴含关系均不可逆. 存在完全正则 $\aleph$ 空间 [定义 8.1.1, 从而 k 半层 (推论 8.2.1)], 而非正规空间 [328]. 存在第一可数的 T_2、仿紧 cosmic 空间 (定义 8.1.3, 从而 σ 空间), 而非层空间 [185], 由定理 7.5.5, 知这空间也非 k 半层空间. 存在正则半层而非 σ 空间 (见文献 [166] 的例 9.10). 存在具有可数基的 T_2 空间 (从而 σ 空间), 而非半层空间 (见文献 [261] 的例 2.7.14 和例 2.10.9).

k 半层空间和层空间, 半层空间一样都是遗传的, 可数可积的, 下面是映射性质. Lutzer[270] 曾证明完备映射保持 k 半层空间性质, 高国士 [140] 利用定理 6.6.9 证明了正规 k 半层空间为连续闭映射所保持.

引理 7.5.1[258] 设 f 是从 k 半层空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射. 若 X 是正则空间, Y 是 T_2 空间, 则 f 是紧覆盖映射.

证明 因为 X 是 T_2, k 半层空间, 让 $g(n,x)$ 是 $\mathbb{N} \times X$ 上的 g 函数, 满足定理 7.5.6 的条件, 则对每一 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) = \{x\}$. 由定理 7.5.3, Y 是半层空间. 设 K 是空间 Y 的非空紧子集, 由推论 7.5.2, K 是 Y 的紧可度量的闭子集. 对每一 $y \in K$, 取定 $x_y \in f^{-1}(y)$. 令 $E = \{x_y : y \in K\}$. 则 $f(\overline{E}) = \overline{f(E)} = K$. 为完成定理的证明, 只需验证 $\overline{E}$ 是可数紧的 (定理 7.5.7 和引理 7.3.4), 即 $\overline{E}$ 中的每一序列有聚点 (定理 3.5.2).

若序列 $\{x_n\} \subset \overline{E}$, 存在 $z_n \in E \cap g(n,x_n) (n \in \mathbb{N})$. 若无限个 z_n 相同, 不妨设 $z \in g(n,x_n)$, 则序列 $\{x_n\}$ 收敛于 z, 所以 $\{x_n\}$ 有聚点. 若所有的 z_n 互不相

同, 则 $f|_E$ 是一一对应的且序列 $\{f(z_n)\} \subset K$ 有收敛子序列, 那么 $\{z_n\}$ 在 $\overline{E}$ 中有聚点. 这也表明 $\{z_n\}$ 的任一子序列有聚点. 设 x 是 $\{z_n\}$ 的一个聚点, 由 X 的正则性, 存在 X 的开集序列 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足: $x \in V_{i+1} \subset \overline{V}_i \cap g(i,x)(i \in \mathbb{N})$. 不妨设 $z_{n_i} \in V_i(i \in \mathbb{N})$. 序列 $\{z_{n_i}\}$ 的聚点属于集 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_i \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} g(i,x) = \{x\}$, 所以 x 是 $\{z_{n_i}\}$ 的惟一聚点. 若序列 $\{z_{n_i}\}$ 不收敛于 x, 则存在 x 的开邻域 U 及序列 $\{z_{n_i}\}$ 的子序列 $\{z_{n_{i_k}}\}$ 使所有的 $z_{n_{i_k}} \notin U$. 因为 $\{z_{n_{i_k}}\}$ 作为 $\{z_n\}$ 的子序列有聚点, 且这聚点只能是 x, 所以 $x \notin U$, 矛盾. 从而 $z_{n_i} \to x$. 由 g 函数的性质 (定理 7.5.6 的条件), 知序列 $\{x_n\}$ 有聚点. 故 $\overline{E}$ 是可数紧的. 证完.

定理 7.5.8 设 $f: X \to Y$ 是连续闭映射, 其中 X, Y 分别是正则空间和 T_2 空间. 若 X 是 k 半层空间, 则 Y 是 k 半层空间.

证明 设空间 X 上的 k 半层对应为 $U \to \{U_n\}$, 设 V 开于 Y, 则 $f^{-1}(V)$ 开于 X, 从而 $V \to \{f(f^{-1}(V)_n)\}$ 是 Y 上的半层对应 (见定理 7.5.3). 对 Y 中的紧集 K, 因 f 是紧覆盖映射 (引理 7.5.1), 存在 X 中紧集 C, 使 $f(C) = K$. 设 $K \subset V$, 则 $C \subset f^{-1}(V)$, 由 X 上的 k 半层对应, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $C \subset f^{-1}(V)_n$, 从而 $K \subset f(f^{-1}(V)_n)$. 所以 $V \to \{f(f^{-1}(V)_n)\}$ 是 Y 上的 k 半层对应. 证完.

由此可知, 连续的闭映射保持正规的 k 半层空间性质 [139]. 不知定理 7.5.8 中空间 X 的正则性能否减弱为 T_2 分离性?[427]

下面引进一种很强的正规性 —— 单调正规性 (定义 7.5.2). 主要用以刻画层空间 (定理 7.5.9). 容易证明连续闭映射保持单调正规性 (定理 7.5.10), 从而得到连续闭映射保持层空间, 这比 Borges 的直接证明 (定理 7.4.10) 简单得多.

以前接触到的最强的正规性是集态正规 (定义 5.1.4, 满正规性 (定义 5.1.1) 属于一种覆盖性质), 由定理 7.5.11 看到单调正规性更强于集态正规性.

定理 7.5.9～ 定理 7.5.11 均由 Heath, Lutzer 和 Zenor[189] 得到. 关于单调正规性的其他性质参见上引论文或相关文献, 如文献 [95].

定义 7.5.2 T_1 空间 X 称为**单调正规空间** (monotonically normal space), 如果对 X 的每一对不相交闭子集 F, K, 可使对应着开集 $D(F,K)$ 满足:

(i) $F \subset D(F,K) \subset \overline{D(F,K)} \subset X - K$;

(ii) 如 $F \subset F', K \supset K', F', K'$ 是不相交的闭集, 则 $D(F,K) \subset D(F',K')$.

此对应 D 称为 X 上的**单调正规算子** (monotone normal operator). 通常可以假设 $D(F,K) \cap D(K,F) = \varnothing$, 如若不然, 可用 $D'(F,K) = D(F,K) \cap (X - \overline{D(K,F)})$ 代 $D(F,K)$.

单调正规算子的符号与两集之间的距离符号 (定义 4.1.2) 相同, 读者从上下文中可区别出它们的确切涵义.

定理 7.5.9 空间 X 是层空间当且仅当 X 是半层空间和单调正规空间.

证明 设 X 是层空间, 取层对应 $F \to \{F_n\}$ (层对应 G, 引理 7.4.1 的注

记 2), F_n 是包含闭集 F 的开集, 满足 $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F}_n$, $F \subset K \Rightarrow F_n \subset K_n$, 且 $F_n \supset F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 设 F, K 是 X 的不相交闭集, 置

$$D(F,K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n - \overline{K}_n).$$

显然, 开集 $D(F,K) \supset F$. 对每一 $y \in K$, $y \notin F$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使 $y \notin \overline{F}_m$. 所以

$$(X - \overline{F}_m) \cap K_m = K_m - \overline{F}_m$$

是 y 的开邻域与 $D(F,K)$ 不交. 从而 $\overline{D(F,K)} \subset X - K$. D 的单调性可由层对应的单调性得到.

反之, 设 X 是半层空间及单调正规空间, 具有半层对应 $F \to \{F_n\}$, F_n 是包含闭集 F 的开集 (半层对应 G, 引理 7.4.1 的注记 3), 及单调正规算子 D. 置 $F'_n = D(F, X - F_n)$, 显然 F'_n 是包含 F 的开集, 要证 $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F'_n)^-$. 由单调正规性,

$$F \subset D(F, X - F_n) \subset \overline{D(F, X - F_n)} \subset F_n,$$

所以

$$F \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F'_n)^- = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{D(F, X - F_n)} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = F.$$

更由 D 的单调性, 知 $F \to \{F'_n\}$ 是 X 的层对应. 证完.

定理 7.5.10 单调正规空间为连续闭映射所保持.

证明 设 $f: X \to Y$ 是连续闭映射, D_X 是单调正规空间 X 的单调正规算子. 设 F, K 是空间 Y 的不相交闭集, $f^{-1}(F)$, $f^{-1}(K)$ 是空间 X 的不相交闭集, 取 U 为包含在 $D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K))$ 内的最大饱和集 (关于 f), 即

$$U = \{x \in X : f^{-1}(f(x)) \subset D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K))\},$$

则 $f(U)$ 是开集 (见推论 1.5.1), 且 $f(U) \subset f(D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K)))$. 下证 $f(U) = D_Y(F,K)$ 是 Y 上的单调正规算子.

显然, $F \subset f(U)$. 下证 $\overline{f(U)} \subset Y - K$. 由 D_X 是单调正规算子,

$$f(\overline{D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K))}) \subset f(X - f^{-1}(K)) = Y - K,$$

于是

$$Y - f(\overline{D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K))}) \supset K,$$

所以对每一 $y \in K$, $Y - f(\overline{D_X(f^{-1}(F), f^{-1}(K))})$ 是 y 的开邻域与 $f(U)$ 不交, 从而 $\overline{f(U)} \subset Y - K$.

容易证明, D_Y 满足定义 7.5.2 的 (ii), 所以 D_Y 是 Y 上的单调正规算子. 证完.

由定理 7.5.9、定理 7.5.10 及定理 7.5.3 重又得到连续闭映射保持层空间 (定理 7.4.10), 这里看到通过单调正规空间以证明层空间为连续闭映射保持简洁得多.

定理 7.5.11　单调正规空间是集态正规的.

证明　设 $\mathscr{F}$ 是单调正规空间 X 的离散闭集族, 设 X 上的单调正规算子 D 满足 $D(F,K)\cap D(K,F)=\varnothing$. 对每一 $F\in\mathscr{F}$, 令 $F^*=\cup\{F'\in\mathscr{F}:F'\neq F\}$. 置 $U_F=D(F,F^*)$, 则 $F\subset$ 开集 U_F. 对 F_0, $F_1\in\mathscr{F}$, $F_0\neq F_1$, 则

$$U_{F_0}\cap U_{F_1}=D(F_0,F_0^*)\cap D(F_1,F_1^*)\subset D(F_0,F_1)\cap D(F_1,F_0)=\varnothing.$$

证完.

推广度量空间也可以从减弱度量公理 (定义 4.1.1) 入手.

定义 7.5.3[7]　设 X 是一集, 如果对任意两点 $x,y\in X$ 可以定义非负实值函数 $d(x,y)$ 满足:

(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$,

则称 $d(x,y)$ 是 X 上的**对称** (symmetric).

与度量公理比较, 这里缺少三角不等式, 从而通常的 ε 球

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in X:d(x,y)<\varepsilon\}$$

之集不能形成拓扑的基. 这是因为缺少三角不等式, 我们不能像定理 4.1.1 一样证明: "对每一 $y\in B(x,\varepsilon)$, 存在 $\delta>0$ 使 $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$", 因此为了使带对称的集 X 成为拓扑空间, 增加定义 7.5.4 中的条件.

定义 7.5.4[7, 21]　拓扑空间 X 称为**可对称化的** (symmetrizable), 如果 X 上存在对称 d 满足条件: $U\subset X$ 是开集当且仅当对每一 $x\in U$, 存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x,\varepsilon)\subset U$. 简称拓扑空间 (X,d) 是**对称空间** (symmetric space).

由定义 7.5.4 结合此定义前的讨论, 这里的 ε 球未必是开集, 从而不能把定义 7.5.4 中的条件换为 " U 是开集当且仅当 U 是某些 ε 球的并".

定义 7.5.4 中的条件可以它的对偶形式表述: $F\subset X$ 是闭集当且仅当对每一 $x\notin F$, 距离 $D(x,F)>0$ (定义 4.1.2), 即 F 是闭集当且仅当对每一 $x\notin F$, 存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x,\varepsilon)\cap F=\varnothing$.

定义 7.5.5[183, 412]　拓扑空间 X 称为**可半度量化的** (semi-metrizable), 如果 X 上存在对称 d 满足定义 7.5.4 的条件及 "对每一 $x\in X$, $\varepsilon>0$, 有 $x\in B(x,\varepsilon)^\circ$". 简称拓扑空间 (X,d) 是**半度量空间** (semi-metric space).

由上述定义知: 可半度量化空间是可对称化的. 所以 "对 $x\in$ 开集 U, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $x\in B(x,\varepsilon)^\circ\subset B(x,\varepsilon)\subset U$" (结合定义 7.5.4 的条件), 也可以说

$\{B(x,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 形成点 x 的邻域基 (但这邻域基未必是开的). 如果把 "ε" 换为 "$1/n$", 则 $\{B(x,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的可数邻域基, 从而可半度量化空间是第一可数的.

易验证, 可对称化空间是 T_1 空间.

定理 7.5.12[21] 对 T_2 空间 X, 下列条件等价:

(i) X 是可半度量化的;

(ii) X 是第一可数的可对称化空间;

(iii) X 是 Fréchet 的可对称化空间.

证明 由定义 7.5.5 后的讨论, 只要证明 (iii) $\Rightarrow$ (i). 设 X 是 Fréchet 的可对称化空间 (Fréchet 空间的定义见定理 2.3.1 的注记), 要证对 $x\in X$, $\varepsilon>0$, 有 $x\in B(x,\varepsilon)^\circ$. 如若不然, $x\in X-B(x,\varepsilon)^\circ=\overline{X-B(x,\varepsilon)}$. 因 X 是 Fréchet 空间, 存在 $X-B(x,\varepsilon)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\to x$. 因为 X 是 T_2 空间, 所以收敛序列的极限是惟一的 (定理 2.2.4), 若令 $F=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, 则 $\overline{F}=F\cup\{x\}$ 且 F 不是闭集. 另一方面, 对每一 $y\notin F$, 如果 $y\neq x$, 存在 $\delta>0$ 使 $B(y,\delta)\cap\overline{F}=\varnothing$, 从而 $B(y,\delta)\cap F=\varnothing$; 如果 $y=x$, 则 $B(y,\varepsilon)\cap F=\varnothing$. 因此 F 又是闭集, 这一矛盾说明 $x\in B(x,\varepsilon)^\circ$. 证完.

注记 在集合 $[0,\omega_1)$ 上赋予有限补拓扑的空间是可对称化的 Fréchet 空间, 但不是第一可数空间 [179].

定理 7.5.13[99] 空间 X 是可半度量化空间当且仅当 X 是 T_1 第一可数的半层空间.

证明 必要性. 显然, 可半度量化空间 X 是 T_1 的第一可数空间, 下证 X 是半层空间.

对闭集 $F\subset X$, 置 $G(F,n)=\{y:D(y,F)<1/2^n\}^\circ$, 由于 $x\in B(x,\varepsilon)^\circ$ (定义 7.5.5), $F\subset G(F,n)$. 显然

$$F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G(F,n),\ \text{且}\ F\subset K\ (\text{闭集})\ \Rightarrow G(F,n)\subset G(K,n)\ (n\in\mathbb{N}).$$

所以 $F\to\{G(F,n)\}$ 是 X 上的半层对应.

充分性. 设 X 是 T_1 第一可数的半层空间. 对每一 $x\in X$, 点 x 具有可数递减的开邻域基 $\{b(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 及存在 $\mathbb{N}\times X$ 上的 g 函数 $g(n,x)$ 满足: $x\in g(n,y_n)\Rightarrow y_n\to x$ (定理 7.4.3). 置 $h(n,x)=b(n,x)\cap g(n,x)$, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y,\\ 1/2^n, & \text{当 } x\neq y, \text{这里 } n\in\mathbb{N} \text{ 是使 } x\notin h(n,y)\\ & \text{及 } y\notin h(n,x) \text{ 都成立的最小正整数},\end{cases}$$

也可记作 $d(x,y) = \sup\{1/2^n : x \notin h(n,y)$ 及 $y \notin h(n,x)\}$ (这里 "sup" 是对 $1/2^n$ 说). 显然, d 是 X 上的对称 (利用 T_1 分离性质).

注意, $y \in h(n,x) \Rightarrow d(x,y) < 1/2^n$, 所以 $h(n,x) \subset B(x,1/2^n)^\circ$.

下证 $\{B(x,1/2^n) : n \in \mathbb{N}\}$ 是点 x 的邻域基. 如若不然, 存在包含点 x 的开集 U 不能包含任一 $B(x,1/2^n)$, 即对任一 $n \in \mathbb{N}$, $B(x,1/2^n) - U \neq \varnothing$, 取 $y_n \in B(x,1/2^n) - U$. 由于 $d(x,y_n) < 1/2^n$, 无论 $y_n \in h(n,x) \subset b(n,x)$ 或 $x \in h(n,y_n) \subset g(n,y_n)$ 出现无限次, 由前者 $y_n \in b(n,x)$, 则因第一可数性而得 $y_n \to x$, 或者由后者 $x \in g(n,y_n)$, 则因半层性而得 $y_n \to x$, 所以存在 $\{y_n\}$ 的子序列收敛于 x. 但这是矛盾的, 因这些 y_n 都处于开集 U 之外, 而 U 包含 x. 证完.

定理 7.5.14[183] T_1 可展空间是可半度量化的.

证明 可展空间是半层空间 (定理 7.5.4) 和第一可数空间, 由定理 7.5.13 得证. 证完.

7.6 具有点可数基的空间

推广度量空间也可以把 Nagata-Smirnov 度量化定理中的 " σ 局部有限基" 减弱为 " σ 点有限基"、" σ 局部可数基"、"点可数基", 三者之中以 "**点可数基**" (point-countable base) 在广义度量空间理论及度量化理论中最有用处.

关于具有点可数基的空间的度量化定理, 最著名的是 Miščenko[294] 的 "具有点可数基的 T_2 紧空间可度量化" (定理 7.6.1). 这定理的证明依赖于更著名的 Miščenko 引理 (引理 7.6.1). 从而证明命题 " T_1 紧的点可数基是可数的". 然后由 Urysohn 度量化定理得 Miščenko 定理.

以下在证明 Miščenko 定理时, 我们绕过 Miščenko 引理, 采用 M. E. Rudin 的思路与方法 (见文献 [97]), 这样做不但比较自然简捷, 而且可以把定理中的条件 "紧" 减弱为 "可数紧". 鉴于 Miščenko 引理的重要性远超过上述度量化定理, 因此我们还是先证明这条引理.

引理 7.6.1 (Miščenko 引理 [294]) 设 $\mathscr{A}$ 是集合 E 的子集族. 如果 $\mathscr{A}$ 是点可数的, 则由 $\mathscr{A}$ 中元构成的 E 的有限最小覆盖至多可数 (最小覆盖指不包含真子覆盖者).

证明 记 $\mathscr{V}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 为 $\mathscr{A}$ 中正好 n 个元构成的 E 的有限最小覆盖所成集族 (所有由 $\mathscr{A}$ 中有限个元构成的最小覆盖当为 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$). 设引理不真, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使 $\mathscr{V}_{n_0}$ 是不可数的集族. 对正整数 $k \leqslant n_0$ 及 $\mathscr{A}$ 中任意个 (不同) 元 $A_1, A_2, \cdots, A_k$, 置

$$\mathscr{S}_{A_1A_2\cdots A_k} \text{ 为 } \mathscr{V}_{n_0} \text{ 中的覆盖之包含 } A_1, A_2, \cdots, A_k \text{ 者所成族.}$$

任取 $p_1 \in E$, 置 $\mathscr{A}_{p_1} = \{A \in \mathscr{A} : p_1 \in A\}$ (由假设 $|\mathscr{A}_{p_1}| \leqslant \aleph_0$), 则有

$$\mathscr{V}_{n_0} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_{p_1}} \mathscr{S}_A. \tag{7.6.1}$$

由 (7.6.1), $|\mathscr{V}_{n_0}| > \aleph_0$ 和 $|\mathscr{A}_{p_1}| \leqslant \aleph_0$ 可知, 存在 $A_1 \in \mathscr{A}_{p_1}$ 使 $|\mathscr{S}_{A_1}| > \aleph_0$. 容易看出, $E \not\subset A_1$ (否则, $n_0 = 1$ 并且 $\mathscr{V}_{n_0} = \mathscr{A}_{p_1}$, 与 $|\mathscr{V}_{n_0}| > \aleph_0$ 和 $|\mathscr{A}_{p_1}| \leqslant \aleph_0$ 矛盾). 取 $p_2 \in E - A_1$. 置 $\mathscr{A}_{p_2} = \{A \in \mathscr{A} : p_2 \in A\}$ (由假设 $|\mathscr{A}_{p_2}| \leqslant \aleph_0$), 则有

$$\mathscr{S}_{A_1} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_{p_2}} \mathscr{S}_{A_1 A}. \tag{7.6.2}$$

利用 (7.6.2), 类似于上面, 存在 $A_2 \in \mathscr{A}_{p_2}$ 使 $|\mathscr{S}_{A_1 A_2}| > \aleph_0$, 并且 $E \not\subset A_1 \cup A_2$.

继续如此下去, 对 $k < n_0$, 存在点 $p_{k+1} \in E - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 与 $A_{k+1} \in \mathscr{A}_{p_{k+1}}$ 使 $|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1}}| > \aleph_0$. 特别地, $k = n_0 - 1$ 时, 我们可以找到 $\mathscr{A}$ 中不同元 $A_1, A_2, \cdots, A_{n_0}$ 使 $|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}}| > \aleph_0$. 但是 $\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}} \subset \mathscr{V}_{n_0}$, 从而 $\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}}$ 只能是由单元素的一个覆盖 ($\{A_1, A_2, \cdots, A_{n_0}\}$) 构成的族. 这是矛盾的. 证完.

引理 7.6.2 (Rudin) 可分空间的点可数基可数.

证明 设 X 具有点可数基 $\mathscr{A}$, C 是 X 的可数稠子集, 则 $\mathscr{A}$ 中任一元 (开集) 必与 C 相交, 由于 $\mathscr{A}$ 的点可数性及 C 是可数集知 $\mathscr{A}$ 是可数的. 证完.

引理 7.6.3 (Rudin) 具有点可数基的 T_1 可数紧空间是可分的.

证明 设 X 是 T_1 可数紧空间具有点可数基 $\mathscr{B}$. 下面构造可数集的序列 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使 $C_n \subset C_{n+1}$ 且 $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ 稠于 X.

任取 $x \in X$, 令 $C_1 = \{x\}$. 如可数集 C_n 已取得, 置

$$\mathscr{B}_n = \{B \in \mathscr{B} : B \cap C_n \neq \varnothing\}.$$

对 $\mathscr{B}_n$ 的每一有限子族 $\mathscr{F}$ 之满足 $X - \cup\mathscr{F} \neq \varnothing$ 者, 任取点 $x_{\mathscr{F}} \in X - \cup\mathscr{F}$. 令 C_{n+1} 为 C_n 与这些 $x_{\mathscr{F}}$ 所成集的并, 则 $C_n \subset C_{n+1}$. 由于 C_n 可数, $\mathscr{B}_n$ 也可数 (因 $\mathscr{B}$ 是点可数的), 它的有限子族也仅可数个, 所以 C_{n+1} 是可数集. 置 $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, 则 C 是可数集, 下证 C 稠于 X (即 $\overline{C} = X$).

如若不然, 存在 $x_0 \in X - \overline{C}$, 因 X 是 T_1 的, $X - \{x_0\}$ 是包含 $\overline{C}$ 的开集, 而 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 故可取 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{B}$ 中元 (开集) 之与 $\overline{C}$ 相交而不包含 x_0 者所成集族. $\mathscr{U}$ 形成 $\overline{C}$ 的开覆盖, $\mathscr{U}$ 中元 (开集) 与 $\overline{C}$ 相交, 也与 C 相交, C 是可数集, $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ 是点可数的, 故 $\mathscr{U}$ 可数. $\mathscr{U}$ 覆盖可数紧集 $\overline{C}$, 故 $\mathscr{U}$ 具有有限子覆盖 $\mathscr{F}_0$. 由于 $\mathscr{U}$ 中元均与 C 相交, 从而分别与某些 C_n 相交. 因 $\mathscr{F}_0$ 仅包含 $\mathscr{U}$ 中有限个元, 而 $C_n \subset C_{n+1}$, 故存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使 $\mathscr{F}_0$ 中每一个元均与 C_{n_0} 相交, 所以 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{B}_{n_0}$. 但 $\mathscr{U}$ 中元都不包含 x_0, 所以 $X - \cup\mathscr{F}_0 \neq \varnothing$. 这样, C_{n_0+1} 应包含 $X - \cup\mathscr{F}_0$ 的一个点 $x_{\mathscr{F}_0}$, 这与 $\mathscr{F}_0$ 覆盖 C_{n_0+1} ($\mathscr{F}_0$ 覆盖 $\overline{C}$) 矛盾. 故 C 稠于 X, X 是可分空间. 证完.

注记　上述引理中的 T_1 条件是重要的. 如让 X 是任一不可数集, 赋予排除点拓扑 (例 5.5.3, 取定排除点 $p \in X$). 则 X 是 T_0 的紧空间, 但不是 T_1 空间. 由于 $X - \{p\}$ 的每一点都是 X 的孤立点, 所以 X 不是可分空间. 又惟一非孤立点 p 的仅有开邻域是 X, 所以 X 具有点可数基.

结合引理 7.6.2 得如下命题.

命题 7.6.1[294]　T_1 可数紧空间的点可数基是可数的.

和 Miščenko 原命题比较, 这里把 "紧" 减弱为 "可数紧".

定理 7.6.1 (Miščenko 度量化定理 [294])　具有点可数基的 T_2 紧空间可度量化.

证明　用命题 7.6.1, T_2 紧空间是正规的, 由 Urysohn 度量化定理 (定理 4.3.1) 得证. 证完.

从上面论证可以看到 Rudin 的思路是突出可分性.

定义 7.6.1　空间 X 到空间 Y 上的映射 $f: X \to Y$ 称为 ***s* 映射** (s-mapping), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可分的.

定理 7.6.2[335]　连续的开、s 映射保持具有点可数基的空间.

证明　设 $f: X \to Y$ 是由具有点可数基的空间 X 到空间 Y 上的连续开、s 映射. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数基, 因 f 是连续开映射, $f(\mathscr{B}) = \{f(B): B \in \mathscr{B}\}$ 是 Y 的基. 由于每一 $f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ 是可分的, $f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交 (引理 7.6.2), 所以 $f(\mathscr{B})$ 是点可数的. 证完.

这里看到连续开、s 映射保持点可数基是最自然的.

度量空间具有点可数基, 由定理 7.6.2, "度量空间在连续开、s 映射下的像具有点可数基". 定理 7.6.3 是上述论断的逆.

定理 7.6.3[335]　每一个具有点可数基的 T_0 空间是某一度量空间在连续开、s 映射下的像.

回忆前面的定理 4.4.4, Ponomarev 在证明 "每一个满足第一可数公理的 T_0 空间是某一度量空间在连续开映射下的像" 时构造了一个广义贝尔零维空间 $N(A)$ (是一度量空间), 具有点可数基的空间满足第一可数公理, 可以借用那里的证法, 读者可参考.

证明　设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 T_0 空间 X 的点可数基. 利用指标集 A 构造广义贝尔零维空间 $N(A)$, 取 $N(A)$ 的子集

$$S = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots) : \{U_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ 形成某一点 } x \in X \text{ 的邻域基}\}.$$

定义映射 $f: S \to X$ 使 $f(\alpha) = x$, 这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$, 而 $\{U_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 形成点 x 的邻域基. 在定理 4.4.4 中已证明 f 是满的连续开映射, 这里只要证明 f 是 s 映射, 即证每一 $f^{-1}(x)$ $(x \in X)$ 是可分的.

按 $N(A)$ 可记作 $N(A)=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 每一 $A_n=A$, A 是指标集, 可赋予离散拓扑, 所以 $N(A)$ 是离散空间的可数积, S 是 $N(A)$ 的子集. 这里 $\mathscr{U}$ 是点可数的, 每一 $x\in X$ 仅属于 $\mathscr{U}$ 中可数个元, 所以 $f^{-1}(x)$ 是可数离散空间的可数积的子空间, 是可分的 (习题 2.17). 证完.

Filippov[116] 证明了 "连续双商、 s 映射保持点可数基" 改进定理 7.6.2, 原证较繁, Burke 和 Michael[75] 提供一引理使证明较易, 这引理本身很有用, 证明也不简单.

引理 7.6.4[75] 空间 Y 具有点可数基当且仅当 Y 具有点可数覆盖 $\mathscr{P}$ 使对每一 $y\in Y$ 及包含点 y 的开集 V, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $y\in(\cup\mathscr{P}')^\circ$, 且对每一 $P\in\mathscr{P}'$ 有 $y\in P\subset V$.

证明 必要性显然. 下证充分性. 设空间 Y 具有点可数覆盖 $\mathscr{P}$ 满足定理条件, 要证 Y 具有点可数基. 令

$$\varPhi=\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}:\mathscr{F}\text{ 是有限集族}\}.$$

为后面要用, 先指出 Y 是第一可数的, 这是因为由定理条件, 对每一 $y\in Y$,

$$\{(\cup\mathscr{F})^\circ:\mathscr{F}\in\varPhi,y\in(\cup\mathscr{F})^\circ,y\in\cap\mathscr{F}\}$$

是点 y 的可数邻域基. 显然, $\{(\cup\mathscr{F})^\circ:\mathscr{F}\in\varPhi\}$ 是 Y 的基, 但未必是点可数的, 下面使集 $(\cup\mathscr{F})^\circ$ 作适当收缩.

对每一有限集 $\mathscr{F}\in\varPhi$, 置

$$\mathscr{U}(\mathscr{F})=\{A\subset(\cup\mathscr{F})^\circ:\text{当 }\mathscr{E}\text{ 是 }\mathscr{F}\text{ 的真子集时}, A\not\subset(\cup\mathscr{E})^\circ\},$$
$$V(\mathscr{F})=(\cup(\mathscr{U}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}))^\circ.$$

下证 $\mathscr{V}=\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\varPhi\}$ 是 Y 的点可数基.

先证 $\mathscr{V}$ 是 Y 的基. 设 $y\in W$, W 是 Y 中的开集. 由定理条件, 存在 $\mathscr{F}\in\varPhi$ 使 $y\in(\cup\mathscr{F})^\circ\subset W$. 可以假设: 如果 $\mathscr{E}\subsetneq\mathscr{F}$, 则 $y\notin(\cup\mathscr{E})^\circ$. 显然, $V(\mathscr{F})\subset\cup\mathscr{U}(\mathscr{F})\subset(\cup\mathscr{F})^\circ\subset W$. 下证 $y\in V(\mathscr{F})$. 因为 $y\in(\cup\mathscr{F})^\circ$, 再一次引用定理条件, 取 $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}$ 使 $y\in(\cup\mathscr{S})^\circ$, 且对每一 $P\in\mathscr{S}$, $y\in P\subset(\cup\mathscr{F})^\circ$. 设 $\mathscr{E}\subsetneq\mathscr{F}$, 由 $y\in P\subset(\cup\mathscr{F})^\circ$ 及 $y\notin(\cup\mathscr{E})^\circ$, 知 $P\not\subset(\cup\mathscr{E})^\circ$. 再由 $\mathscr{U}(\mathscr{F})$ 的定义, $P\in\mathscr{U}(\mathscr{F})$. 所以 $\mathscr{S}\subset\mathscr{U}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}$. 从而 $(\cup\mathscr{S})^\circ\subset V(\mathscr{F})$, $y\in V(\mathscr{F})$.

下证 $\mathscr{V}$ 是点可数的, 即证 $y\in V(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F}\in\varPhi$ 成立. 按 $y\in V(\mathscr{F})$, 则 $y\in$ 某些集 $A\in\mathscr{U}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}$, 由于 $\mathscr{P}$ 是点可数的, $y\in A$ 仅对可数个 $A\in\mathscr{P}$ 成立. 所以只要证明:

(∗) 如 $A\subset Y$, 则 $A\in\mathscr{U}(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F}\in\varPhi$ 成立.

对 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\Phi_n = \{\mathscr{F} \in \Phi : |\mathscr{F}| = n\}.$$

只要证 $A \in \mathscr{U}(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F} \in \Phi_n$ 成立. 如若不然, $A \in \mathscr{U}(\mathscr{F})$ 对 Φ_n 中不可数个 $\mathscr{F}$ 成立, 这不可数个 $\mathscr{F}$ 所成族记作 $\Psi, \Psi \subset \Phi_n$. 取极大族 $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}$ 使 $\mathscr{R} \subset \mathscr{F}$, 对不可数个 $\mathscr{F} \in \Psi$ 成立. 置 $\Psi^* = \{\mathscr{F} \in \Psi : \mathscr{R} \subsetneq \mathscr{F}\}$, 显然 $0 \leqslant |\mathscr{R}| < n$, 如 $\mathscr{F} \in \Psi^*$, 则 $A \in \mathscr{U}(\mathscr{F})$ 及 $\mathscr{R} \subsetneq \mathscr{F}$. 所以由 $\mathscr{U}(\mathscr{F})$ 的定义, $A \not\subset (\cup\mathscr{R})^\circ$, 可取 $y \in A$ 而 $y \notin (\cup\mathscr{R})^\circ$. 令 $E = Y - \cup\mathscr{R}$, 则 $y \in \overline{E}$. 由于 Y 是第一可数的, 存在可数集 $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E$ 使 $z_n \to y$, 故 $y \in \overline{Z}$. 如 $\mathscr{F} \in \Psi^*$, 则 $y \in (\cup\mathscr{F})^\circ$ (因 $y \in A \subset (\cup\mathscr{F})^\circ$). 所以 Z 与某些 $P \in \mathscr{F}$ 相交, 因 $\mathscr{P}$ 是点可数的, Z 只能与可数个 $P \in \mathscr{P}$ 相交. 从而 Z 必与某些 $P_0 \in \mathscr{P}$ 相交, 而这 P_0 属于 Ψ^* 中不可数个 $\mathscr{F}$. 注意, $P_0 \notin \mathscr{R}$, 因为 P_0 与 Z 相交而 $\cup\mathscr{R}$ 与 Z 不相交. 令 $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \cup \{P_0\}$, 则 $\mathscr{R}' \supsetneq \mathscr{R}$ 及 $\mathscr{R}' \subset \mathscr{F}$ 对不可数个 $\mathscr{F} \in \Psi$ 成立, 这与 $\mathscr{R}$ 的极大性矛盾, 从而证明了 (*).

到此证明了 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的点可数基. 证完.

定理 7.6.4 (Filippov 定理 [116])　连续的双商、 s 映射保持具有点可数基的空间.

证明　设 $f : X \to Y$ 是由具有点可数基的空间 X 到空间 Y 上的连续的双商、 s 映射, 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数基, 置 $\mathscr{P} = f(\mathscr{B})$, 因 f 是 s 映射, 和定理 7.6.2 一样知 $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的点可数覆盖.

对 $y \in Y, W$ 是 Y 中包含 y 的开集, 取 $\mathscr{B}$ 中元之使 $B \subset f^{-1}(W)$ 且 $B \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$ 者所成族 $\mathscr{B}'$, 则 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}, \mathscr{B}'$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 因 f 是双商的, 存在有限集族 $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}'$, 使 $y \in (\cup f(\mathscr{E}))^\circ$. 对每一 $B \in \mathscr{E}$, $f(B) \in f(\mathscr{E})$, 由 $B \subset f^{-1}(W)$ 及 $B \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$ 得 $y \in f(B) \subset W$. 由引理 7.6.4 知空间 Y 具有点可数基. 证完.

定理 7.6.5　对 T_0 空间 X, 下列论断等价:

(i) X 是具有点可数基的空间;

(ii) X 是度量空间在连续的开、 s 映射下的像 [335];

(iii) X 是度量空间在连续的双商、 s 映射下的像 [116];

(iv) X 是度量空间在连续的可数双商、 s 映射下的像 [287].

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii), 见定理 7.6.3. (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv), 显然 (定义 5.2.1). 由度量空间具有点可数基, 点可数基空间性质是遗传性及引理 7.6.2, 度量空间上的可数双商的 s 映射就是双商映射, 所以由定理 7.6.4 得 (iv) $\Rightarrow$ (i). 证完.

在例 6.6.1 后面曾引入 Arhangel'skiĭ 的 MOBI 类. 空间 Y 是 MOBI 类中的元当且仅当存在一度量空间 M 及有限个连续开紧映射 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$, 使 $(\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n)(M) = Y$[42]. 下面证明连续开、紧映射保持具有点可数基的 T_1 空间, 这是能为连续开、紧映射保持的极少数的一类空间.

定理 7.6.6[145] 设 f 是由具有点可数基的 T_1 空间 X 到空间 Y 上的连续伪开映射, 且对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数紧的, 则 Y 具有点可数基.

证明 对每一 $y \in Y$, 由引理 7.6.3, $f^{-1}(y)$ 是可分的; 又由命题 7.6.1 和定理 3.5.9, $f^{-1}(y)$ 是紧的 (也可应用定理 6.6.1). 所以 f 是 s、紧映射. 下证 f 是双商映射. 对每一 $y \in Y$ 及 X 中的任一开集族 $\mathscr{U}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 由于 f 是紧映射, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 即 $f^{-1}(y) \subset \cup\mathscr{U}'$, 因为 f 是伪开映射, 所以 $y \in f(\cup\mathscr{U}')^\circ$. 从而 f 是双商映射. 再由定理 7.6.4, Y 具有点可数基. 证完.

注记 定理 7.6.6 的证明表明: 紧的伪开映射是双商映射. 由于闭映射是伪开映射, 所以拟完备映射 (定义 5.2.1) 保持具有点可数基的 T_1 空间性质. 由此可获得下列 Filippov 的定理.

推论 7.6.1[115] 完备映射保持具有点可数基的 T_1 空间.

顺便指出: "度量空间在连续开、紧映射下的像正好是 T_1 弱仿紧 (即 meta 紧) 的可展空间"[21], 从而知这样的空间具有点可数基.

定义一个 MOBI 类的子类 **$\mathbf{MOBI_1}$ 类**: 当 MOBI 类中的元表示为度量空间在有限次连续的开紧映射的复合映射下的像空间时, 满足这每一次连续开紧映射的像空间都是 T_1 空间. Chaber[87] 证明了每一具有点可数基的 T_1 空间属于 MOBI_1 类. 反之, 由定理 7.6.6 及 MOBI_1 类的定义有下述推论.

推论 7.6.2 MOBI_1 类的每一元是具有点可数基的空间.

Miščenko 度量化定理 (定理 7.6.1) 中的 "基" 并非必要, 可代以 (在 T_1 意义下) 可分离点的覆盖.

定义 7.6.2[286] 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为 **$\mathbf{T_1}$ 可分离的** (T_1-separating), 如果对任意 $x, y \in X$ $(x \neq y)$, 存在 $U \in \mathscr{U}$ 使 $x \in U$ 而 $y \notin U$ (即 $x \in U \subset X - \{y\}$).

回忆 $\aleph_1$ 紧的概念 (定理 4.1.7 的注记). 拓扑空间 X 称为 $\aleph_1$ 紧的, 如果 X 的每一离散闭子集的势小于 $\aleph_1$, 也就是每一不可数子集有聚点.

引理 7.6.5 $\aleph_1$ 紧空间的点可数开覆盖具有可数子覆盖.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 $\aleph_1$ 紧空间 X 的点可数开覆盖. 可以归纳地定义 X 的子集 $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 使 $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U})$ 及 $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{st}(x_\alpha, \mathscr{U})$, 则 $\{\{x_\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ 是 X 的离散集族. 事实上, 如 $x \in X$, 则存在最小的 $\beta < \kappa$ 使 $x \in \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U})$, 则点 x 的邻域 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U})$ 仅与 $\{\{x_\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ 中一个元相交. 因 X 是 $\aleph_1$ 紧的, 于是每一离散集族是可数的 (定理 6.6.13 的注记 1), 从而 $|\kappa| < \aleph_1$, 又因 $\mathscr{U}$ 是点可数的, 所以

$$\{U \in \mathscr{U} : \text{存在 } \alpha < \kappa \text{ 使 } x_\alpha \in U\}$$

是 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖. 证完.

定理 7.6.7[201] 具有点可数的 T_1 可分离开覆盖的 T_2 可数紧空间 X 是紧可度量化空间.

证明 只要证明 X 具有 G_δ 对角线, 就由定理 7.3.9 得证.

所谓 X 具有 G_δ 对角线是指 X^2 的对角线 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 是 X^2 中的 G_δ 集. 注意, X^2 也具有点可数的 T_1 可分离开覆盖, 记为 $\mathscr{U}$. 置

$$\mathscr{V}=\{\cup\mathscr{U}':\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}\text{ 是 }\Delta\text{ 的有限最小覆盖}\}.$$

由 Miščenko 引理 (引理 7.6.1), $\mathscr{V}$ 是可数的, 只要证 $\Delta=\cap\mathscr{V}$. 显然, $\Delta\subset\cap\mathscr{V}$ (由下面的证明可见, 当 $X\neq\varnothing$ 时, $\mathscr{V}\neq\varnothing$). 下证 $\Delta\supset\cap\mathscr{V}$. 设 $p\in X^2-\Delta$. 下证 $p\notin\mathscr{V}$ 中某一元 $\cup\mathscr{U}'$, 从而 $p\notin\cap\mathscr{V}$ 得证.

对每一 $q\in\Delta$, 由 $\mathscr{U}$ 的 T_1 可分离性, 可取 $U_q\in\mathscr{U}$, 使 $q\in U_q\subset X^2-\{p\}$, 则 $\{U_q:q\in\Delta\}$ 是 Δ 的点可数开覆盖不包含点 p. 因 Δ 同胚于 X, Δ 也是可数紧的, 从而 $\aleph_1$ 紧的. 由引理 7.6.5, $\{U_q:q\in\Delta\}$ 具有可数子覆盖, 于是具有有限最小子覆盖 $\mathscr{U}'$ (因 Δ 可数紧). 所以 $\Delta\subset\cup\mathscr{U}'$, 而 $p\notin\cup\mathscr{U}'\in\mathscr{V}$, 故 $p\notin\cap\mathscr{V}$. 证完.

Ishii 和 Shiraki[201] 证明了更一般的结果：具有点可数的 T_1 可分离开覆盖的 T_2, M 空间是可度量化空间.

关于点可数覆盖的进一步研究参见文献 [76], [171], [259], [391] 等.

习 题 7

7.1[215] $\aleph_1$ 紧、Moore 空间可度量化.

7.2 证明在可展空间, 闭集 $F=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(F,\mathscr{U}_n)$, 这里 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是这空间的展开, 从而可展空间是完备的.

7.3 证明如果 X 是 T_2 空间且 X^2 是完备的, 则 X 具有 G_δ 对角线; 具有 G_δ 对角线这一性质是遗传的且为可数积保持.

7.4 验证 Bennett 和 Lutzer 的例 [45] (习题 6.4) 具有 θ 基.

7.5 证明如果 wΔ 空间的定义 (定义 7.2.1) 中, 当 $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 时, $\{x_n\}$ 的聚点就是 x, 则 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的邻域基, 从而此空间是可展空间.

7.6 证明 T_2、局部紧的 θ 加细空间是 wΔ 空间.

7.7 证明 M 空间是闭遗传的.

7.8[317] T_2 空间 X 是仿紧 M 空间当且仅当 X 同胚于 T_2 紧空间与度量空间的积中的闭集.

7.9[114] 证明可数个 Čech 完全空间的积是 Čech 完全的.

7.10 证明定义 7.2.3 中的 (iii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$ 可改为 (iii′) 对每一 $n\in\mathbb{N}$ 存在 $n'\in\mathbb{N}$ 使 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$.

7.11 设 A 是某度量空间 X 的 Čech 完全子集, 则 A 是 X 中的 G_δ 集.

7.12 Čech 完全空间的 G_δ 子集是 Čech 完全的. 从而 X 是 Čech 完全的当且仅当它同胚于某一 T_2 紧空间的 G_δ 集.

7.13 度量空间与可数紧空间的积的闭子集是 M 空间. 度量空间与 T_2 紧空间的积的 G_δ 子集是 p 空间.

7.14[324] 证明

(i) 具有 σ 局部有限网络的任一子空间具有 σ 局部有限网络;

(ii) 具有 σ 闭包保持网络的正则空间的任一子空间具有 σ 闭包保持网络;

(iii) 设 X 是可数个闭子空间 X_n $(n\in\mathbb{N})$ 的并, 如每一 X_n 具有 σ 局部有限 (σ 闭包保持) 网络, 则 X 具有 σ 局部有限 (σ 闭包保持) 网络.

7.15[62] 证明在正则空间, Moore 空间 $=\sigma$ 空间 $+$ wΔ 空间.

7.16[287] 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的递减闭集序列, 置 $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 考察下列情况:

(i) A 是可数紧集, 且 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 A 的邻域基;

(ii) 如 $x_n\in A_n$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 在 A 中有 ω 聚点;

(iii) 如 $x_n\in A_n$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有 ω 聚点;

(iv) 如集列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 递减, $K_n\subset A_n$ $(n\in\mathbb{N})$, 则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{K_n}\neq\varnothing$.

试证明: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). 如更有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则四者等价.

Nagami[312] 关于 Σ 空间的原始定义是: 空间 X 的 **Σ 网** (Σ-net) 是可数个局部有限闭覆盖序列 $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 满足下列条件者: 如 $K_1\supset K_2\supset\cdots$ 是一列不空的闭集序列, 且对 $x\in X$, $K_i\subset C(x,\mathscr{F}_i)=\cap\{F:x\in F\in\mathscr{F}_i\}$ $(i\in\mathbb{N})$, 则有 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}K_i\neq\varnothing$. 如置 $C(x)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}C(x,\mathscr{F}_i)$, 则 $C(x)$ 是可数紧闭集. 空间 X 是 **Σ 空间**, 如果 X 具有 Σ 网. 试利用 Michael 的上述结果证明 Nagami 的原始定义等价于定义 7.3.4.

7.17[59] 证明定理 7.3.14 对强 Σ^* 空间也成立.

7.18[217] 证明强 $\Sigma^\sharp$ 空间是 θ 加细的.

7.19 **正则开集** (regular open set)与**正则闭集** (regular closed set). U 称为正则开集, 如 $U=U^{-\circ}$. F 称为正则闭集, 如 $F=F^{\circ-}$. 证明:

(i) 如 F 是闭集, 则 F° 是正则开集; 如 U 是开集, 则 U^- 是正则闭集;

(ii) 正则开 (正则闭) 集的补集是正则闭 (正则开) 集;

(iii) 如 U, V 是正则开集, 则 $U\subset V$ 当且仅当 $U^-\subset V^-$;

(iv) 如 F, H 是正则闭集, 则 $F\subset H$ 当且仅当 $F^\circ\subset H^\circ$;

(v) 两个正则闭集的并是正则闭集, 两个正则开集的交是正则开集;

(vi) 正则闭集 (正则开集) 与开闭集的交是正则闭集 (正则开集).

7.20 证明 Sorgenfrey 直线 (例 2.3.3) 是完备正规的, 但不是 M_3 空间 [197].

7.21[187] 用定理 7.4.7 的注记中的 $(*)$ 证明: $\mathrm{M}_3\Rightarrow\sigma$.

7.22[187] 证明定理 7.4.5 的 (i) 及 (ii) $\Rightarrow$ 定理 7.4.7 的注记中的 $(*)$.

7.23[133] 证明伪开、不可约映射是拟开映射.

7.24 设 f 是空间 X 到空间 Y 上的映射, 如果存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 使对每一 $\alpha\in A, U_\alpha$ 同胚于 Y 中的开集 $f(U_\alpha)$, 则称 f 是**局部同胚映射** (locally homeomorphic mapping). 证明: 设 f 是 T_2 空间 X 到空间 Y 上的 k 对一的连续开映射, 则 (i) f 是局部同胚映射; (ii) f 是闭映射.

7.25[133] 设 X 是正规空间, $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的局部有限开覆盖, 每一 U_α $(\alpha\in A)$ 是 M_1 空间, 则 X 是 M_1 空间.

7.26[445]　设 X 是 T_1 空间. 如果闭映射 $f: X \to Y$ 满足: 对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 的边缘是可数紧的, 则 f 是可数双商映射.

7.27　验证 Heath-Junnlia 定理 (定理 7.4.12) 证明中的空间 Z, Y 的每一闭集都具有闭包保持开邻域基, 即 Z, $Y \in \mathscr{P}$ 类.

7.28[360]　证明可对称化空间是序列型空间.

7.29[97]　证明具有点可数基的正则空间如存在 σ 紧稠子集, 则可度量化 (用引理 7.6.3).

7.30[97]　具有点可数基的 T_2 局部紧空间可度量化.

7.31　验证 Michael 直线 (例 5.4.1) 具有点可数基但不是可展空间. 存在具有点可数基的 Čech 完全空间但不是可展空间 [103].

7.32[189]　证明 T_1 空间 X 是单调正规空间当且仅当存在有序对 (p, C) 上的函数 H, 这里 C 是闭集及 $p \in X - C$, 使 $H(p, C)$ 是开集且满足:

(i) $p \in H(p, C) \subset X - C$;

(ii) 如 D 是闭集及 $p \notin C \supset D$, 则 $H(p, C) \subset H(p, D)$;

(iii) 如 p, $q \in X$ 而 $p \neq q$, 则 $H(p, \{q\}) \cap H(q, \{p\}) = \varnothing$.

7.33　验证可用 g 函数刻画:

(i)[183] 可展空间: 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{p, x_n\} \subset g(n, y_n)$, 则 $\{x_n\}$ 以 p 为聚点;

(ii)[197] wΔ 空间: 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{p, x_n\} \subset g(n, y_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点.

7.34　让 X 是正整数集 $\mathbb{N}$ 赋予有限补拓扑的空间. 证明:

(i) X 是 T_1 的紧、可展空间;

(ii) X 不是 k 半层空间;

(iii)[179] 存在 X 上的对称 d 及 X 中的序列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n \to x$, 但 $d(x, x_n) \not\to 0$.

7.35　空间 X 称为 **β 空间** (β-space[196]), 如果存在 g 函数使对每一 $n \in \mathbb{N}$, $p \in g(n, x_n)$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点. 比较习题 7.33 关于 wΔ 空间的刻画知 w$\Delta \Rightarrow \beta$. 比较半层空间的 g 函数刻画 (定理 7.4.3) 知半层 $\Rightarrow \beta$. 试证明下列论断等价 [396]:

(i) X 是 β 空间;

(ii) 对 X 的每一开集 U, 存在 X 的闭集序列 $\{F_n(U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使: (1) $F_n(U) \subset U$, (2) 如 V 是开集, $U \subset V \Rightarrow F_n(U) \subset F_n(V)$, (3) 如果 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 的递增开集序列且 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$, 则 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(U_n) = X$;

(iii) 对 X 的每一闭集 F, 存在 X 的开集序列 $\{U_n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使: (1) $U_n(F) \supset F$, (2) 如 H 是闭集, $F \subset H \Rightarrow U_n(F) \subset U_n(H)$, (3) 如果 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 的递减闭集序列且 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n(F_n) = X$.

由上述刻画, 知 β 空间是可数弱仿紧空间 [197] (利用定理 6.1.22).

7.36[396]　证明 β 空间为连续闭映射所保持.

7.37[242]　证明 β 空间为拟完备映射的逆像保持.

7.38[197]　证明 Σ 空间是 β 空间.

7.39[196]　证明在正则空间, 半层 $= \beta +$ 具有 G_δ^* 对角线.

由习题 7.35～ 习题 7.39 可看到, β 空间与其他广义度量空间的联系很广泛. 但 β 空间不必是第一可数的, 甚至不必是 k 空间 (例 7.4.1).

7.40[197] 空间 X 称为 **γ 空间** (γ-space), 如果存在 g 函数使对每一 $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in g(n,p)$, $x_n \in g(n,y_n)$, 则 $\{x_n\}$ 以 p 为聚点. 试证明:

(i) γ 空间是第一可数的;

(ii) β, γ 的 T_1 空间是可展空间.

第 8 章　广义度量空间 (下)

8.1 $\aleph_0$ 空 间

7.3 节的 σ 空间 (定义 7.3.1) 是把 Nagata-Smirnov 度量化定理中的 “基” 换为 “网络”, “基” 必须是开集, “网络” 没有此限制 (定义 3.1.2). 下面引进 k 网络, 把网络定义中的 “点” 推广为 “紧集” (见定义 8.1.1), k 网络可简称为 k 网, 而网络不简称为网的原因恐怕是为了避免这里的 “network” 与 1.4 节的 “net” 相混淆.

定义 8.1.1[328]　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **k 网络** (或 **k 网**, k-network), 如果对 X 的紧集 K 及开集 U 满足 $K \subset U$, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$. 正则空间 X 称为 **$\aleph_0$ 空间** ($\aleph_0$-space [284]) (**$\aleph$ 空间** ($\aleph$-space)), 如果 X 具有可数 k 网 (σ 局部有限 k 网).

在正则空间, k 网的元可设为闭的, 称为**闭 k 网** (closed k-network).

注记　由于对可数集族 $\mathscr{P}$, 可以假设关于有限并封闭的, 所以上述 $\aleph_0$ 空间的定义可简化为 “存在 $P \in \mathscr{P}$ 使 $K \subset P \subset U$”. Michael [284] 引入 $\aleph_0$ 空间时, 称具有上述性质的 $\mathscr{P}$ 为**伪基** (pseudo-base), 称具有可数伪基的正则空间为 $\aleph_0$ **空间**. 这与定义 8.1.1 是等价的.

下面叙述 $\aleph_0$ 空间的性质, 显然可分度量空间 (具有可数基) 是 $\aleph_0$ 空间.

定理 8.1.1[284]　$\aleph_0$ 空间是可分的, 具有 Lindelöf 性质, 完备的, 且具有 G_δ 对角线.

证明　作为习题, 读者自证.

由此可知, $\aleph_0$ 空间是具有 G_δ^* 对角线的仿紧空间.

定理 8.1.2[284]　$\aleph_0$ 空间是遗传的, 可数可积的.

证明　遗传性是显然的. 下面证明可数个 $\aleph_0$ 空间的积是 $\aleph_0$ 空间.

设 $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, 每一 X_n ($n \in \mathbb{N}$) 是 $\aleph_0$ 空间, 具有可数 k 网 $\mathscr{A}_n$. 显然, X 是正则空间. 对每一 $m \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{P}_m = \left\{ \prod_{n=1}^{m} A_n \times \prod_{n>m} X_n : A_n \in \mathscr{A}_n,\ n \leqslant m \right\},$$

则 $\mathscr{P}_m$ 是 X 的可数集族. 令 $\mathscr{P} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_m$. 为完成定理的证明, 只需验证可数集族 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网.

设 X 的紧集 K 及开集 U 满足 $K\subset U$. 对每一点 $x\in K$, 取积空间的基中的元素 $\prod_{n\in\mathbb{N}}U_n(x)$ 使 $x\in\prod_{n\in\mathbb{N}}U_n(x)\subset U$, 其中仅对有限个 $n\in\mathbb{N}$, $U_n(x)\neq X_n$. 因 K 是紧集, K 为有限个这种元素所覆盖. 记作

$$K\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,1}\cup\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,2}\cup\cdots\cup\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,k}\subset U.$$

由 X 的 T_2 分离性及 K 的紧性, 易证明 (习题 3.7), 存在 X 的非空紧子集族 $\{K_i:i=1,2,\cdots,k\}$ 使

$$K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i,\quad 且\ K_i\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,i}\ (i\leqslant k),$$

这里对每一 $i\leqslant k$, 仅对有限个 $n\in\mathbb{N}$, $U_{n,i}\neq X_n$.

固定正整数 $i\leqslant k$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 记 X 的子集 K_i 在第 n 个坐标空间 X_n 的投影是 $K_{n,i}$, 即 $p_n(K_i)=K_{n,i}$, 则紧集 $K_{n,i}$ 含于开集 $U_{n,i}$. 因为 $\mathscr{A}_n$ 是空间 X_n 的 k 网, 存在 $\mathscr{A}_n$ 的有限子集 $\mathscr{A}_{n,i}$ 使 $K_{n,i}\subset\cup\mathscr{A}_{n,i}\subset U_{n,i}$. 不妨设当 $n>n_i$ 时 $U_{n,i}=X_n$. 置

$$\mathscr{Q}_i=\left\{\prod_{n=1}^{n_i}A_n\times\prod_{n>n_i}X_n:A_n\in\mathscr{A}_{n,i}\right\},$$

则 $\mathscr{Q}_i$ 是 $\mathscr{P}_{n_i}\subset\mathscr{P}$ 的有限子集, 且

$$K_i\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}K_{n,i}\subset\cup\mathscr{Q}_i\subset\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,i}.$$

从而 $\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{Q}_i$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子集, 且

$$K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i\subset\bigcup_{i=1}^{k}(\cup\mathscr{Q}_i)\subset\bigcup_{i=1}^{k}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}}U_{n,i}\right)\subset U.$$

因此, $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网. 证完.

引理 8.1.1[284] 连续的紧覆盖映射保持可数 k 网.

证明 设 $f:X\to Y$ 是由具有可数 k 网 $\mathscr{P}$ 的空间 X 到空间 Y 上的连续的紧覆盖映射, 下证 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$ 是空间 Y 的可数 k 网.

设 C,U 分别是 Y 中的紧集、开集, 且 $C\subset U$. 因 f 是紧覆盖的, 存在 X 中紧集 K 使 $f(K)=C$, 则 $K\subset f^{-1}(U)$, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}'\subset f^{-1}(U)$, 从而 $C\subset f(\cup\mathscr{P}')\subset U$, 这里 $f(\cup\mathscr{P}')=\cup f(\mathscr{P}')$, $f(\mathscr{P}')=\{f(P):P\in\mathscr{P}'\}$ 是 $f(\mathscr{P})$ 的有限子族. 证完.

引理的证明表明: 连续的紧覆盖映射保持 k 网.

定理 8.1.3[284]　连续的闭映射保持 $\aleph_0$ 空间.

证明　设 $f: X \to Y$ 是由 $\aleph_0$ 空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, 由定理 8.1.1, X 是正则 Lindelöf 空间, 从而是 T_2 仿紧的, 因此是正规的. f 是闭映射, Y 是正规的, 从而是正则的. 由推论 6.6.2, f 又是紧覆盖的, X 具有可数 k 网, 由引理 8.1.1, Y 具有可数 k 网. 证完.

注记　由于 $\aleph_0$ 空间是 Lindelöf 空间, 所以 $\aleph_0$ 空间性质不关于拓扑和保持, 于是定理 5.5.5 不适用于 $\aleph_0$ 空间.

定义 8.1.2[284]　空间 X 称为 ***r* 空间** (r-space), 如果对每一 $x \in X$ 存在开邻域列 $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足, 如 $x_n \in U_n(x)$, 则 $\{x_n\}$ 包含在某紧集内. 上述开邻域列称为点 x 的 ***r* 序列** (r-sequence).

定理 8.1.4[284]　$\aleph_0$ 空间 X, 如果又是 r 空间, 则 X 是可分度量空间.

证明　设 X 具有可数伪基 $\mathscr{P}$, 要证 $\{P^\circ : P \in \mathscr{P}\}$ (P° 表示 P 的内核) 是 X 的可数基, 从而由 X 的正则性得证.

如若不然, 存在点 $x \in X$ 及 X 中开集 U 使 $x \in U$, 但不存在 $P \in \mathscr{P}$ 使 $x \in P^\circ \subset U$, 取 $\mathscr{P}$ 中元之包含在 U 中者为 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots\}$. 因 X 正则, 存在点 x 的开邻域 V, 使 $\overline{V} \subset U$, 因 X 是 r 空间, 存在点 x 的 r 序列 $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, 不妨设 $U_n(x) \subset \overline{V}$, $n \in \mathbb{N}$. 由反证的假设, $U_n(x) - P_n \neq \varnothing$, 取 $x_n \in U_n(x) - P_n$. 令 $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 由 r 序列的定义, A 包含于某紧集 C 内, 因 C 是闭集, $\overline{A} \subset C$, 所以 $\overline{A}$ 也是紧集, 且 $\overline{A} \subset \overline{V} \subset U$. 因 $\mathscr{P}$ 是伪基, 存在 P_n 使 $\overline{A} \subset P_n \subset U$, 这与 $x_n \notin P_n$ 矛盾. 证完.

注记　由于第一可数性、局部紧性均蕴含 r 空间性质, 所以满足第一可数公理的 (或局部紧的) $\aleph_0$ 空间是可分度量空间.

定理 8.1.5[284]　设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph_0$ 空间及 k 空间;

(ii) X 是可分度量空间在商映射下的像.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 设 X 是 $\aleph_0$ 空间及 k 空间, 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的可数闭 k 网, 且关于有限并及有限交是封闭的. 置 $N = \mathscr{F}^\omega$, 这里对集 $\mathscr{F}$ 赋以离散拓扑, 则积空间 N 是可分度量空间, N 的每一点是一集序列 $\{F_n\} = (F_1, F_2, \cdots)$, 每一 $F_n \in \mathscr{F}_n$ $(= \mathscr{F})$. 选取具有如下性质的集序列 $\{F_n\}$, 使 X 中某一点 x 的每一邻域包含某 F_n, 且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. 易证 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. 具有上述性质的集序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为点 x 的网络 (见定理 7.3.21 前的定义). 记这些集序列的全体为 M, 显然 $M \subset N$.

定义 $f : M \to X$, 使点 x 的网络 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 对应着点 $x \in X$. 由点网络的定义, 易证 f 是连续的满射 (见定理 4.4.4). 下证 f 是由可分度量空间 M 到 X 上的商

映射.

如 f 不是商映射, 则存在 $A \subset X$ 不是闭的, 但 $f^{-1}(A)$ 却闭于 M. 因 X 是 k 空间, 存在紧集 K 使 $K \cap A$ 不是闭的. 由于 K 是紧的 σ 空间 (因 k 网是网络), 从而可度量化 (定理 7.3.13), 存在 $x \in K - A$ 及 $a_n \in K \cap A$ 使 $a_n \to x$ (定理 2.3.1). 对每一 $m \in \mathbb{N}$, $\{x\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$ 是一紧集, 记作 Z_m. Z_m 应为 $\mathscr{F}$ 中有限个元覆盖. 由于 $\mathscr{F}$ 关于有限并封闭, 存在 $F \in \mathscr{F}$ 使 $F \supset Z_m$. 这种 F 的全体记为 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. x 的每一邻域包含某一紧集 Z_m. 因 $\mathscr{F}$ 是 k 网, 这邻域包含着某 G_n, 所以 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是点 x 的网络, 即 $\{G_n\} \in M$ 且 $f(\{G_n\}) = x \notin A$, 从而 $\{G_n\} \notin f^{-1}(A)$. 另一方面, 点 $\{G_n\}$ 在 M 中的一个邻域基元形如

$$B_m = \{\{F_n\} \in M : F_i = G_i,\ i \leqslant m\},$$

且 $f(B_m) = \bigcap_{i \leqslant m} G_i$, $m \in \mathbb{N}$ [证明同定理 4.4.4 的 (4.4.11) 式]. 由于 $\mathscr{F}$ 关于有限交是封闭的, 所以对 $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i \leqslant m} G_i \in \mathscr{F}$, 又由于每一 G_i $(i \in \mathbb{N})$ 包含着序列 $\{a_n\}$ 的几乎所有的点, 于是 $A \cap (\bigcap_{i \leqslant m} G_i) \neq \varnothing$, 所以 $f^{-1}(A) \cap B_m \neq \varnothing$, 即 $\{G_n\} \in \overline{f^{-1}(A)}$. 这与 $f^{-1}(A)$ 是 M 的闭集相矛盾.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 设 $f : M \to X$ 是可分度量空间 M 到正则空间 X 上的商映射. 首先易知 X 是 k 空间 [因度量空间是 k 空间, 而 k 空间为商映射保持 (定理 3.4.8)], 下证 X 是 $\aleph_0$ 空间.

设 $\mathscr{B}$ 是 M 的可数基. 下证 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 k 网. 如若不然, 存在 X 中紧集 K 及开集 U 使 $K \subset U$, 但 K 不被 $\mathscr{C} = \{C \in f(\mathscr{B}) : C \subset U\}$ 中有限个元覆盖, 把 $\mathscr{C}$ 中元排列为序列 $\{C_n\}$, 取 $x_n \in K - \bigcup_{i \leqslant n} C_i$.

K 具有可数网络, 是紧的 σ 空间, 从而可度量化, 序列 $\{x_n\}$ 应有收敛子序列, 不失一般性, 就作为 $x_n \to x \in K$ 且 $x \neq x_n$. $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 不闭于 X, 因 f 是商映射, $f^{-1}(A)$ 不闭于 M. 令 $z \in \overline{f^{-1}(A)} - f^{-1}(A)$, 则 $z \in f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U)$. 取 $B \in \mathscr{B}$ 使 $z \in B \subset f^{-1}(U)$, 那么 $f(B) \in \mathscr{C}$. 由于 M 是度量空间且 $z \in \overline{f^{-1}(A)} - f^{-1}(A)$, 存在 $f^{-1}(A)$ 中的序列 $\{z_i\}$ 收敛于 z. 由于 B 是开集, 存在 $j \in \mathbb{N}$, 使当 $i > j$ 时有 $z_i \in B$, 从而 $f(z_i) \in f(B)$, 故 $f(B)$ 包含无限个 x_n, 这与 x_n 的取法矛盾. 证完.

定理 8.1.6[284] 设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph_0$ 空间;

(ii) X 是可分度量空间在连续的紧覆盖映射下的像.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $\aleph_0$ 空间 X 存在可数闭 k 网 $\mathscr{F}$. 利用定理 8.1.5 的证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 所构造的可分度量空间 M 及连续的满射 $f : M \to X$. 下面证明 f 是紧覆盖的.

设 $K \subset X$ 是紧集, 则 K 为 $\mathscr{F}$ 中有限个元覆盖, 把所有这些有限覆盖的全体

(可数个) 排列为集序列 $\{\mathscr{F}_n\}$, 则 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 是积空间 $\mathscr{F}^\omega$ 的紧子空间. 令

$$L=\left\{\{F_n\}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n:\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n\right)\cap K\neq\varnothing\right\}.$$

设 $\{F_n\}\in L$, 则 $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n)\cap K\neq\varnothing$, 取定 $x\in(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n)\cap K$. 如果 U 是 x 的邻域, 由 K 的正则性, 存在 K 中的开集 W 使得 $x\in W\subset\overline{W}\subset U\cap K$. 因为 $\mathscr{F}$ 是 X 的 k 网, 存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}'$ 和 $\mathscr{F}''$ 满足:

$$\overline{W}\subset\cup\mathscr{F}'\subset U,\quad K-W\subset\cup\mathscr{F}''\subset X-\{x\}.$$

令 $\mathscr{F}_x=\mathscr{F}'\cup\mathscr{F}''$, 则 $\mathscr{F}_x$ 是 $\mathscr{F}$ 的有限子族, $K\subset\cup\mathscr{F}_x$ 且 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_x)\subset\cup\mathscr{F}'\subset U$, 这 $\mathscr{F}_x$ 应是某 $\mathscr{F}_n$, 从而 $F_n\subset U$. 这表明, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的网络, 所以 $\{F_n\}\in M$ 且 $f(\{F_n\})=x\in K$. 从而 $L\subset M$, 且 $f(L)\subset K$. 另一方面, 如果 $x\in K$, 由于 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是 K 的覆盖列, 所以存在 $F_n\in\mathscr{F}_n$ 使得 $x\in F_n(n\in\mathbb{N})$. 这时 $x\in(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n)\cap K$, 于是 $\{F_n\}\in L$, 由前所证, $f(\{F_n\})=x$, 所以 $K\subset f(L)$. 故 $f(L)=K$.

如果 $\{H_n\}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n-L$, 那么 $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}H_n)\cap K=\varnothing$, 由于 K 是紧集及每一 $H_n\cap K$ $(n\in\mathbb{N})$ 是闭集, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $(\bigcap_{n\leqslant m}H_n)\cap K=\varnothing$ (定理 3.1.1). 令

$$B=\left\{\{F_n\}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n:F_i=H_i,\ i\leqslant m\right\},$$

则 B 是点 $\{H_n\}$ 在积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$ 中的开邻域且 $B\cap L=\varnothing$. 因此 L 闭于 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n$, 从而是紧集.

综上所述, f 是紧覆盖映射.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 由引理 8.1.1 得证. 证完.

定义 8.1.3[284] 具有可数网络的正则空间称为 **cosmic 空间** (cosmic space).

显然, $\aleph_0$ 空间是 cosmic 空间, cosmic 空间是 σ 空间. 此外, cosmic 空间是遗传的, 可数可积的.

定理 8.1.7[284] 设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是 cosmic 空间;

(ii) X 是可分度量空间在连续映射下的像.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设空间 (X,τ) 具有可数闭网络 $\mathscr{F}$. 取 $\mathscr{F}$ 的元的所有有限交所成集族为 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 是可数的, 赋予 X 新的拓扑 τ' 使 $\mathscr{B}$ 是 (X,τ') 的基. $\mathscr{B}$ 的元对原来的拓扑 τ 是闭集, 对新的拓扑 τ' 是既开且闭集, 所以 (X,τ') 是正则空间, 且具有可数基 $\mathscr{B}$, 从而 (X,τ') 是可分度量空间, (X,τ') 到 (X,τ) 的恒等映射是连续的 (因 $\tau'\supset\tau$).

(ii) $\Rightarrow$ (i). 因连续映射保持网络. 证完.

Michael [284] 命名 cosmic 空间源自定理 8.1.7, 因为此空间是 Continuous-images Of Separable Metrics.

$\aleph_0$ 空间的最有趣的应用是在函数空间理论方面, 回忆 2.1 节关于积空间的叙述, 由定理 2.1.4, 积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 中按积拓扑收敛可分解为按坐标收敛, 也称为按点收敛. 后一术语常用于坐标空间相同时. 3.6 节叙述紧化时, 在定理 3.6.2 后述及: 设 A 是一集, $|A|$ 表示 A 的势, $I=[0,1]$ 是闭区间, 积空间 I^A 是 $|A|$ 个 $[0,1]$ 的积, 每一 $q\in I^A$ 可表示为 $q=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 这里 $x_\alpha\in[0,1]$, q 可以看作集 A 到 I 内的实值函数. 因此, I^A 是由 A 到 I 内的实值函数全体, 这函数空间的收敛是按积拓扑收敛, 也就是按点收敛的.

一般来说, 从空间 X 到空间 Y 内的函数 f 的全体可表示为 Y^X, 记

$$W(x,U)=\{f\in Y^X: f(x)\in U\},\quad x\in X,\quad U \text{ 开于 } Y.$$

函数空间的**按点收敛拓扑** (topology of pointwise convergence) 是集 Y^X 以所有 $W(x,U)$ 作为次基形成的拓扑, 此拓扑的基元是这些 $W(x,U)$ 的有限交. 在应用时, 按点收敛拓扑不够 "精" (fine), 所以下面引入**紧开拓扑** [124] (compact-open topology), 这是把上述按点收敛拓扑的次基的 $W(x,U)$ 中的点 x 代以紧集 C (回忆 k 网络是把网络定义中的点代以紧集). 置

$$W(C,U)=\{f\in Y^X: f(C)\subset U\},\quad C \text{ 是 } X \text{ 的紧集},\quad U \text{ 开于 } Y.$$

把这些 $W(C,U)$ 作为次基形成的拓扑称为紧开拓扑, 记为 $\mathscr{C}$. 这拓扑的基元是这些 $W(C,U)$ 的有限交. 由于单点集 $\{x\}$ 是紧集, 显然, 紧开拓扑精于按点收敛的拓扑.

下面把由空间 X 到空间 Y 内的连续函数全体所成集赋以紧开拓扑形成函数空间记为 $\mathscr{C}(X,Y)$.

读者可能对紧开拓扑不太熟悉, 可以作一些简单的练习 (习题 8.20~ 习题 8.24) 以加深理解, 其中有些习题在后面证明时要引用.

引理 8.1.2 [12] $\mathscr{C}(X,Y)$ 是正则空间当且仅当 Y 是正则空间.

证明 必要性. 因 Y 同胚于 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的子空间 (习题 8.23).

充分性. 由于积空间 Y^X 是 T_1 空间且紧开拓扑精于按点收敛的拓扑, 所以 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 T_1 空间. 要证对每一 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$, f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的每一邻域包含某闭邻域, 就紧开拓扑 $\mathscr{C}$ 的次基证明就足够了.

设 $f\in W(C,U)$, C 是 X 中紧集, U 开于 Y, 则 $W(C,U)$ 是 f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的邻域. $f\in W(C,U)\Rightarrow f(C)\subset U$, $f(C)$ 是 Y 中紧集. 因 Y 正则, 存在 Y 中开集

V 使 $f(C) \subset V \subset \overline{V} \subset U$ (定理 3.1.5). 从而

$$f \in W(C,V) \subset \overline{W(C,V)}^{\mathscr{C}} \subset W(C,\overline{V}) \subset W(C,U).$$

$\overline{W(C,V)}^{\mathscr{C}}$ 就是所要求的包含在 $W(C,U)$ 内的闭邻域 (上面第二包含式见习题 8.22, 符号 " $-^{\mathscr{C}}$ " 表示关于紧开拓扑 $\mathscr{C}$ 的闭包). 证完.

回忆赋值映射的概念 (定义 3.6.4).

引理 8.1.3[12] 设 C 是空间 X 的 T_2 局部紧子集, 则 $\mathscr{C}(X,Y) \times C \to Y$ 的赋值映射 $e:(f,x) \to f(x)$ 是连续的.

证明 设 $x \in C$, U 开于 Y 及 $(f,x) \in e^{-1}(U)$, 这里 $f \in \mathscr{C}(X,Y)$, 则 $f(x) \in U$. 因 C 是正则的 (定理 3.4.3) 及 f 连续, 存在 x 在 C 中的紧邻域 N 使 $f(N) \subset U$, 即 $f \in W(N,U)$, $W(N,U)$ 是 f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的邻域, 于是 $W(N,U) \times N$ 是 (f,x) 在 $\mathscr{C}(X,Y) \times C$ 中的邻域且包含于 $e^{-1}(U)$. 所以 $e:(f,x) \to f(x)$ 连续. 证完.

下面要用如下符号: 对 $F \subset \mathscr{C}(X,Y)$ 及 $A \subset X$, 记

$$F(A) = \{f(x) : f \in F \text{ 及 } x \in A\},$$

即 $F(A) = e(F,A)$.

引理 8.1.4 设 X 是 T_2 空间. 若在 X 中 $x_n \to x$ 及 $K(\{x\}) \subset U$, 则对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, $K(\{x_n\}) \subset U$, 这里紧集 $K \subset \mathscr{C}(X,Y)$, U 开于 Y.

证明 如若不然, 存在 $f_n \in K$, 使 $f_n(x_n) \notin U$. 由 K 是紧的, $\{f_n\}$ 有聚点 $f \in K$. 令 $C = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, C 是紧集. 由于 $f(x) \in U$, 与引理 8.1.3 所证明的赋值映射 $e:(f,x) \to f(x)$ 的连续性矛盾. 证完.

定理 8.1.8[284] 设空间 X,Y 都是 $\aleph_0$ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间.

证明 首先由引理 8.1.2 知 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是正则空间. 下面通过三个断言证明 $\mathscr{C}(X,Y)$ 具有可数 k 网.

断言 1. 空间 X 可以设为可分度量空间.

设 X 是 $\aleph_0$ 空间, 由定理 8.1.6, 存在可分度量空间 M 及连续的紧覆盖映射 $f: M \to X$. 定义映射

$$\Phi : \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(M,Y) \text{ 为 } \Phi(g) = g \circ f, \quad g \in \mathscr{C}(X,Y).$$

不难验证 Φ 是到它的值域上的同胚映射 (f 是紧覆盖映射保证了 Φ^{-1} 的连续性). 所以, 如果 $\mathscr{C}(M,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间, 则它的任何子空间是 $\aleph_0$ 空间 (定理 8.1.2), 从而 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间, 到此证明了断言 1.

对 $A \subset X$ 及 $B \subset Y$, 令

$$W(A,B) = \{f \in \mathscr{C}(X,Y) : f(A) \subset B\}.$$

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, $\mathscr{Q}$ 是 Y 的可数 k 网, 它们都关于有限并及有限交封闭. 置

$$\mathscr{P} = \{W(B,Q) : B \in \mathscr{B},\ Q \in \mathscr{Q}\}.$$

断言 2. 设 $K \subset W(C,U)$, 这里 K 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中紧集, C 是 X 中紧集及 U 开于 Y, 则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $K \subset P \subset W(C,U)$.

为了证明断言 2, 只要找到 X 中开集 $V \supset C$ 及 $Q \in \mathscr{Q}$ 使 $K(V) \subset Q \subset U$. 在这种情况下, 对每一 $B \in \mathscr{B}$ 之满足 $C \subset B \subset V$ 者就有 $K \subset W(B,Q) \subset W(C,U)$. 断言 2 可得证.

对 $Q \in \mathscr{Q}$ 之满足 $Q \subset U$ 者排列为 $\{Q_n\}$. 如果没有这样的 V 及 Q 存在, 则存在 $x_n \in X$ 使 $D(x_n, C) = \inf\{d(x_n, x) : x \in C\} < 1/2^n$, 这里 d 是 X 上的某可分度量, 及 $f_n \in K$ 使 $f_n(x_n) \notin \bigcup_{i \leqslant n} Q_i$ ($\mathscr{Q}$ 关于有限交封闭). 由 C 的紧性, 序列 $\{x_n\}$ 有收敛子序列. 不失一般性, 可作为 $x_n \to x \in C$.

由于 $K \subset W(C,U)$, 则有 $K(\{x\}) \subset U$, 由引理 8.1.4, 对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, $K(\{x_n\}) \subset U$. 令 $A = \{x\} \cup \{x_n : K(\{x_n\}) \subset U\}$, 则 A 是紧集, 且 $K(A) \subset U$. 由引理 8.1.3, $K(A)$ 是紧集, 所以 $K(A) \subset Q \subset U$ 对某些 $Q \in \mathscr{Q}$ 成立. 按 Q 应是某 Q_m, 所以 $K(A) \subset Q$ 与 $f_n(x_n) \notin Q$ 在 $n \geqslant m$ 时矛盾, 到此证明了断言 2.

下面的断言 3 完成定理 8.1.8 的证明.

断言 3. 设 $\mathscr{P}$ 如断言 2 所设, 则 $\mathscr{P}$ 的元的有限交所成集族 $\hat{\mathscr{P}}$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的 k 网 (这 k 网显然是可数的).

设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的基, 是所有形如 $W(C,U)$ 的次基的元的有限交所成的集族. 由断言 2 易知: 如 $K \subset W \in \mathscr{W}$, 这里 K 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的紧集, 则有 $\hat{P} \in \hat{\mathscr{P}}$ 使 $K \subset \hat{P} \subset W$. 断言 3 的证明可由下述易证的事实得证 (注意, $\mathscr{C}(X,Y)$ 是正则的).

如 $H \subset U$, H, U 分别是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的紧集、开集, 则 H 为有限个闭集 (从而是紧集) 覆盖, 这些闭紧集包含在某些 $W \in \mathscr{W}$ 而 $W \subset U$(见习题 3.7). 证完.

8.2 ℵ 空 间

Michael [284] 引入 $\aleph_0$ 空间用的是伪基, O'Meara [328] 引入 ℵ 空间用的是 k 网 (具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 ℵ 空间), 这里的 σ 局部有限 k 网不能换成 σ 局部有限伪基. 林寿 [245] 曾证明: 具有点可数 (从而 σ 局部有限) 伪基的 T_2 空间具有可数伪基 (习题 8.10), 所以 ℵ 空间的定义中如把 k 网换为伪基, 则得到的是 $\aleph_0$ 空间.

由于基是 k 网, k 网是网络, 所以度量空间是 ℵ 空间, ℵ 空间是 σ 空间, 从而是半层空间、次仿紧的完备空间且具有 G_δ^* 对角线 (定理 7.3.1 和定理 7.3.12).

定理 8.2.1[328] $\aleph$ 空间是遗传的、可数可积的, 且仿紧 $\aleph$ 空间的可数积是仿紧 $\aleph$ 空间.

证明 $\aleph$ 空间的遗传性是显然的. 类似定理 8.1.2 关于 $\aleph_0$ 空间的方法, 可以证明 $\aleph$ 空间的可数可积性, 其中 σ 局部有限集族的构造同定理 7.3.3 关于 σ 空间的情况. 至于仿紧 $\aleph$ 空间的可数积的仿紧性可由定理 7.3.6 得到, 因为 $\aleph$ 空间是 σ 空间. 证完.

定义 8.2.1[121] 空间 X 的有序集对 (F_1, F_2) 所成族 $\mathscr{F} = \{(F_1, F_2)\}$, 这里 F_1 是闭集且 $F_1 \subset F_2$, 称为**对 k 网** (pair-k-network), 如果对 X 的紧集 K 及开集 $U \supset K$, 存在 $\mathscr{F}$ 中有限个元 (集对) $(F_1^{(i)}, F_2^{(i)})$, $i \leqslant n$, 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_1^{(i)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_2^{(i)} \subset U$.

$\mathscr{F}$ 称为垫状的 (定义 7.4.1), 如果对任何 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$,

$$\overline{\cup\{F_1 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\}} \subset \cup\{F_2 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\}.$$

定理 8.2.2[121, 139] 空间 X 是 k 半层空间当且仅当 X 是 T_1 空间且具有 σ 垫状对 k 网.

证明 设 $(X, \mathscr{T})$ 是 k 半层空间, $U \to \{U_n\}$ 是 X 上的 k 半层对应 (定义 7.5.1). 置

$$\mathscr{F}_n = \{(U_n, U) : U \in \mathscr{T}\}, \qquad \mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n,$$

这里 U_n 是闭集. 对 X 的紧集 K 及开集 $U \supset K$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $K \subset U_n \subset U$, 而 $(U_n, U) \in \mathscr{F}_n$. 所以 $\mathscr{F}$ 是对 k 网. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 任一 $\mathscr{F}'_n \subset \mathscr{F}_n$, 置

$$V = \cup\{U : (U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\}.$$

由于 $U \subset V \Rightarrow U_n \subset V_n$, 所以

$$\cup\{U_n : (U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\} \subset V_n,$$

V_n 是闭集. 从而

$$\overline{\cup\{U_n : (U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\}} \subset V_n \subset V = \cup\{U : (U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\}.$$

到此证明了每一 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的. 故 $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 σ 垫状对 k 网.

相反, 设空间 $(X, \mathscr{T})$ 具有 σ 垫状对 k 网 $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 这里每一 $\mathscr{F}_n = \{(F_1, F_2)\}$ 是垫状的, F_1 是闭集, 且 $F_1 \subset F_2$. 对 $n \in \mathbb{N}$, $U \in \mathscr{T}$, 置

$$U_n = \overline{\cup\{F_1 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}_n,\ F_2 \subset U\}}, \tag{8.2.1}$$

则 U_n 是闭集. 因 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的,

$$U_n \subset \cup\{F_2 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}_n,\ F_2 \subset U\} \subset U.$$

对每一 $x \in U$, 单点集 $\{x\}$ 是紧的, 由对 k 网的定义, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 及 $(F_1, F_2) \in \mathscr{F}_m$ 使 $x \in F_1 \subset F_2 \subset U$. 由 (8.2.1) 式知 $x \in U_m$, 所以 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 此外, 由 (8.2.1) 式知当 $U \subset V$ 时有 $U_n \subset V_n$. 到此证明了 $U \to \{U_n\}$ 是 X 上的半层对应. 下证它更是 k 半层对应.

不失一般性, 可设 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, 设紧集 $K \subset$ 开集 U. 由对 k 网的定义, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 及有限子族 $\mathscr{F}'_{n_0} \subset \mathscr{F}_{n_0}$ 使

$$K \subset \cup\{F_1 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'_{n_0}\} \subset \cup\{F_2 : (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'_{n_0}\} \subset U.$$

由 (8.2.1), $K \subset U_{n_0}$. 所以 $U \to \{U_n\}$ 是 k 半层对应, X 是 k 半层空间. 证完.

推论 8.2.1[270] ℵ 空间是 k 半层空间.

证明 因 σ 局部有限闭 k 网 $\Rightarrow \sigma$ 闭包保持闭 k 网 $\Rightarrow \sigma$ 垫状对 k 网, 所以 ℵ 空间是 k 半层空间. 证完.

下面利用 k 半层空间的新刻画 (定理 8.2.2) 证明 Fréchet 的 k 半层、T_1 空间是单调正规的, 从而是层空间, 改进了前面 Lutzer 的结果: “第一可数的 k 半层、T_1 空间是层空间” (定理 7.5.5 的前半), 因第一可数 $\Rightarrow$ Fréchet (见定理 2.3.1 的注记).

定理 8.2.3[148, 243] Fréchet 的 k 半层、T_1 空间是层空间.

证明 层空间等价于半层的单调正规空间 (定理 7.5.9), 而 k 半层空间是半层空间, 所以只要证明 Fréchet 的 k 半层、T_1 空间 X 是单调正规的.

由定理 8.2.2, 设 k 半层空间 X 具有 σ 垫状对 k 网 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的. 设 H, K 是 X 中一对不相交的闭集, 置

$$\begin{aligned} U_n = \cup\left\{F_1 : (F_1, F_2) \in \bigcup_{i\leqslant n} \mathscr{F}_i,\ F_2 \cap K = \varnothing\right\} - \\ \cup\left\{F_1 : (F_1, F_2) \in \bigcup_{i\leqslant n} \mathscr{F}_i,\ F_2 \cap H = \varnothing\right\} \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

及 $D(H, K) = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)^\circ$. 下证 D 是 X 上的单调正规算子 (定义 7.5.2).

显然, 如 $H \subset H'$, $K \supset K'$, 且 H', K' 是 X 中不相交的闭集, 则由 (8.2.2) 知 $D(H, K) \subset D(H', K')$.

证 $H \subset D(H, K)$. 如若不然, $H \not\subset D(H, K)$, 则存在

$$x \in H - (D(H, K) \cup K) = H - \left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right)^\circ \cup K\right)$$

$$\subset \overline{(X-K)\cap\left(X-\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i\right)}\cap H=\overline{X-\left(K\cup\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i\right)\right)}\cap H.$$

因 X 是 Fréchet 空间, 存在序列 $\{x_n\}\subset X-(K\cup(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i))$ 使 $x_n\to x$. 所以 X 的紧子集 $\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset X-K$ (开集), 因 $\mathscr{F}$ 是对 k 网, 存在 $\mathscr{F}$ 中有限个元 $(F_1^{(i)},F_2^{(i)})$ $(i\leqslant m)$, 使

$$\{x\}\cup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_1^{(i)}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_2^{(i)}\subset X-K.$$

从而存在 $i_0\leqslant m$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$, 使

$$\{x_{n_j}\}\subset F_1^{(i_0)}\subset F_2^{(i_0)}\subset X-K. \tag{8.2.3}$$

于是 $F_2^{(i_0)}\cap K=\varnothing$. 另一方面, 存在 $k\in\mathbb{N}$, 使 $(F_1^{(i_0)},F_2^{(i_0)})\in\mathscr{F}_k$. 因为 $x\in H$, 所以

$$x\in X-\cup\left\{F_2:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\varnothing\right\}$$

$$\subset X-\overline{\cup\left\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\varnothing\right\}}.$$

因而存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 当 $j\geqslant n_0$ 时

$$x_{n_j}\in X-\overline{\cup\left\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\varnothing\right\}}$$

$$\subset X-\cup\left\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\varnothing\right\}.$$

这时, 结合 (8.2.3), 由 (8.2.2) 式得

$$x_{n_j}\in F_1^{(i_0)}-\cup\left\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\varnothing\right\}\subset U_k.$$

于是 U_k 含有无限个 x_n, 这与 $\{x_n\}$ 的取法矛盾. 所以 $H\subset D(H,K)$.

证 $\overline{D(H,K)}\subset X-K$. 下面的证明思路与步骤类似于前证, 略去较烦的细节. 如若不然, $\overline{D(H,K)}\not\subset X-K$, 则存在

$$x\in\overline{D(H,K)}\cap K\cap(X-H)\subset\overline{D(H,K)-H}\cap K.$$

所以有 X 中的序列 $\{x_n\} \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)^\circ - H$ 使 $x_n \to x$. 于是存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$ 及 $(F_1', F_2') \in \mathscr{F}_m$ 使 $x_{n_j} \in F_1'$, $F_2' \cap H = \varnothing$, $j \in \mathbb{N}$. 因而 $U_k \subset X - F_1'$, $k \geqslant m$. 所以当 $k \geqslant m$ 时, $x_{n_j} \notin U_k$. 故 $x_{n_j} \in \bigcup_{i<m} U_i$. 于是 $x \in \overline{\bigcup_{i<m} U_i} = \bigcup_{i<m} \overline{U}_i$. 从而存在 $i_0 < m$, 使

$$x \in \overline{U}_{i_0} \subset \cup \left\{ F_2 : (F_1, F_2) \in \bigcup_{i \leqslant i_0} \mathscr{F}_i, F_2 \cap K = \varnothing \right\} \subset X - K.$$

这与 $x \in K$ 矛盾. 所以 $\overline{D(H,K)} \subset X - K$. X 是单调正规空间. 证完.

推论 8.2.2 [148, 243] 设 X 是 Fréchet 的正则空间, 则 X 具有 σ 闭包保持 k 网当且仅当 X 是 k 半层空间.

证明 因 $\mathrm{M}_3 = \mathrm{M}_2$, M_2 空间具有 σ 闭包保持 k 网, 由定理 8.2.2 和定理 8.2.3 得证. 证完.

推论 8.2.3 [166] Fréchet 的 ℵ 空间是层空间.

证明 由推论 8.2.1 及定理 8.2.3 得证. 证完.

注记 定理 8.2.3 和推论 8.2.3 中的 Fréchet 条件是否可进一步减弱? 1986 年, Foged [123] 曾构造序列型的 ℵ 空间不是正规空间, 从而不是层空间. 至于推论 8.2.2 中的 Fréchet 条件是否可略去还是一个尚未解决的问题 [139, 264].

关于 ℵ 空间的度量化定理有下述 O'Meara [329] 定理: "正则空间 X 可度量化当且仅当 X 是 r 空间且具有 σ 局部有限 k 网." 这里作为 Foged 定理 (定理 8.4.1) 的推论 (推论 8.4.1 及习题 8.2) 得出, 不另行证明.

r 空间的定义见定义 8.1.2. 由于第一可数性、局部紧性均蕴含 r 空间性质, 故有: "第一可数的 (或局部紧的) ℵ 空间可度量化."

$\aleph_0$ 空间的函数空间定理 (定理 8.1.8) 是非常巧妙的, 定理的表述很简洁: "设 X, Y 都是 $\aleph_0$ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间." 当引入 ℵ 空间后, 学者们很想把这定理推广到 ℵ 空间.

注意, $\aleph_0$ 空间的特大优点是由于它是可分度量空间在连续的紧覆盖映射下的像 (定理 8.1.6). 因此, 在定理 8.1.8 的证明中可把 X 取作可分度量空间. 借助于这一优点, 在推广定理 8.1.8 到 ℵ 空间时, 保持 X 为 $\aleph_0$ 空间是明智的, Y 取为 ℵ 空间, 期望 $\mathscr{C}(X,Y)$ 也是 ℵ 空间. ℵ 空间的函数空间定理即使在这样的提法下还是很难解决的.

O'Meara [330] 对 Y 加强为仿紧的 ℵ 空间得到下述定理: "设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是仿紧 ℵ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是仿紧 ℵ 空间."

此定理的证明精微而冗繁, 我们不在此介绍它的证法. 在证明中可以看到如果 Y 上不附加仿紧性得到的结果是 σ 空间.

作者不满意自己的结果, 希望去掉空间 Y 的仿紧性假设 (回到前面期望的结果), 也就是能否有: "设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 $\aleph$ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\aleph$ 空间."

Michael [289] 重又提出这一问题.

此问题的解决是曲折的. Guthrie [173] 摹仿 k 网引入 cs 网, 以收敛序列代替紧集 (定义 8.3.1). 类似于 $\aleph$ 空间定义 cs-σ 空间 (定义 8.3.2) 等, 他想另辟蹊径并不是想解决上述问题, 只是过渡得到下述定理: "设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 cs-σ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 cs-σ 空间."

这是 8.3 节中的定理 8.3.3. 恰好 Foged [120] 证明了 $\aleph$ 空间等价于 cs-σ 空间 (定理 8.3.2), 作为 Foged 定理的推论解决了上述问题 (定理 8.3.4).

关于 $\aleph$ 空间的映射定理必须在 $\aleph$ 空间的刻画定理充分表述以后才能得到, 故放在 8.4 节末 (引理 8.4.10 起). 从而由映射定理而得和定理 (推论 8.4.8).

8.3 cs 网与 cs-σ 空间

Guthrie [173] 引入 cs 网把 k 网中的紧集换为收敛序列连同它的聚点, 记为 $Z=\{z,z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$, 这里 $z_n\to z$. 显然 Z 是紧集. 为简单起见, 称 Z 为收敛序列, 而记 $Z_n=\{z,z_n,z_{n+1},\cdots\}$.

定义 8.3.1 [173]　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cs 网** (cs-network), 如果对 X 的收敛序列 Z 及开集 $U\supset Z$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 及 $P\in\mathscr{P}$ 使 $Z_n\subset P\subset U$.

cs 网与 k 网 (定义 8.1.1) 是不同的概念, 无蕴含关系 (见定理 8.4.2 的注记).

定理 8.3.1 [173]　下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph_0$ 空间;

(ii) X 是正则空间且具有可数 cs 网.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 因收敛序列是紧集, 而可数 k 网可作为关于有限并封闭的.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 先证每一单点集是 G_δ 集的 T_2 紧空间是第一可数的. 因 T_2 紧空间是正则的, 设 $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$, 这里 G_n 是开集, 且 $\overline{G}_{n+1}\subset G_n$, $n\in\mathbb{N}$. 任取 $x_n\in G_n$, 则 $\{x_n\}$ 以 x 为聚点, 所以这空间是第一可数的 (习题 4.13).

设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数 cs 网, 下证 $\mathscr{P}$ 是 k 网. 对 X 的紧集 K 及开集 $U\supset K$, 置

$$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:P\cap K\neq\varnothing \text{ 且 } P\subset U\}.$$

$\mathscr{P}'$ 是可数的, 记 $\mathscr{P}'=\{P_n:n\in\mathbb{N}\}$. 要证存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $K\subset\bigcup_{i\leqslant n}P_i$. 如若不然, 存在 K 中的序列 $\{z_n\}$ 使 $z_n\in K-\bigcup_{i\leqslant n}P_i$. 因空间 X 是 σ 空间, 所以 X 的每一单点集是 G_δ 集, 于是紧空间 K 是第一可数的, 从而是序列式紧的 (定理 3.5.4), 所以 $\{z_n\}$ 存在收敛子序列, 不妨就作为 $z_n\to z\in K$. 因 $\mathscr{P}$ 是 cs 网, 存在

$m \in \mathbb{N}$, $P \in \mathscr{P}$ 使

$$Z_m = \{z, z_m, z_{m+1}, \cdots\} \subset P \subset U.$$

P 应是 $\mathscr{P}'$ 中的某一元 P_j, 取 $k \geqslant \max\{m, j\}$, 则 $z_k \in P_j$, 矛盾, 所以 $\mathscr{P}$ 是 k 网. 证完.

注记 上述定理 (ii) ⇒ (i) 的证法也适用于 σ 局部有限 k 网及 σ 局部可数 k 网情况, 因为局部有限集族、局部可数集族分别是紧有限的、紧可数的 (每一紧集与 k 网中可数个元相交), 所以 $\mathscr{P}'$ 仍是可数的, 且紧集的每一单点集是 G_δ 集.

定义 8.3.2[174] 具有 σ 局部有限 cs 网的正则空间称为 ***cs-σ* 空间** (cs-σ-space).

下面叙述 Foged [120] 得到的 ℵ 空间的刻画定理.

称空间 X 的子集 W 是它的子集 F ($F \subset W$) 的**序列邻域** [120] (sequential neighborhood), 如果每一收敛于 F 中某一点的序列**终留于** (eventually in) W (定义 1.4.6).

引理 8.3.1[120] 设空间 X 具有 σ 闭包保持闭 k 网, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ 是离散集族, 则存在互不相交的集族 $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$, 其中 W_α 是 F_α 的序列邻域, $\alpha \in A$.

证明 设 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是空间 X 的 σ 闭包保持闭 k 网, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持的, 且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). 对 $n \in \mathbb{N}$ 及 $B \subset A$, 置

$$T(n, B) = \cup\{P \in \mathscr{P}_n : P \cap (\cup\{F_\alpha : \alpha \in B\}) = \varnothing\}.$$

对每一 $\alpha \in A$, 置

$$W_\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T(n, A - \{\alpha\}) - T(n, \{\alpha\})).$$

利用 $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ 的离散性, 不难验证集族 $\{W_\alpha : \alpha \in A\}$ 是互不相交的. 下证每一 W_α 是 F_α 的序列邻域.

设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in F_\alpha$. 由 $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ 的离散性, 不妨设每一 F_α 是闭集, 置

$$U = X - \cup\{F_{\alpha'} : \alpha' \in A - \{\alpha\}\}.$$

U 是包含 x 的开集, $\{x_n\}$ 终留于 U, 不妨设紧集 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset U$. 因 $\mathscr{P}$ 是 k 网且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 及 $\mathscr{P}_m$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_m \subset \mathscr{P}_m$ 使

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset \cup\mathscr{P}'_m \subset U.$$

因 $\cup\mathscr{P}'_m \subset T(m, A - \{\alpha\})$, 所以序列 $\{x_n\}$ 终留于 $T(m, A - \{\alpha\})$. 此外, $\mathscr{P}'_m$ 中元之与 F_α 不交者之并是 $T(m, \{\alpha\})$, 由 $\mathscr{P}_m$ 的闭包保持性, $T(m, \{\alpha\})$ 是闭集, 与

F_α 不交. 序列 $\{x_n\}$ 不能共尾于不包含点 x 的闭集 $T(m,\{\alpha\})$. 故 $\{x_n\}$ 终留于 $T(m,A-\{\alpha\})-T(m,\{\alpha\})\subset W_\alpha$. 证完.

引理 8.3.2[120]　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数闭 k 网, 且关于有限交封闭, 如果 W 是点 $x\in X$ 的序列邻域, 且有序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{P}'\subset W$.

证明　把 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 之满足下列条件: (i) $x\in\cap\mathscr{P}'$; (ii) $\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{P}'$ 者之全体记作 $\{\mathscr{P}'_n:n\in\mathbb{N}\}$, 这是因为 $\mathscr{P}$ 是点可数的, 而 $\mathscr{P}'$ 是有限的及 $x\in\cap\mathscr{P}'$, 所以这种 $\mathscr{P}'$ 是可数的. 只要证明这可数个 $\mathscr{P}'$ 中必有能满足 $\cup\mathscr{P}'\subset W$ 者.

如若不然, 对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\cup\mathscr{P}'_n-W\neq\varnothing$. 由于 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭及条件 (i), (ii), 可设 $\bigcap_{i\leqslant n}(\cup\mathscr{P}'_i)-W\neq\varnothing$, 取

$$y_n\in\bigcap_{i\leqslant n}(\cup\mathscr{P}'_i)-W\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

下证 $y_n\to x$.

设 U 是 x 的任一开邻域, 因 $\mathscr{P}$ 是 k 网, 存在 $j\in\mathbb{N}$ 及 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{F}$ 使 $\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant j\}\subset\cup\mathscr{F}\subset U$, 令 $\mathscr{P}'=\{F\in\mathscr{F}:x\in F\}$, 则 $\mathscr{P}'$ 满足条件 (i), (ii) (注意, $\mathscr{P}$ 的元是闭集). 从而 $\mathscr{P}'$ 应是某一 $\mathscr{P}'_m$, 这时 $\{y_n:n\geqslant m\}\subset\cup\mathscr{P}'_m\subset U$, 于是 $\{y_n\}$ 终留于 U. 故 $\{y_n\}$ 收敛于 x. 这与 W 是 x 的序列邻域矛盾. 证完.

定理 8.3.2[120]　设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 具有 σ 离散 cs 网;

(ii) X 具有 σ 离散 k 网;

(iii) X 具有 σ 局部有限 cs 网;

(iv) X 具有 σ 局部有限 k 网.

证明　显然, (i) $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (iv), 由定理 8.3.1 的注记, 可证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 及 (iii) $\Rightarrow$ (iv), 这里只要证明 (iv) $\Rightarrow$ (i).

设 X 具有 σ 局部有限 k 网 $\mathscr{P}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_m$, 每一 $\mathscr{P}_m$ 是关于有限交封闭的局部有限闭集族, 且 $\mathscr{P}_m\subset\mathscr{P}_{m+1}$. 记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$.

对每一 $m\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathscr{P}_m$ 的局部有限性, 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$, 使 $\mathscr{U}_m$ 的每个元仅与 $\mathscr{P}_m$ 的有限个元相交. 因 $\aleph$ 空间是次仿紧的, $\mathscr{U}_m$ 具有 σ 离散闭加细覆盖 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$, 这里对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 是离散闭集族, 从而可知每一 F_β $(\beta\in B_{m,n})$ 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交.

由引理 8.3.1, 对每一对 (m,n), $m,n\in\mathbb{N}$, 有互不相交的集族 $\{W_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 使每一 W_β 是 F_β 的序列邻域, $\beta\in B_{m,n}$. 置

$$C_{m,n}=\{(\alpha,\beta):P_\alpha\in\mathscr{P}_m,\ \beta\in B_{m,n},\ P_\alpha\cap F_\beta\neq\varnothing\}.\tag{8.3.1}$$

构造集族

$$\{P_\alpha \cap W_\beta : (\alpha,\beta) \in C_{m,n}\}.$$

下面验证这集族是星有限的 (定义 6.1.8), 即这集族中的每一元 $P_\alpha \cap W_\beta$ ($(\alpha,\beta) \in C_{m,n}$) 仅与集族中其他有限个元相交. 如果 $(P_\alpha \cap W_\beta) \cap (P_\gamma \cap W_\delta) \neq \varnothing$, 这里 $(\gamma,\delta) \in C_{m,n}$, 则 $W_\beta \cap W_\delta \neq \varnothing$. 由于 β,δ 都属于 $B_{m,n}$, 而 $\{W_\beta : \beta \in B_{m,n}\}$ 中的元是互不相交的, 这就迫使 $\beta = \delta$. 从而 $(\gamma,\beta) \in C_{m,n}$, 由 (8.3.1), $P_\gamma \cap F_\beta \neq \varnothing$. 由于 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交, P_γ 是其中的一个, 这说明只有有限对 $(\gamma,\delta) \in C_{m,n}$ 使 $(P_\alpha \cap W_\beta) \cap (P_\gamma \cap W_\delta) \neq \varnothing$.

固定正整数对 (m,n), 对 $(\alpha,\beta) \in C_{m,n}$ 及 $r \in \mathbb{N}$, 置

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta,r} &= \cup\{P_\alpha \cap P_\gamma : P_\gamma \in \mathscr{P}_r,\ P_\gamma \subset W_\beta\}, \\ \mathscr{S}_{m,n,r} &= \{S_{\alpha,\beta,r} : (\alpha,\beta) \in C_{m,n}\}. \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

由于 $S_{\alpha,\beta,r} \subset P_\alpha \cap W_\beta$, 而 $\{P_\alpha \cap W_\beta : (\alpha,\beta) \in C_{m,n}\}$ 是星有限的, 所以对每一 $r \in \mathbb{N}$, $\mathscr{S}_{m,n,r}$ 也是星有限的. 此外, $\mathscr{S}_{m,n,r}$ 的元是局部有限集族

$$\{P_\alpha \cap P_\gamma : P_\alpha \in \mathscr{P}_m,\ P_\gamma \in \mathscr{P}_r\}$$

的子族的并, $\mathscr{S}_{m,n,r}$ 是闭包保持的. 按星有限集族是 σ 互不相交集族 (引理 6.1.3), 而互不相交的闭包保持闭集族是离散的 (习题 5.6), 所以 $\mathscr{S}_{m,n,r}$ 是 σ 离散的, 于是 $\mathscr{S} = \cup\{\mathscr{S}_{m,n,r} : m,n,r \in \mathbb{N}\}$ 也是 σ 离散的, 可以记作 $\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{S}_k$, 每一 $\mathscr{S}_k$ 是离散闭集族, 且当 $j \neq k$ 时, $\mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}_k = \varnothing$. 置

$$\mathbb{F} = \{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{ 是 } \mathscr{S} \text{ 的有限子族}, \cap\mathscr{F} \neq \varnothing\}. \tag{8.3.3}$$

作为 $\mathscr{S}$ 的有限子族, 由于 $\mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}_k = \varnothing$ $(j \neq k)$, $\mathscr{F}$ 的元 (闭集) 可能分属于不同的 $\mathscr{S}_k$. 设 Φ 是正整数集的有限子集, 置

$$\mathbb{F}_\Phi = \{\mathscr{F} \in \mathbb{F} : \{k \in \mathbb{N} : \mathscr{F} \cap \mathscr{S}_k \neq \varnothing\} = \Phi\}.$$

注意, $\mathbb{F}$ 中的元 $\mathscr{F}$ (集族) 至多包含一个元在一个 $\mathscr{S}_k$ 内, 因这些 $\mathscr{S}_k$ 是互不相交的.

对给定的 Φ, 考察集族 $\{\cap\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathbb{F}_\Phi\}$, 这是局部有限的, 因为它包含于局部有限集族 $\bigcup_{k\in\Phi} \mathscr{S}_k$ 的有限交. $\{\cap\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathbb{F}_\Phi\}$ 又是互不相交的, 如 $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ 都是 $\mathbb{F}_\Phi$ 的元, 则对某些 $k \in \Phi$, $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{S}_k \neq \mathscr{F}_2 \cap \mathscr{S}_k$, 如设 $\{S_1\} = \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{S}_k$, $\{S_2\} = \mathscr{F}_2 \cap \mathscr{S}_k$, 则 $S_1 \neq S_2$, 由 $\mathscr{S}_k$ 的互不相交性有 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, 从而 $(\cap\mathscr{F}_1) \cap (\cap\mathscr{F}_2) = \varnothing$. 所以 $\{\cap\mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathbb{F}_\Phi\}$ 是互不相交的局部有限闭集族, 从而是离散闭集族. 由引理

8.3.1, 有互不相交的序列邻域族 $\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi\}$ 使每一 $V(\mathscr{F})$ 是 $\cap\mathscr{F}$ 的序列邻域.

对每一 $j\in\mathbb{N}$ 及 $\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi$, 置

$$V(\mathscr{F},j)=\cup\{S\cap P_\delta:S\in\mathscr{F},\ P_\delta\in\mathscr{P}_j,\ P_\delta\subset V(\mathscr{F})\},\tag{8.3.4}$$

这里 $V(\mathscr{F},j)\subset V(\mathscr{F})$, 所以对固定的 $j\in\mathbb{N}$, 集族

$$\mathscr{V}(\Phi,j)=\{V(\mathscr{F},j):\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi\}$$

是互不相交的. 此外, 每一 $\mathscr{V}(\Phi,j)$ 是局部有限的闭集族

$$\left\{S\cap P_\delta:S\in\bigcup_{k\in\Phi}\mathscr{S}_k,\ P_\delta\in\mathscr{P}_j\right\}$$

的某一子族的并. 所以

$$\begin{aligned}\mathscr{V}&=\{V(\mathscr{F},j):\mathscr{F}\in\mathbb{F},\ j\in\mathbb{N}\}\\&=\cup\{\mathscr{V}(\Phi,j):\Phi\text{ 是 }\mathbb{N}\text{ 的有限子集},\ j\in\mathbb{N}\}\end{aligned}$$

是 σ 离散的. 下面验证 $\mathscr{V}$ 是 X 的 cs 网.

设 U 是开集, 序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in U$. 因 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 及 $\mathscr{P}_m$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_m$ 使 $\cup\mathscr{P}'_m\subset U,\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{P}'_m$. 由于 $\mathscr{P}$ 的元是闭集, 可以选取 $\mathscr{P}'_m$ 使 $x\in\cap\mathscr{P}'_m$.

因 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 是 X 的覆盖, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\beta\in B_{m,n}$ 使 $x\in F_\beta$. 由于 W_β 是 F_β 的序列邻域, 也是 x 的序列邻域, 再由引理 8.3.2, 存在 $r\in\mathbb{N}$ 及 $\mathscr{P}_r$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_r$ 使 $\cup\mathscr{P}'_r\subset W_\beta$ 及 $\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{P}'_r$. 由于 $\mathscr{P}$ 的元是闭集, 所以 $x\in\cup\mathscr{P}'_r$.

如 $P_\alpha\in\mathscr{P}'_m$, 则 $x\in P_\alpha\cap F_\beta$, 由 (8.3.1), $(\alpha,\beta)\in C_{m,n}$. 如更有 $P_\gamma\in\mathscr{P}'_r$, 则 $P_\gamma\in\mathscr{P}_r$ 及 $P_\gamma\subset W_\beta$. 由 (8.3.2), $P_\alpha\cap P_\gamma\subset S_{\alpha,\beta,r}$. 由此知

$$(\cup\mathscr{P}'_m)\cap(\cup\mathscr{P}'_r)\subset\cup\{S_{\alpha,\beta,r}:P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}.$$

由于 $x\in\cup\mathscr{P}'_r$, 存在一 $\gamma\in A$ 使 $x\in P_\gamma\in\mathscr{P}'_r$, 而 $x\in P_\alpha\in\mathscr{P}'_m$, 由 (8.3.2),

$$x\in\cap\{S_{\alpha,\beta,r}:P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}.$$

设 $\mathscr{F}=\{S_{\alpha,\beta,r}:P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}$ ($\mathscr{S}$ 的有限子族). 由上述讨论知 $\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{F}$ (因 $\{x_n\}$ 终留于 $(\cup\mathscr{P}'_m)\cap(\cup\mathscr{P}'_r)$) 及 $x\in\cap\mathscr{F}$. 由 (8.3.3) 知 $\mathscr{F}\in\mathbb{F}$.

前面已证 $V(\mathscr{F})$ 是 $\cap\mathscr{F}$ 的序列邻域, 那也是 x 的序列邻域, 由引理 8.3.2, 存在 $j\in\mathbb{N}$ 及 $\mathscr{P}_j$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_j$ 使 $\cup\mathscr{P}'_j\subset V(\mathscr{F})$ 且 $\{x_n\}$ 终留于 $\cup\mathscr{P}'_j$.

如 $P_\delta\in\mathscr{P}'_j$, 则 $P_\delta\in\mathscr{P}_j$ 及 $P_\delta\subset V(\mathscr{F})$. 所以对任一 $S\in\mathscr{F}$, 有 $S\cap P_\delta\subset V(\mathscr{F},j)$, 由 (8.3.4), $(\cup\mathscr{F})\cap(\cup\mathscr{P}'_j)\subset V(\mathscr{F},j)$. 从而 $\{x_n\}$ 终留于 $V(\mathscr{F},j)$. 此外, 由 (8.3.4) 及 (8.3.2),

$$x\in V(\mathscr{F},j)\subset\cup\mathscr{F}=\cup\{S_{\alpha,\beta,r}:P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}\subset\cup\mathscr{P}'_m\subset U.$$

所以 $\mathscr{V}$ 是 X 的 cs 网. 证完.

推论 8.3.1[150] 设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph$ 空间;

(ii) X 具有点可数且 σ 闭包保持闭 k 网;

(iii) X 具有点可数且 σ 闭包保持闭 cs 网;

(iv) X 具有 σ 局部可数且闭包保持 k 网;

(v) X 具有 σ 局部可数且闭包保持 cs 网.

证明 由于点可数的闭包保持闭集族是局部可数的 (习题 5.24), 而局部可数、闭包保持集族的闭包仍是局部可数、闭包保持集族, 所以 (ii) $\Leftrightarrow$ (iv), (iii) $\Leftrightarrow$ (v). 由定理 8.3.1 的注记知 (v) $\Rightarrow$ (iv). (i) $\Rightarrow$ (iv) 是显然的. 要证的是 (iv) $\Rightarrow$ (i) 及 (v), 这可利用定理 8.3.2 的证法证明 (在下段中说明): 如 X 具有 σ 局部可数且闭包保持闭 k 网, 则 X 具有 σ 离散 cs 网, 从而得 (iv) $\Rightarrow$ (i) 及 (v).

在定理 8.3.2 的证明中, 对应着局部可数且闭包保持闭集族 $\mathscr{P}_m$ 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$, 可得 $\mathscr{U}_m$ 的 σ 离散闭加细覆盖 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$, 则每一 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中可数个元相交, 从而导致 (8.3.1) 式后的集族是星可数的 (定义 6.1.8), 但是星可数集族 (同星有限集族一样) 是 σ 互不相交的 (引理 6.1.3), 至于证明中用到的引理 8.3.1 在目前情况仍可引用. 在引用引理 8.3.2 时, 要求相应集族关于有限交封闭 (见习题 8.12). 此后, 同法构造 σ 离散 cs 网. 证完.

现在回到 8.2 节末的 $\aleph$ 空间的函数空间定理, 这里紧接着 Guthrie 定义的 cs-σ 空间 (定义 8.3.2) 谈起. 我们将证明 Guthrie 的重要结果 (定理 8.3.3). 由此定理并结合 Foged 定理 (定理 8.3.2) 解决 O'Meara 及 Michael 提出的问题.

引理 8.3.3[174] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的子集族. 如果 Z 是 X 的任一收敛序列, S 是 X 的次基中的元 (开集) 满足: 若 $Z\subset S$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$, $P\in\mathscr{P}$ 使 $Z_n\subset P\subset S$, 那么 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网,

证明 设 $Z\subset U$, Z 是收敛序列, 收敛于 z, U 是 X 中开集. 存在 X 的基中的元 B 使 $z\in B\subset U$, 从而存在 X 的次基中的元 $S_1,S_2,\cdots,S_k$, 使 $B=\bigcap_{i\leqslant k}S_i$.

对每一 $i \leqslant k$, $z \in S_i$, 存在 $n(i) \in \mathbb{N}$ 及 $P_i \in \mathscr{P}$ 使 $Z_{n(i)} \subset P_i \subset S_i$. 置

$$Z_n = \bigcap_{i \leqslant k} Z_{n(i)}, \quad P = \bigcap_{i \leqslant k} P_i,$$

则 $Z_n \subset P \subset B \subset U$. 所以 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网. 证完.

引理 8.3.4[284]　设 X 是 T_2, k 空间, K 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的紧集. 定义

$$\phi(x) = \{f(x) : f \in K\} \quad (x \in X),$$

则 $\{x \in X : \phi(x) \subset V\}$ 是 X 中开集, 这里 V 是 Y 中开集.

证明　先把 $\phi(x)$ 限制在 X 的紧集上作出证明, 然后利用 k 空间推广到 X 上.

设 $C \subset X$ 是 X 中任一紧集. 置 $\phi_C = \phi|_C$. 要证 $\{x \in C : \phi_C(x) \subset V\}$ 是 C 中开集, 需要证: 如果 $x \in C$ 及 $\phi(x) \subset V$, 则 x 具有 C 中的邻域 U 使对每一 $z \in U$, $\phi(z) \subset V$. 对每一 $f \in K$, 由引理 8.1.3 可找到 x 在 C 中的邻域 U_f 及 f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的邻域 W_f 使对 $z \in U_f$ 及 $g \in W_f$ 有 $g(z) \in V$. 紧集 K 为有限个 W_f 覆盖, 取相应的有限个 U_f 的交为 U, 则 U 是 x 在 C 中的邻域满足所有要求.

现在回到 $\phi(x)$, $x \in X$. 设 $U = \{x \in X : \phi(x) \subset V\}$, 则对 X 的每一紧集 C 有 $U \cap C = \{x \in C : \phi_C(x) \subset V\}$, 由前所证 $U \cap C$ 关于 C 是开的. 因 X 是 k 空间, U 是 X 中的开集. 证完.

定理 8.3.3 (Guthrie 定理 [174])　设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 cs-σ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 cs-σ 空间.

证明　定理 8.1.8 证明中的断言 1 对这里也成立 (注意, cs-σ 空间的子空间也是 cs-σ 空间), 所以可设 X 为可分度量空间, 记作 S, 只要证明 $\mathscr{C}(S,Y)$ 是 cs-σ 空间.

设 $\mathscr{P} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是可分度量空间 S 的可数基, 关于有限交封闭, $\mathscr{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{R}_j$ 是 cs-σ 空间 Y 的 σ 局部有限 cs 网. 对 $P_i \in \mathscr{P}$ 及 $R \in \mathscr{R}_j$, 记

$$(P_i, R) = \{f \in \mathscr{C}(S,Y) : f(P_i) \subset R\};$$

$$[P_i, \mathscr{R}_j] = \{(P_i, R) : R \in \mathscr{R}_j\}, \quad [\mathscr{P}, \mathscr{R}] = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} [P_i, \mathscr{R}_j].$$

上述 (P_i, R) 即定理 8.1.8 中的 $W(P_i, R)$. 先证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 是空间 $\mathscr{C}(S,Y)$ 中的 σ 局部有限族. 只要证 $[P_i, \mathscr{R}_j]$ 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的局部有限族.

设 $f \in \mathscr{C}(S,Y)$, 取定 $x \in P_i$, 则 $f(x) \in Y$. 由于 $\mathscr{R}_j$ 在 Y 中局部有限, 存在 $f(x)$ 在 Y 中的邻域 V 至多与 $\mathscr{R}_j$ 的有限个元 R 相交, 那么 (x, V) 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 次基中的元, 是包含 f 的开集, 仅与集族 $[P_i, \mathscr{R}_j]$ 中有限个元 (P_i, R) 相交, 其中 R 正

好是与 V 相交者. 所以 $[P_i, \mathscr{R}_j]$ 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的局部有限族, 从而 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的 σ 局部有限族.

记 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 中的元的所有有限交所成集族为 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$, 则 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 仍是 σ 局部有限的. 下证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 是空间 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的 cs 网.

由引理 8.3.3, 验证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的 cs 网时, 仅考察 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的次基中的元就足够了. 设 $F = \{f_0, f_1, f_2, \cdots\}$ 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 中元 (映射) 所成序列收敛于 f_0, 设 (C,U) 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的次基中元包含着 F. 因为 F 是 $\mathscr{C}(S,Y)$ 的紧集, 且 S 是度量空间, 由引理 8.3.4,

$$F^{-1}(U) = \{x \in S : f_i \in F,\ f_i(x) \in U,\ i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

是 S 中开集. 显然 $F^{-1}(U) \supset C$. 置

$$\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P} : P \subset F^{-1}(U)\}.$$

对每一 $x \in C$, 再置

$$\mathscr{P}(x) = \{P \in \mathscr{P}' : x \in P \cap C\} = \{P_j\}_{j \in \mathbb{N}};$$
$$\mathscr{P}'(x) = \left\{P_i' : P_i' = \bigcap_{j \leqslant i} P_j,\ P_j \in \mathscr{P}(x)\right\};$$
$$\mathscr{R}(x) = \{R \in \mathscr{R} : f_0(x) \in R \subset U\} = \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

下面断言: 对每一 $x \in C$, 存在一组正整数 l, i, j, 使 $F_l \subset (P_i', R_j) \subset (x, U)$. 由于对每一组 l, i, j, 取定 $x \in P_i'$ 及 $R_j \subset U$, 恒有 $(P_i', R_j) \subset (x, U)$, 所以如果断言不成立的话, 必有 $F_l \not\subset (P_i', R_j)$, 即存在某些 $n \geqslant l$ 使 $f_n(P_i') \not\subset R_j$. 下面利用这一结果选取 F 的一个子序列.

取 $f_{n(1)}$ 使 $f_{n(1)}(P_1') \not\subset R_1$, 存在 $n(2) > n(1)$ 使 $f_{n(2)}(P_2') \not\subset R_2$. 类似地, 取 $f_{n(3)}$ 使 $n(3) > n(2)$ 且 $f_{n(3)}(P_3') \not\subset R_1$ 及 $f_{n(4)}$ 使 $n(4) > n(3)$ 且 $f_{n(4)}(P_4') \not\subset R_2, \cdots$. 注意, P_i' 的下标按自然数次序, 而 R_j 的下标形成序列

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ \cdots.$$

从 R_1 开始依次进行到第一次出现某 R_j 为止 (此 R_j 前面未出现过), 然后再从 R_1 出发如法依次进行下去.

置 $f_i' = f_{n(i)}$, 并选取 $x_i \in P_i'$ 使 $f_i'(x_i)$ 不是 R_j 的元素, 此 R_j 对应着 $f_{n(i)}$ 及 P_i', 则 $\{f_i'\}$ 是 F 的子序列收敛于 f_0, 集族 $\mathscr{P}'(x)$ 是 S 中点 x 的递减的可数邻域基, 所以 $\{x_i\}$ 收敛于 x .

紧开拓扑中的收敛使 $\{f'_i(x_i)\}$ 收敛于 $f_0(x)$ (引理 8.1.3), 所以 $\{f'_i(x_i)\}$ 除有限个外都包含在 U 内. 从而存在正整数 n 及 $R_k \in \mathscr{R}(x)$ 使 $f'_i(x_i) \in R_k$ 对所有的 $i \geqslant n$ 成立, 但由于序列 $\{f_i\}$ 及 $\{x_i\}$ 的取法, 存在某些 $m > n$ 使 $f'_m(x_m) \notin R_k$. 这一矛盾证明了上述断言.

对每一 $x \in C$, 存在某些 $l(x), i(x)$ 及 $j(x)$, 使 $F_{l(x)} \subset (P'_{i(x)}, R_{j(x)}) \subset (x, U)$. 由于 $\{P'_{i(x)} : x \in C\}$ 覆盖紧集 C, 从而有有限子覆盖 $\{P'_{i(x_1)}, P'_{i(x_2)}, \cdots, P'_{i(x_r)}\}$, 取 $m = \max_{1\leqslant t\leqslant r}\{l(x_t)\}$, 则

$$F_m \subset \bigcap_{1\leqslant t\leqslant r} (P'_{i(x_t)}, R_{j(x_t)}) \subset (C, U).$$

故 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的 σ 局部有限 cs 网.

因为 Y 正则, 由引理 8.1.2, $\mathscr{C}(S, Y)$ 正则, 所以 $\mathscr{C}(S, Y)$ 是 cs-σ 空间. 证完.

由上述 Guthrie 定理, 结合 Foged 定理 (定理 8.3.2) 立得如下定理, 解决了 O'Meara [330], Michael [289] 提出的问题 (见 8.2 节).

定理 8.3.4[120]　设 X 是 $\aleph_0$ 空间, Y 是 $\aleph$ 空间, 则 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是 $\aleph$ 空间.

8.4　σ 遗传闭包保持 k 网与 Lašnev 空间

Lašnev [240, 241] 成功地研究了度量空间在连续闭映射下像的性质. 学者们称此像为 Lašnev 空间 [363]. 下面叙述 Foged [122] 对 Lašnev 空间的著名刻画. 作为 Foged 定理 (定理 8.4.1) 的推论, 我们给出 Burke, Engelking 和 Lutzer [73] 关于 σ 遗传闭包保持基的度量化定理.

引理 8.4.1　设 $\mathscr{P}$ 是序列型空间 X 的遗传闭包保持闭集族, 则由 $\mathscr{P}$ 的任意非空子族 $\mathscr{P}'$ 的交 $\cap\mathscr{P}'$ 形成的集族仍是遗传闭包保持的.

证明　如若不然, 存在由 $\mathscr{P}$ 的非空子族 $\mathscr{P}'$ 形成的族 $\{\mathscr{P}'_\alpha : \alpha \in A\}$ 及 $G_\alpha \subset \cap\mathscr{P}'_\alpha$ $(\alpha \in A)$ 使 $\bigcup_{\alpha\in A} \overline{G}_\alpha$ 不是闭集. 因 X 是序列型空间, 存在序列 $\{z_n\} \subset \bigcup_{\alpha\in A} \overline{G}_\alpha$ 使 $z_n \to x \in X - \bigcup_{\alpha\in A} \overline{G}_\alpha$, 可以取 $\alpha(n) \in A$ 使 $z_n \in \overline{G}_{\alpha(n)}$, 于是 $x \notin \overline{\{z_n\}}$. 不失一般性, 可作为这些 $\alpha(n)$ 是不同的. 这时, 对每一 $m \in \mathbb{N}$, 集族 $\bigcup_{n\geqslant m} \mathscr{P}_{\alpha(n)}$ 是无限的, 从而可以选取正整数的子序列 $\{n_m\}$ 及 $\mathscr{P}$ 中的序列 $\{P_m\}$ 使

$$P_m \in \mathscr{P}'_{\alpha(n_m)} - \{P_k : k < m\},$$

则这些 P_m 是不同的, 而 $z_{n_m} \in P_m$. 由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性将导致

$$x \notin \overline{\{z_{n_m} : m \in \mathbb{N}\}},$$

这是矛盾的. 证完.

引理 8.4.2[122] 设 $\mathscr{P}$ 是 T_1 空间 X 的遗传闭包保持集族, $\{z_n\}$ 是 $X-\{x\}$ 内的序列收敛于 x, 则存在 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\{z_n: n\geqslant m\}\cap P\neq\varnothing$ 仅对有限个 $P\in\mathscr{P}$ 成立.

证明 如若不然, 存在 $\{z_n\}$ 的子序列 $\{z_{n_m}\}$ 及 $\mathscr{P}$ 的子族 $\{P_m: m\in\mathbb{N}\}$ 使 $z_{n_m}\in P_m$, $m\in\mathbb{N}$. 由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性及 X 是 T_1 空间将导致 $\{z_{n_m}: m\in\mathbb{N}\}$ 是闭集, 矛盾. 证完.

引理 8.4.3[122] 设 X 是 T_2, Fréchet 空间, 具有 k 网 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 如果 U 是开集, 序列 $Z=\{z_n: n\in\mathbb{N}\}$ 收敛于 $x\in U-Z$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\{P\in\mathscr{P}_n: P\subset U\})$.

证明 对每一 $m\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{P}'_m=\{P\in\mathscr{P}_m: P\subset U\}$. 如引理结论不成立, 可以选取 Z 的子序列 $\{z_{n_m}\}$ 使

$$z_{n_m}\in U-\mathrm{Int}(\cup\mathscr{P}'_m)\subset\overline{U-\cup\mathscr{P}'_m}\quad(m\in\mathbb{N}).$$

因 X 是 Fréchet 空间, 对每一点 z_{n_m}, 存在序列 $\{z_{n_m,k}\}\subset U-\cup\mathscr{P}'_m$ 使 $z_{n_m,k}\to z_{n_m}$. 从而 $x\in\overline{\{z_{n_m,k}: m,k\in\mathbb{N}\}}$. 再因 X 是 Fréchet 的, 由假设 $x\notin Z$ 及 T_2 分离性, 可以选取序列 Z' 包含于 $\{z_{n_m,k}: m,k\in\mathbb{N}\}$ 使 Z' 收敛于 x, Z' 具有如下形式:

$$Z'=\{z_{n_{m_i},k_i}: i\in\mathbb{N}\}\quad(m_i<m_{i+1}; i\in\mathbb{N}).$$

因 $x\notin Z\supset\{z_{n_m}: m\in\mathbb{N}\}$, Z' 中点不是 x. 因 $\mathscr{P}$ 是 k 网, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 Z' 终留于 $\cup\mathscr{P}'_m$, 这与当 $m_j>m$ 时, $z_{n_{m_j},k_j}\in U-\cup\mathscr{P}'_m$ 矛盾. 所以引理的结论成立, 证完.

定理 8.4.1 (Foged 定理 [122]) 空间 X 是 Lašnev 空间当且仅当 X 是 T_2, Fréchet 空间且具有 σ 遗传闭包保持闭 k 网.

证明 先证充分性. 设 T_2, Fréchet 空间 X 具有闭 k 网 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是遗传闭包保持的, 由引理 8.4.1, 可设每一 $\mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭. 此外, 设 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$. 置

$$R_n(P)=P-\mathrm{Int}(\cup\{Q\in\mathscr{P}_n: P\not\subset Q\}),\ P\in\mathscr{P}_n;\tag{8.4.1}$$

$$\mathscr{R}_n=\{R_n(P): P\in\mathscr{P}_n\}.\tag{8.4.2}$$

分下述 4 个断言完成充分性的证明.

断言 1. 设 $Z=\{z_n: n\in\mathbb{N}\}$ 收敛于 $x\in X-Z$, 置

$$\mathscr{R}^*_n=\{R\in\mathscr{R}_n: R\cap Z\ \text{是无限集}\}.\tag{8.4.3}$$

如果 U 是 x 的开邻域及 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\{P\in\mathscr{P}_n: P\subset U\})$, 则 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\mathscr{R}^*_n)$ 及 $\cup\mathscr{R}^*_n\subset U$.

证明　置

$$V = \mathrm{Int}(\cup\mathscr{P}_n) - \cup\{Q \in \mathscr{P}_n \cup \mathscr{R}_n : Q \cap Z \text{ 是有限集}\}. \tag{8.4.4}$$

由断言 1 的假设及 (8.4.4) 式右端减去部分仅含 Z 中有限个点 (由引理 8.4.2), 所以 Z 终留于 V, 要证 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\mathscr{R}_n^*)$ 及 $\cup\mathscr{R}_n^* \subset U$.

先证 $V \subset \cup\mathscr{R}_n^*$. 从而即得 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\mathscr{R}_n^*)$. 设 $y \in V$, 则 $\mathscr{P}_n$ 在点 y 是点有限的. 事实上, 若 $y \in Q \in \mathscr{P}_n$, 则 $Q \cap Z$ 是无限集, 由引理 8.4.2, $\mathscr{P}_n$ 中这样的 Q 仅有有限个, 所以 $\mathscr{P}_n$ 在点 y 是点有限的. 置

$$P(y) = \cap\{Q \in \mathscr{P}_n : y \in Q\},$$

上式右端是有限交. 由于 $\mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭, $P(y) \in \mathscr{P}_n$, 所以

$$y \notin \cup\{Q \in \mathscr{P}_n : P(y) \not\subset Q\}.$$

由 (8.4.1), (8.4.2),

$$y \in R_n(P(y)) \in \mathscr{R}_n,$$

从而 $R_n(P(y)) \cap Z$ 是无限集. 由 (8.4.3), $R_n(P(y)) \in \mathscr{R}_n^*$, 所以

$$y \in R_n(P(y)) \subset \cup\mathscr{R}_n^*.$$

从而 $V \subset \cup\mathscr{R}_n^*$, Z 终留于 $\mathrm{Int}(\cup\mathscr{R}_n^*)$.

下证 $\cup\mathscr{R}_n^* \subset U$. 对每一 $R_n(P) \in \mathscr{R}_n^*$, $R_n(P) \subset P$, 只要集族

$$\{Q \in \mathscr{P}_n : Q \subset U\}$$

中有某些 Q 使 $P \subset Q$, 则可有

$$R_n(P) \subset P \subset Q \subset U.$$

从而 $\cup\mathscr{R}_n^* \subset U$ 得证. 如若不然, 由断言 1 的假设及 (8.4.1) 式, Z 终留于

$$\mathrm{Int}(\cup\{Q \in \mathscr{P}_n : Q \subset U\}) \subset \mathrm{Int}(\cup\{Q \in \mathscr{P}_n : P \not\subset Q\}) \subset X - R_n(P).$$

从而 $R_n(P) \cap Z$ 是有限集, 与 (8.4.3) 式矛盾. 所以 $\cup\mathscr{R}_n^* \subset U$. 断言 1 得证.

对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathscr{R}_n' = \mathscr{R}_n \cup \{X - \mathrm{Int}(\cup\mathscr{R}_n)\} = \{R_\alpha : \alpha \in I_n\}.$$

再置

$$M = \{\sigma = \{\sigma(n)\} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n : \{R_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ 形成某点 } x \in X \text{ 的网络}\}.$$

这里点的网络的概念见定理 7.3.21 前的介绍. 对指标集 I_n $(n \in \mathbb{N})$ 赋以离散拓扑, 取 I_n $(n \in \mathbb{N})$ 的可数积. 在此积拓扑下 $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ 是度量空间, 它的子空间 M 也是度量空间. $\sigma = \{\sigma(n)\} \in M$ 是一序列, 每一 $\sigma(n) \in I_n$, $R_{\sigma(n)}$ 是 $\{R_\alpha : \alpha \in I_n\}$ 中的元, $\{R_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是集序列. 定义映射 $f : M \to X$, 使

$$f(\sigma) = x \quad \text{当且仅当} \quad \{R_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ 形成点 } x \text{ 的网络.}$$

断言 2. $f(M) = X$.

证明 如 x 是孤立点, 则 $\{x\} \in$ 某 $\mathscr{P}_n$. 由 (8.4.1) 式 $R_n(\{x\}) = \{x\}$; 如 x 不是孤立点, 设 Z 是一序列包含在 $X - \{x\}$ 内而收敛于 x, 取 $R_{\sigma(n)} \in \mathscr{R}_n$ 使 $R_{\sigma(n)} \cap Z$ 是无限集, 如可能的话就这样做, 如不可能的话可取 $R_{\sigma(n)} = X - \operatorname{Int}(\cup\mathscr{R}_n)$. 在任何情况下, 由引理 8.4.2, $x \in R_{\sigma(n)}$, 则由引理 8.4.3 及断言 1, $\{R_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的网络. 断言 2 得证.

断言 3. f 是连续的.

证明 设 U 是 X 中开集, $x \in U$, 有 $\sigma = \{\sigma(n)\} \in M$ 使 $\{R_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的网络, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $R_{\sigma(n)} \subset U$. 取 M 中点 σ 的 (按积拓扑) 邻域 B, 使 B 中每一点的前 n 项与点 σ 的前 n 项相同, 则 $f(B) \subset R_{\sigma(n)} \subset U$. 断言 3 得证.

断言 4. f 是闭映射.

证明 设 F 是 M 的闭集, $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是包含在 $f(F)$ 内的序列收敛于 $x \in X - Z$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 选取一 $\sigma_n \in F \cap f^{-1}(z_n)$, 序列 σ_n (对应着 z_n) 是 M 的元. 令 $S_0 = \mathbb{N}$. 下面对每一 $m \in \mathbb{N}$, 归纳地选取无限集 $S_m \subset S_{m-1}$ 及 $\tau(m) \in I_m$.

由引理 8.4.2, 可找一 $i \in \mathbb{N}$ 使

$$\mathscr{R}^* = \{R \in \mathscr{R}'_m : R \cap Z \text{ 是无限集}\}$$

$$\subset \{R \in \mathscr{R}'_m : R \cap \{z_n : n \geqslant i\} \neq \varnothing\}$$

是一有限集族, 所以对 $n \geqslant i$, $R_{\sigma_n(m)} \in \mathscr{R}^*$. 然由引理 8.4.2, 这种 $R_{\sigma_n(m)}$ 只能有有限个. 于是这无限个 $\sigma_n(m)$ 中必有无限个是相同的, 即存在无限集 $S_m \subset S_{m-1}$ 使对每一 $n \in S_m$, $\sigma_n(m)$ 是相同的. 把这相同的 $\sigma_n(m)$ 记为 $\tau(m)$, 即令 $\tau(m) = \sigma_n(m)$.

下证 $\tau = \{\tau(m)\}$ 属于 $f^{-1}(x)$. 由于对每一 $m \in \mathbb{N}$, $z_n \in R_{\sigma_n(m)} = R_{\tau(m)}$ 对所有 $n \in S_m$ 成立, 则有 $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} R_{\tau(m)}$. 如 U 是 X 中开集, $x \in U$, 则由引理 8.4.3 及断言 1, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $R_{\tau(m)} \in \mathscr{R}_n$ 及 $R_{\tau(m)} \subset U$. 所以 $\{R_{\tau(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 形成点 x 的网络, 从而 $f(\tau) = x$.

取 $n_m \in S_m$ 使对每一 $m \in \mathbb{N}$ 有 $n_m < n_{m+1}$, 则序列 $\{\sigma_{n_m}\}$ 收敛于 τ. 事实上, 如 $m \geqslant k$, 则 $n_m \in S_k$, 所以 $\sigma_{n_m}(k) = \tau(k)$. 这样 $\tau \in F$, $x \in f(F)$, 于是 $f(F)$ 是闭集. 充分性得证.

必要性是显然的, 读者可以自己完成. 提示如下: 度量空间是 Fréchet 空间, 后者为连续闭映射所保持 (见习题 8.3); 局部有限集族是遗传闭包保持集族, 后者为连续闭映射所保持; 定义在度量空间上的连续闭映射是紧覆盖映射 (定理 6.6.9), 后者保持 k 网. 证完.

上述定理的必要性的证明中定理 6.6.9 可代以引理 7.5.1, 由此可类似证明: 如果一个 T_2 空间是 $\aleph$ 空间在连续闭映射下的像空间, 则它具有 σ 遗传闭包保持 k 网. 不知每一具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间是否 $\aleph$ 空间在连续闭映射下的像? [168, 249]

下面介绍 Foged 定理的几个应用. 显然, 由 Foged 定理, 具有可数 k 网的正则、Fréchet 空间是 Lašnev 空间.

引理 8.4.4[247]　若 $\mathscr{P}$ 是正则空间 X 的遗传闭包保持集族, 则 $\overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}\}$ 也是 X 的遗传闭包保持集族.

证明　记 $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 若 $\overline{\mathscr{P}}$ 不是 X 的遗传闭包保持集族, 那么对每一 $\alpha \in A$, 存在 $H_\alpha \subset \overline{P}_\alpha$, 使 $\bigcup_{\alpha\in A}\overline{H}_\alpha$ 不是闭集. 取 $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in A} H_\alpha} - \bigcup_{\alpha\in A}\overline{H}_\alpha$. 由正则性, 对每一 $\alpha \in A$, 存在开集 V_α, U_α, 使 $x \in V_\alpha$, $\overline{H}_\alpha \subset U_\alpha$ 且 $V_\alpha \cap U_\alpha = \varnothing$, 于是 $H_\alpha \subset U_\alpha \cap \overline{P}_\alpha \subset \overline{U_\alpha \cap P_\alpha}$. 所以

$$x \in \overline{\cup\{\overline{U_\alpha \cap P_\alpha} : \alpha \in A\}} = \cup\{\overline{U_\alpha \cap P_\alpha} : \alpha \in A\}.$$

从而有 $\beta \in A$, 使 $x \in \overline{U_\beta \cap P_\beta}$, 因此 $U_\beta \cap P_\beta \cap V_\beta \neq \varnothing$, 矛盾. 故 $\overline{\mathscr{P}}$ 是 X 的遗传闭包保持集族.

推论 8.4.1[122]　正则空间 X 可度量化当且仅当 X 是第一可数的且具有 σ 遗传闭包保持 k 网.

证明　由引理 8.4.4 及 Foged 定理, 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的第一可数的正则空间是 Lašnev 空间, 再由 Morita-Hanai-Stone 定理 (定理 4.4.2), 第一可数的 Lašnev 空间可度量化. 证完.

推论 8.4.2[329]　正则空间 X 可度量化当且仅当 X 是第一可数的且具有 σ 局部有限 k 网.

推论 8.4.3 (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理 [73])　正则空间 X 可度量化当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持基.

证明　只要证明具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间 X 是第一可数的. 显然, 此空间是 σ 空间, 所以每一点 $x \in X$ 的单点集是 G_δ 集, 即 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, G_n 是开集. 设 $\mathscr{P}$ 是点 x 的遗传闭包保持的邻域族. 不妨设 x 是 X 的聚点, 下证 $\mathscr{P}$ 是有限的, 从而 X 是第一可数的.

姑设 $\mathscr{P}$ 是可数无限的, 即 $\mathscr{P} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. 令

$$D_1 = P_1 \cap G_1, \quad D_n = D_{n-1} \cap P_n \cap G_n \ (n \geqslant 2).$$

由于 $P_1 \cap G_1$ 是 x 的邻域, 于是 x 是 $D_1 - \{x\}$ 的聚点. 然而 x 不是每一集 $D_n - D_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ 的聚点, 从而由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性知 x 不是集

$$\cup\{D_n - D_{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = D_1 - \{x\}$$

的聚点, 矛盾. 所以 $\mathscr{P}$ 是有限的. 证完.

在 $\aleph$ 空间的理论方面, 最显赫的是 Foged 的两个定理: 定理 8.3.2 刻画了 $\aleph$ 空间; 定理 8.4.1 刻画了 Lašnev 空间 —— 度量空间的连续闭映像. 尽管 Burke-Engelking-Lutzer [73] 曾以 σ 遗传闭包保持基刻画度量空间 (推论 8.4.3), 但遗传闭包保持集族引起学者浓厚兴趣是在 Foged 两定理以后, 因为是否可用 σ 遗传闭包保持 k 网刻画 $\aleph$ 空间是受 Foged 两定理启发的必然结果. 这一问题被 Junnila 和恽自求 [225] 解决 (定理 8.4.3), 完整了这方面的理论, 此定理是继 Foged 两定理后的又一大定理.

与例 4.1.5 中序列扇一样的思想, 这里要引进有趣的**扇空间** (fan space)$\boldsymbol{S_{\omega_1}}$. 取数直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 (在通常拓扑下) $S = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $\alpha < \omega_1$, S_α 同胚于 S. 作拓扑和 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$, 把它的所有非孤立点 (是一闭集) 映成一点所得的商空间记作 S_{ω_1}. 拓扑和 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 是度量空间, 自然商映射是闭的, 所以 S_{ω_1} 是度量空间的连续闭映像, 即 Lašnev 空间. 由 Foged 定理 (定理 8.4.1) 知 S_{ω_1} 具有 σ 遗传闭包保持 k 网, 但由下述定理 8.4.2 知 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间.

定义 8.4.1 [150] 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 $\boldsymbol{cs^*}$ **网** (cs^*-network), 如果对 X 的收敛序列 $Z = \{z\} \cup \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(z_n \to z)$ 及开集 $U \supset Z$, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 及 Z 的子序列 $Z' = \{z\} \cup \{z_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$, 使 $Z' \subset P \subset U$.

显然, cs 网是 cs^* 网, 易知闭 k 网是 cs^* 网 (习题 8.14).

定理 8.4.2 [251] S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网, 从而不是 $\aleph$ 空间.

证明 设 a 是 S_{ω_1} 的非孤立点, 对 $\alpha < \omega_1$, 令 $Y_\alpha = S_\alpha - \{a\}$. 姑设 S_{ω_1} 具有点可数 cs^* 网 $\mathscr{P}$, 记可数集族

$$\{P \in \mathscr{P} : a \in P \text{ 且有无限多个 } \alpha < \omega_1 \text{ 使 } Y_\alpha \cap P \neq \varnothing\} \tag{8.4.5}$$

为 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 P_n, 取 $y_n \in P_n - \{a\}$, 且使不同的 y_n 属于不同的 Y_α, 则 $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_{ω_1} 的闭集.

置 $V = S_{\omega_1} - \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, V 是开集. 如果 $a \in P \subset V$, 且 $P \in \mathscr{P}$, 则 $P \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$, 从而 $P \notin \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$. 由 (8.4.5) 式, P 仅与有限个 Y_α 相交. 置

$$H = \cup\{P \in \mathscr{P} : a \in P \subset V\}. \tag{8.4.6}$$

H 是可数并, 所以 H 仅与可数个 Y_α 相交, 因此存在 $\beta < \omega_1$ 使 $Y_\beta \cap H = \varnothing$.

另一方面, 设 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = V \cap Y_\beta$, 则 $x_n \to a$. 因 $\mathscr{P}$ 是 cs^* 网, 存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 及 $P \in \mathscr{P}$ 使 $\{a\} \cup \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset V$. 由 (8.4.6) 式, $Y_\beta \cap H \neq \varnothing$, 矛盾. 故 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网.

由于 $\aleph$ 空间具有 σ 局部有限闭 k 网 $\Rightarrow$ 点可数闭 k 网 $\Rightarrow$ 点可数 cs^* 网, 所以 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间. 证完.

注记 易验证, S_{ω_1} 具有点可数 k 网. 由定理 8.4.2, S_{ω_1} 的此点可数 k 网必不是 cs^* 网, 从而 k 网未必是 cs 网. 另一方面, 由于最大紧化 $\beta\mathbb{N}$ 不存在非平凡的收敛序列 (例 3.6.2), 所以集族 $\mathscr{P} = \{\{x\} : x \in \beta\mathbb{N}\}$ 是 $\beta\mathbb{N}$ 的 cs 网, 但是 $\mathscr{P}$ 不是 $\beta\mathbb{N}$ 的 k 网. 否则, 由 $\beta\mathbb{N}$ 的紧性, $\mathscr{P}$ 的有限子集将覆盖 $\beta\mathbb{N}$, 从而 $\beta\mathbb{N}$ 是有限集, 矛盾.

定理 8.4.3 (Junnila-Yun 定理 [225]) 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 不包含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明 必要性的证明是显然的, 因 $\aleph$ 空间是遗传的, 而 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间 (定理 8.4.2).

充分性的证明需要引入一系列的引理.

引理 8.4.5 [225] 设 X 是 T_1, σ 空间, 且每一紧集是有限集, 则 X 可表示为 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 使每一 X_n 是离散闭子集.

证明 设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限网络且关于有限交封闭, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是局部有限的. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $X_n = \{x \in X : \{x\} \in \mathscr{F}_n\}$, 则 X_n 是离散闭集. 对每一 $x \in X$, 因 $\mathscr{F}$ 是点可数的, 记

$$\{F \in \mathscr{F} : x \in F\} = \{F_k : k \in \mathbb{N}\}, \quad F'_k = \bigcap_{n\leqslant k} F_n \ (k \in \mathbb{N}),$$

则 $\{F'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的网络, 于是必有一 $k \in \mathbb{N}$ 使 $F'_k = \{x\}$. 如若不然, 则每一 F'_k 是无限集, 存在不同的点所成序列 $\{x_k\}$ 使 $x_k \in F'_k$ 且 $x_k \neq x$, $k \in \mathbb{N}$, 这时无限集 $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ 是 X 的紧集, 矛盾. F'_k 应属于某 $\mathscr{F}_n$, 从而 $x \in X_n$. 证完.

引理 8.4.6 [327] 设 $\mathscr{F}$ 是 T_1 空间 X 的遗传闭包保持集族, K 是可数紧子集, 则存在 K 的有限子集 A 使 $(K - A) \cap F \neq \varnothing$ 仅对有限个 $F \in \mathscr{F}$ 成立.

证明 引理 8.4.6 是引理 8.4.2 和引理 5.5.1 的一般形式, 证也与引理 8.4.2 类似. 证完.

注记 若引理中的 $\mathscr{F}$ 还是闭集族, 如置 $D = \{x \in X : |(\mathscr{F})_x| \geqslant \omega\}$, 则 D 是闭集. 由上述引理知含在 D 内的紧集是有限集. 这里, $(\mathscr{F})_x = \{F \in \mathscr{F} : x \in F\}$. 其次, 由排除点拓扑空间 (例 5.5.3) 知引理 8.4.2 和引理 8.4.6 中的 T_1 分离性不可减弱为 T_0 分离性.

引理 8.4.7 [225] 设 T_2 空间 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 的遗传闭包保持闭集族, 则对每一 $x \in X$ 至多有可数个 $F \in \mathscr{F}$ 使 $F - \{x\}$ 包含一序列

收敛于 x.

证明 如若不然, 存在点 $a \in X$ 及 $\mathscr{F}$ 的不可数子族 $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 使对每一 $\alpha < \omega_1$, $F_\alpha - \{a\}$ 包含子集 $Y_\alpha = \{y_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\}$ 使 $y_{\alpha,n} \to a$. 由引理 8.4.2, 不妨设 $\mathscr{F}$ 在每一 $y_{\alpha,n}$ 是点有限的. 从而 $\{F \in \mathscr{F} : F \cap Y_\alpha \neq \varnothing\}$ 是可数的, 所以 $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是星可数的, 因此是 σ 互不相交集族 (引理 6.1.3). 由 ω_1 的不可数性, 存在 $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 的互不相交的不可数子族 $\{Y_{\alpha(\beta)} : \beta < \omega_1\}$, 于是不妨设 $\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是互不相交集族. 由 $\mathscr{F}$ 的遗传闭包保持性, X 的闭子空间 $\{a\} \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha)$ 同胚于 S_{ω_1}, 与引理假设矛盾. 证完.

引理 8.4.8[225] 设具有 σ 遗传闭包保持 k 网 $\mathscr{F}$ 的正则空间 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 设 D 是 X 的离散闭子空间, 则存在 X 的 σ 离散闭子集族 $\mathscr{H}$ 使对 X 中紧子集 K 及 $d \in K \cap D$, $\{H \in \mathscr{H} : d \in \mathrm{Int}_K(K \cap H)\}$ 是 d 在 X 中的网络.

证明 由引理 8.4.4, 设正则空间 X 具有 σ 遗传闭包保持闭 k 网 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是遗传闭包保持的, 且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. 对每一 $x \in X$, 置

$$\mathscr{F}(x) = \{F \in \mathscr{F} : \text{存在紧集 } K \subset F \text{ 使 } x \in \overline{K - \{x\}}\}. \tag{8.4.7}$$

由于 X 是 σ 空间 (定理 7.3.5), X 的每一紧子集可度量化 (定理 7.3.13). 由引理 8.4.7, 集族 $\mathscr{F}(x)$ 是可数的, 从而可以记

$$\{\cup\mathscr{F}' : \mathscr{F}' \text{ 是 } \mathscr{F}(x) \text{ 的有限子族 }\} \cup \{\{x\}\} = \{F_k(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

对每一 $d \in D$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 令 $G_n(d)$ 是 d 的闭邻域, 满足

$$G_n(d) \subset X - \cup\{F \in \mathscr{F}_n : d \notin F\},$$

并设

$$S_n(d) = \cup\{F \in \mathscr{F}_n : F \cap D = \{d\}\}.$$

由于每一 $\mathscr{F}_n$ 是遗传闭包保持的, 集族 $\{G_n(d) \cap S_n(d) : d \in D\}$ 是离散闭的. 从而对 $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{H}_{n,k} = \{F_k(d) \cap G_n(d) \cap S_n(d) : d \in D\}$$

是离散闭的. 下面证明 σ 离散闭集族 $\mathscr{H} = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{n,k}$ 满足引理的条件.

设紧集 $K \subset X$, $d \in K \cap D$, O 是 d 在 X 中的邻域. 设 V 是 d 的闭邻域, 满足 $V \subset O - (D - \{d\})$. 由于 $\mathscr{F}$ 是 k 网, 存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}'$ 使

$$K \cap V \subset \cup\mathscr{F}' \subset O - (D - \{d\}).$$

取 $n \in \mathbb{N}$ 使 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}_n$, 并取 $k \in \mathbb{N}$ 使

$$F_k(d) = \cup(\mathscr{F}' \cap \mathscr{F}(d)) \cup \{d\},$$

注意到 $F \in \mathscr{F}' \cap \mathscr{F}(d) \Rightarrow d \in F$, 则

$$d \in F_k(d) \cap G_n(d) \cap S_n(d) \subset \cup\mathscr{F}' \subset O.$$

下面验证

$$d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d) \cap G_n(d) \cap S_n(d)) \tag{8.4.8}$$

以完成引理的证明.

由于 $d \in \mathrm{Int}_K(K\cap V) \subset \mathrm{Int}_K(K\cap(\cup\mathscr{F}'))$ 及 $\mathscr{F}'$ 是覆盖 $K\cap V$ 的 X 的有限闭子族, 故有 $d \in \mathrm{Int}_K(K\cap(\cup(\mathscr{F}')_d))$. 由于 $(\cup\mathscr{F}')\cap(D-\{d\}) = \varnothing$, 则有 $\cup(\mathscr{F}')_d \subset S_n(d)$, 这里 $(\mathscr{F}')_d = \{F \in \mathscr{F}' : d \in F\}$. 由上所证, 得 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap S_n(d))$.

由于 $d \in \mathrm{Int}_X G_n(d)$, 则有 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap G_n(d))$.

余下要证 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d))$, 从而 (8.4.8) 式得证. 对每一 $F \in \mathscr{F}'$, 置

$$E_F = X - \overline{F \cap K - \{d\}},\ E = \cap\{E_F : F \in \mathscr{F}' \text{ 及 } d \in E_F\},$$

则 E 是 d 的邻域. 对每一 $F \in \mathscr{F}'$, 若 $d \in E_F$, 则 $E \subset E_F$, 从而

$$K \cap F \cap E \subset K \cap F \cap E_F \subset K \cap F \cap (X - (F \cap K - \{d\})) \subset \{d\};$$

若 $d \notin E_F$, 则 $d \in \overline{F \cap K - \{d\}}$, 由 (8.4.7) 式知 $F \in \mathscr{F}(d)$. 总之

$$K \cap (\cup\mathscr{F}') \cap E \subset \cup(\mathscr{F}' \cap \mathscr{F}(d)) \cup \{d\} = F_k(d).$$

由于 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap (\cup\mathscr{F}'))$ 及 $d \in \mathrm{Int}_X E$, 由上得证 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d))$. 证完.

定理 8.4.3 充分性的证明　设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n$ 是正则空间 X 的闭 k 网, 每一 $\mathscr{F}_n$ 是遗传闭包保持的, 且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 设 X 不含闭子集同胚于 S_{ω_1}. 置

$$D_n = \{x \in X : |(\mathscr{F}_n)_x| \geqslant \omega\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

由引理 8.4.6 的注记及引理 8.4.5, D_n 可表示为 $D_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_{n,k}$, 对每一 $k \in \mathbb{N}$, $D_{n,k}$ 是 X 的离散闭子集且 $D_{n,k} \subset D_{n,k+1}$. 另外, 对每一 $n, k \in \mathbb{N}$, 设 $\mathscr{H}_{n,k}$ 是 X 的 σ 离散闭子集族, 满足引理 8.4.8 的条件 (关于 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{n,k}$ 及 $D = D_{n,k}$).

对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持闭集族, 在 $X - D_n$ 中是点有限的, 从而在 $X - D_n$ 中是局部有限的. 对每一 $n, k \in \mathbb{N}$, 令

$$S_{n,k} = \cup\{F \in \mathscr{F}_k : F \cap D_n = \varnothing\} \text{ 及 } \mathscr{F}_{n,k} = \{F \cap S_{n,k} : F \in \mathscr{F}_n\},$$

则 $\mathscr{F}_{n,k}$ 在 X 中局部有限. 下证 σ 局部有限族

$$\mathscr{P} = \left(\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathscr{H}_{n,k}\right) \cup \left(\bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{n,k}\right)$$

是 X 的 k 网.

设 $K\subset O$, O 是 X 的开集, K 为紧集. 存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{F}'\subset O$, 取 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}_n$. 由引理 8.4.6 的注记, $K\cap D_n$ 是有限集, 从而可取 $k\in\mathbb{N}$ 使 $K\cap D_n\subset D_{n,k}$. 由引理 8.4.8, 对每一 $d\in K\cap D_n$, 存在 $H_d\in\mathscr{H}_{n,k}$ 使 $d\in \mathrm{Int}_K(K\cap H_d)$ 及 $H_d\subset O$. 令

$$K'=K-\cup\{\mathrm{Int}_K(K\cap H_d):d\in K\cap D_n\},$$

则 K' 是紧集及 $K'\subset X-D_n$ (开集). 从而存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}''$ 使 $K'\subset\cup\mathscr{F}''\subset X-D_n$. 取 $l\in\mathbb{N}$ 使 $\mathscr{F}''\subset\mathscr{F}_l$, 则 $\cup\mathscr{F}''\subset S_{n,l}$ 及 $K'\subset S_{n,l}$. 置

$$\mathscr{P}'=\{H_d:d\in K\cap D_n\}\cup\{F\cap S_{n,l}:F\in\mathscr{F}'\},$$

则 $\mathscr{P}'$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子族, 由上得 $K\subset\cup\mathscr{P}'\subset O$. 证完.

由于 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网 (定理 8.4.2), 从而不具有点可数闭 k 网. 故得下述两推论.

推论 8.4.4[152] 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网及点可数闭 k 网.

推论 8.4.5[261] 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网及点可数 cs^* 网.

定理 8.3.1 证明 cs 网 $\Rightarrow$ k 网是对可数集族证明的. 其后的注记指出, 这证法适用于 σ 局部有限集族、σ 局部可数集族情况. 对遗传闭包保持族怎样? 能否借用上述证法. 有下述定理.

定理 8.4.4[320] 设 $\mathscr{P}$ 是 T_2 空间 X 的 σ 遗传闭包保持 cs^* 网, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持 k 网.

证明 这里要用下述论断: 如可数紧子集 K 为 T_1 空间的遗传闭包保持集族 $\mathscr{F}$ 覆盖, 则 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}'$ 覆盖 K (引理 5.5.1).

设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持 cs^* 网, 每一 $\mathscr{P}_n$ 是遗传闭包保持的. 对 X 的紧集 K, 开集 $U\supset K$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\mathscr{P}_n'=\{P\in\mathscr{P}_n:P\subset U\},\quad F_n=\cup\mathscr{P}_n'.$$

下证 K 为有限个 F_n 覆盖. 如若不然, 存在 K 中序列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\in K-\bigcup_{i\leqslant n}F_i$. 以下用定理 8.3.1 的 (ii) $\Rightarrow$ (i) 的证法导出矛盾 (利用 T_2 分离性), 得到 $K\subset\bigcup_{i\leqslant n}F_i$. 然后由引理 5.5.1, 存在 $\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{P}_i'$ 的有限子族 $\mathscr{P}''$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}''\subset U$. 证完.

cs 网、k 网一般无蕴含关系 (见定理 8.4.2 的注记). 由上述所证结果, 在具体情况下, 似乎 cs 网强些. 由 Junnila-Yun 定理 (定理 8.4.3), 具有 σ 遗传闭包保持 k

网不足以刻画 $\aleph$ 空间. 林寿 [249] 提出 "具有 σ 遗传闭包保持 cs 网能否刻画 $\aleph$ 空间"? 答案是肯定的, 见下面定理 8.4.5.

引理 8.4.9 [256, 431] S_{ω_1} 不具有 σ 遗传闭包保持 cs 网.

证明 姑设 S_{ω_1} 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网 $\mathscr{F}$. S_{ω_1} 可以表示为

$$S_{\omega_1} = \{(1/n, \alpha) : \alpha < \omega_1,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}.$$

$(0,0)$ 是 S_{ω_1} 的聚点. 对每一 $\alpha < \omega_1$, 令 $S^{(\alpha)} = \{(1/n, \alpha) : n \in \mathbb{N}\}$. 因 $\mathscr{F}$ 是 σ 遗传闭包保持集族, 由引理 8.4.2, $\{F \in \mathscr{F} : |S^{(0)} \cap F| = \omega\}$ 应是 $\mathscr{F}$ 的可数子族. 为了导出矛盾, 只要证明集族 $\{F \in \mathscr{F} : |S^{(0)} \cap F| = \omega\}$ 是不可数的.

下面用超限归纳法证明, 对每一 α, $0 < \alpha < \omega_1$, 可取 $F_\alpha \in \mathscr{F}$ 及 $z_\alpha \in S^{(\alpha)} \cap F_\alpha$, 使当 $\alpha \neq \beta$ 时, $F_\alpha \neq F_\beta$.

对每一 α, $0 < \alpha < \omega_1$, 把 $S^{(0)} \cup S^{(\alpha)}$ 作为一序列, 这序列的奇数项形成的子序列是 $S^{(0)}$, 偶数项形成的子序列是 $S^{(\alpha)}$, 这序列收敛于 $(0,0)$. 因 $\mathscr{F}$ 是 cs 网, 存在 $F_1 \in \mathscr{F}$ 使 $S^{(0)} \cup S^{(1)}$ 终留于 F_1, 并取 $z_1 \in S^{(1)} \cap F_1$. 显然, $|S^{(0)} \cap F_1| = \omega$. 设 $\alpha < \omega_1$, 假设对每一 $\beta < \alpha$ $(\beta > 0)$, 已取得 $F_\beta \in \mathscr{F}$ 及 $z_\beta \in S^{(\beta)} \cap F_\beta$ 使 $|S^{(0)} \cap F_\beta| = \omega$. 注意, 集 $S_{\omega_1} - \{z_\beta : \beta < \alpha\}$ 是开集及 $(0,0) \in S_{\omega_1} - \{z_\beta : \beta < \alpha\}$. 所以存在 $F_\alpha \in \mathscr{F}$ 使 $S^{(0)} \cup S^{(\alpha)}$ 终留于 F_α 且 $F_\alpha \subset S_{\omega_1} - \{z_\beta : \beta < \alpha\}$. 显然, $|S^{(0)} \cap F_\alpha| = \omega$, 并可取 $z_\alpha \in S^{(\alpha)} \cap F_\alpha$. 由于 $F_\alpha \subset S_{\omega_1} - \{z_\beta : \beta < \alpha\}$, 所以对每一 $\beta < \alpha$, $F_\alpha \neq F_\beta$. 从而得到 $\{F \in \mathscr{F} : |S^{(0)} \cap F| = \omega\}$ 是不可数集族. 证完.

定理 8.4.5 [254, 431] 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网.

证明 必要性由 Foged 定理 (定理 8.3.2) 得到. 下证充分性. 设正则空间 X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网 $\mathscr{F}$. 由定理 8.4.4, $\mathscr{F}$ 也是 X 的 σ 遗传闭包保持 k 网. 此外, X 不能包含闭子空间同胚于 S_{ω_1} (不然的话, $\mathscr{F}|S_{\omega_1}$ 将是 S_{ω_1} 的 σ 遗传闭包保持 cs 网. 这与引理 8.4.9 矛盾). 由定理 8.4.3 知 X 是 $\aleph$ 空间. 证完.

关于 $\aleph$ 空间的映射性质, 由于 S_{ω_1} 是 Lašnev 空间 (度量空间的连续闭映像) 而不是 $\aleph$ 空间知, $\aleph$ 空间不能为连续闭映射所保持. 容易验证, 完备映射保持 $\aleph$ 空间 (习题 8.5). 下面证明连续的闭 Lindelöf 映射保持 $\aleph$ 空间.

引理 8.4.10 [246] 设 $f : X \to Y$ 是正则空间 X 到空间 Y 上的连续、闭 Lindelöf 映射, 则 f 是紧覆盖映射.

证明 设 K 是空间 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是 X 的 Lindelöf 子集 (见定理 3.3.3). 因 X 正则, $f^{-1}(K)$ 是仿紧的. 置 $g = f|_{f^{-1}(K)}$, 则 g 是从 T_2 仿紧空间 $f^{-1}(K)$ 到 K 上的连续闭映射. 由推论 6.6.2, g 是紧覆盖的, 存在 $f^{-1}(K)$ 中的紧集 C 使 $g(C) = K$, C 也是 X 中紧集且 $f(C) = g(C) = K$. 故 f 是紧覆盖映射. 证完.

定理 8.4.6[246, 380] 设 $f: X \to Y$ 是 $\aleph$ 空间 X 到正则空间 Y 上的连续、闭 Lindelöf 映射, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

证明 设 $\aleph$ 空间 X 具有 σ 局部有限闭 k 网 $\mathscr{P}$, Y 是正则空间, $f: X \to Y$ 是连续、闭 Lindelöf 映射. 置 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$, 由引理 8.4.10, f 是紧覆盖的, 所以 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 中的 σ 局部可数且闭包保持的闭 k 网. 由推论 8.3.1 知, Y 是 $\aleph$ 空间. 证完.

引理 8.4.11[390] 设 $f: X \to Y$ 是度量空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射, 则 f 是边缘 Lindelöf 映射 (即对每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的) 当且仅当 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明 若 f 是边缘 Lindelöf 映射, 则存在度量空间 M 和连续、闭 Lindelöf 映射 $g: M \to Y$ (见引理 4.4.8 的注记). 由定理 8.4.6, Y 是 $\aleph$ 空间. 再由定理 8.4.3, Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

反之, 若 f 不是边缘 Lindelöf 映射, 则存在 $y \in Y$, 使 $\partial f^{-1}(y)$ 不是 X 的 Lindelöf 子空间, 于是存在 $\partial f^{-1}(y)$ 的离散闭集 $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. 因为 X 是集态正规空间, 存在 X 的离散开集族 $\{D_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 使每一 $x_\alpha \in D_\alpha$. 由于 f 是连续的闭映射, $\{\overline{f(D_\alpha)}\}_{\alpha<\omega_1}$ 是空间 Y 的遗传闭包保持集族. 对每一 $\alpha < \omega_1$, 若 V 是点 y 在 Y 中的邻域, 那么

$$f^{-1}(V) \cap (D_\alpha - f^{-1}(y)) \neq \varnothing, \quad \text{即 } V \cap (f(D_\alpha) - \{y\}) \neq \varnothing,$$

于是 $y \in \overline{f(D_\alpha) - \{y\}}$. 因为 Y 是 Fréchet 空间 (见习题 8.3), $f(D_\alpha) - \{y\}$ 中包含一序列收敛于 y. 这与引理 8.4.7 相矛盾. 证完.

推论 8.4.6[152, 246] 下列论断等价:

(i) X 是 Fréchet 及 $\aleph$ 空间;

(ii) X 是度量空间在连续、闭 Lindelöf 映射下的像.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 X 是 Fréchet 及 $\aleph$ 空间. 由 Foged 定理 8.4.1, X 是 Lašnev 空间, 即存在度量空间 M 及连续的满、闭映射 $f: M \to X$. 因为 X 是 $\aleph$ 空间, 所以 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由引理 8.4.11, f 是边缘 Lindelöf 映射. 从而存在度量空间 A 和连续的满、闭 Lindelöf 映射 $g: A \to X$ (见引理 4.4.8 的注记). 故 X 是度量空间在连续、闭 Lindelöf 映射下的像.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 由定理 8.4.6 及连续的闭映射保持 Fréchet 空间得证. 证完.

由例 4.4.1 (度量空间在连续、有限对一开映射下的像未必是正则的) 知 $\aleph$ 空间不能为有限对一的连续开映射所保持. 下一例子说明即使附加正则性也不能得到有限对一的连续开映射保持 $\aleph$ 空间.

例 8.4.1 有限对一的连续开映射不保持 $\aleph$ 空间.

取 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$. 赋 X 予 V 拓扑:

(i) 对 $y>0$, (x,y) 是 X 的孤立点;

(ii) 对 $y=0$, (x,y) 的邻域基元形如

$$V(x,n)=\{(t,s)\in X: t=x\pm s, 0\leqslant s\leqslant 1/n\},\quad (n\in\mathbb{N}).$$

X 称为 V 空间, 或 Heath 的 V 空间 [183].

易见, X 是正则空间. 由于 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 关于欧几里得拓扑是第二纲的, 用标准的纲方法 (见例 2.2.3), X 不是正规空间. 如果 X 是 k 半层空间, 因为 X 是第一可数空间, 由定理 7.5.5, X 是层空间, 这与 X 不是正规空间矛盾. 所以 X 不是 k 半层空间, 从而 X 不是 $\aleph$ 空间 (推论 8.2.1).

对每一 $r\in\mathbb{R}$, 让 $X_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=|x-r|\}$, 则 X_r 是 X 的可度量化的开子空间 (因为它具有 σ 离散基), 且 $\{X_r: r\in\mathbb{R}\}$ 是 X 的点有限开覆盖. 令 $M=\bigoplus_{r\in\mathbb{R}}X_r$, 设 $f: M\to X$ 是显然映射 (见定理 3.4.9 的证明), 则 M 是度量空间且 f 是有限对一的连续开映射. 这表明度量空间的有限对一的连续开的正则映像未必是 $\aleph$ 空间.

度量空间能为既开且闭的连续映射所保持 (定理 4.4.3). 林寿 [249] 提出问题 "$\aleph$ 空间能为既开且闭的连续映射保持否?" 恽自求 [431] 正面解决了. 下面引入一稍强的结果.

Michael 引入紧覆盖映射 (定义 5.5.1) 以保持 k 网. Guthrie [173] 引入 cs 网, 而在同一年内 Siwiec [359] 引入序列覆盖映射, 正好这类映射保持 cs 网.

定义 8.4.2 [359] 映射 $f: X\to Y$ 称为**序列覆盖的** (sequence-covering), 如果对 Y 中的任一收敛序列 $\{y_n\}$ 及其极限 $y\in Y$, 存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ 及 $x\in f^{-1}(y)$ 使 $\{x_n\}$ 收敛于点 x.

容易验证, 连续的序列覆盖映射保持 cs 网.

回忆在引理 4.4.9 的注记中曾引入的几乎开映射, 它是开映射的推广.

引理 8.4.12 [144] 设 X 是正则空间且每一单点集是 G_δ 集. 若 $f: X\to Y$ 是 X 到 Y 上的几乎开的闭映射, 则 Y 是正则空间且 f 是序列覆盖映射.

证明 由于 f 是闭映射, 所以 Y 是 T_1 空间. 若 $y\in Y$ 且 V 是 y 的开邻域, 因 f 是几乎开的, 存在点 $x\in f^{-1}(y)$ 使对 x 的每一邻域 U, $y\in \mathrm{Int}f(U)$. 由 X 的正则性, 存在 X 的开集 U 使 $x\in U\subset\overline{U}\subset f^{-1}(V)$, 那么 $y\in\mathrm{Int}f(U)\subset f(\overline{U})$, 于是

$$y\in\mathrm{Int}f(U)\subset\overline{\mathrm{Int}f(U)}\subset f(\overline{U})\subset V.$$

所以 Y 是正则空间.

设 $\{y_n\}$ 是 Y 中的序列收敛于点 $y\in Y$, $\{y_n\}$ 及 y 是由不同的点形成的. 因 f 是几乎开的, 存在点 $x\in f^{-1}(y)$ 使对 x 的每一邻域 U, $y\in\mathrm{Int}f(U)$. 因 X 是正则的且每一单点集是 G_δ 集, 置 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 的开邻域序列使 $\{x\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_i$ 且

$\overline{U}_{i+1} \subset U_i$, $i \in \mathbb{N}$. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 存在 $m(i) \in \mathbb{N}$ 使当 $n \geqslant m(i)$ 时, $y_n \in \mathrm{Int}f(U_i)$, 从而 $U_i \cap f^{-1}(y_n) \neq \varnothing$. 不妨设每一 $m(i+1) > m(i)$. 依下列方式得序列 $\{x_j\}$: 对 $j < m(1)$, 取 $x_j \in f^{-1}(y_i)$; 当 $m(i) \leqslant j < m(i+1)$ 时, 取 $x_j \in U_i \cap f^{-1}(y_j)$. 因 f 是闭映射, $\{x_j\}$ 应有聚点 (不然的话, 如 $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ 是闭集, 则 $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ 也闭, 矛盾). 设 E 是 $\{x_j\}$ 的聚点所成集, 则 $E \subset \overline{U}_i$, $i \in \mathbb{N}$. 从而

$$E \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{U}_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{x\}.$$

所以 $\{x_j\}$ 以 x 为惟一聚点, 而且 $\{x_j\}$ 的任一子序列仍以 x 为惟一聚点. 故 $\{x_j\}$ 收敛于 x, f 是序列覆盖映射. 证完.

定理 8.4.7[144] 设 $f: X \to Y$ 是 $\aleph$ 空间 X 到空间 Y 上的几乎开的连续、闭映射, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

证明 $\aleph$ 空间满足引理 8.4.12 的条件, f 是连续的序列覆盖映射, 它保持 cs 网. 由定理 8.4.5 知 Y 是 $\aleph$ 空间. 证完.

由于开映射是几乎开的, 得下列推论.

推论 8.4.7[431] 设 $f: X \to Y$ 是 $\aleph$ 空间 X 到空间 Y 上的既开且闭的连续映射, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

下述推论是 $\aleph$ 空间的和定理.

推论 8.4.8[250] 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是正则空间 X 的点可数且遗传闭包保持 (即局部可数且遗传闭包保持) 闭覆盖, 每一 F_α $(\alpha \in A)$ 是 $\aleph$ 空间, 则 X 是 $\aleph$ 空间.

证明 由于在正则空间类中 $\aleph$ 空间性质关于连续的可数对一闭映射保持 (定理 8.4.6) 及一般性定理 5.5.7 得证. 证完.

注记 $\aleph$ 空间未必满足遗传闭包保持闭和定理. 以扇空间 S_{ω_1} 为例, S_{ω_1} 的构造见定义 8.4.1 的前面. 对 $\alpha < \omega_1$, S_α 是度量空间也是 $\aleph$ 空间. 把拓扑和 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 中非孤立点映成一点而得到 S_{ω_1} 的商映射记作 q, q 是闭映射. $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是空间 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 的离散闭覆盖, 于是 $\{q(S_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是空间 S_{ω_1} 的遗传闭包保持闭覆盖, 每一 $q(S_\alpha)$ 同胚于 S_α, 是 S_{ω_1} 的闭 $\aleph$ 子空间. 所以 S_{ω_1} 具有由 $\aleph$ 子空间构成的遗传闭包保持闭覆盖, 而 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间 (定理 8.4.2).

对于上述的 S_{ω_1}, 及每一 $\alpha < \omega_1$, 记 $S_\alpha = \{0\} \cup \{x_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\}$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $X_n = \{x_{\alpha,n} : \alpha < \omega_1\}$, 则 X_n 是 S_{ω_1} 的闭离散度量子空间, 从而是 $\aleph$ 空间. 由于 $S_{\omega_1} = \{a\} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n)$, 其中 a 是 S_{ω_1} 的非孤立点, 所以 $\aleph$ 空间性质不满足可数闭和定理.

几乎开映射是可数双商映射 (定义 5.2.1), 比定理 8.4.7 更进一步的结果是下述定理①.

① 修订者感谢 M. Sakai 教授允许在此公布他的结果及证明.

定理 8.4.8 (M. Sakai, 2007)　设 $f: X \to Y$ 是 $\aleph$ 空间 X 到正则空间 Y 上的可数双商的连续、闭映射, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

证明　因为 X 是 $\aleph$ 空间, 令 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 X 的 σ 局部有限闭 k 网, 满足每一 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的, 且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 由引理 7.5.1, f 是紧覆盖映射, 易验证 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 Y 的 σ 遗传闭包保持 k 网. 由 Junnila-Yun 定理 (定理 8.4.3), 为完成证明, 只需证 Y 不包含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

假设不然, 则 Y 具有同胚于 S_{ω_1} 的闭子空间, 记为

$$\{\infty\} \cup \{y_{\alpha,n} : \alpha < \omega_1,\ n \in \mathbb{N}\},$$

这里 $\{y_{\alpha,n}\}$ 是第 α 个收敛于 ∞ 的序列. 下面利用归纳法构造 $\{n_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \subset \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}$ 的有限子集族 $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 满足:

(i) 对任一 $\alpha < \omega_1$, $\cup\{f^{-1}(y_{\alpha,n}) : n \geqslant n_\alpha\} \subset \cup\mathscr{F}_\alpha$;

(ii) 对任一 $P \in \mathscr{F}_\alpha$, $P \cap (\cup\{f^{-1}(y_{\alpha,n}) : n \geqslant n_\alpha\}) \neq \varnothing$;

(iii) 对任一 $\alpha < \beta < \omega_1$, $\mathscr{F}_\alpha \cap \mathscr{F}_\beta = \varnothing$.

取定 $\gamma < \omega_1$ 并且假设对任一 $\alpha < \gamma$ 都已有 $n_\alpha \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{F}_\alpha$ 满足上述条件. 对任一 $\alpha < \gamma$, 由 (i), 取 $\cup\{f^{-1}(y_{\alpha,n}) : n \geqslant n_\alpha\}$ 的有限子集 F_α 使得 $F_\alpha \cap P \neq \varnothing$ 对每一 $P \in \mathscr{F}_\alpha$ 成立. 让 $F = \cup\{F_\alpha : \alpha < \gamma\}$, 则 F 是 X 的闭集. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 取

$$\mathscr{Q}_n = \{P \in \mathscr{P}_n : P \cap F = \varnothing \text{ 且 } P \cap f^{-1}(y_{\gamma,k}) \neq \varnothing \text{ 对无限个 } k \in \mathbb{N} \text{ 成立}\}.$$

显然, $\mathscr{Q}_n \subset \mathscr{Q}_{n+1}$. 若某一 $\mathscr{Q}_n$ 是无限的, 取 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Q}_n$ 满足对 $i \neq j$ 有 $P_i \neq P_j$. 于是存在序列 $\{x_i\}$ 使得 $x_i \in P_i$ 且 $\{f(x_i)\}$ 是 $\{y_{\gamma,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列. 由于 $\mathscr{Q}_n \subset \mathscr{P}_n$ 是局部有限的, $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是闭集, 从而 $\{f(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ 是闭集, 矛盾. 这说明每一 $\mathscr{Q}_n$ 都是有限的. 下证存在 $n_\gamma \in \mathbb{N}$ 使得

$$\cup\{f^{-1}(y_{\gamma,n}) : n \geqslant n_\gamma\} \subset \cup\mathscr{Q}_{n_\gamma},$$

从而取 $\mathscr{F}_\gamma = \mathscr{Q}_{n_\gamma}$ 以完成归纳.

如若不然, 对任一 $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(y_{\gamma,k}) \not\subset \cup\mathscr{Q}_n$ 对无限个 $k \in \mathbb{N}$ 成立. 则可以选取 $k_n \in \mathbb{N}$ 和 $x_n \in f^{-1}(y_{\gamma,k_n}) - \cup\mathscr{Q}_n$. 不妨设每一 $k_n < k_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 由于 f 是闭的, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的任一无限子集都不是 X 的闭集.

断言: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 中包含一个序列, 收敛于 $f^{-1}(\infty)$ 中的某一点.

事实上, 设 x_0 是序列 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 由于 $\{f(x_n)\}$ 是 $\{y_{\gamma,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列, 于是 $f(x_0) = \infty$, 所以 $x_0 \in f^{-1}(\infty)$. 因为 X 是 $\aleph$ 空间, 从而 $\{x_0\}$ 是 G_δ 集, 存在开集列 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{x_0\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$, 且对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $\overline{G}_{i+1} \subset G_i$, $G_i \cap F = \varnothing$.

取 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{z_i\}$ 使每一 $z_i \in G_i(i \in \mathbb{N})$, 则 $\{z_i\}$ 收敛于 x_0 (证明同引理 8.4.12 中的相应部分), 所以断言成立.

由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网且紧集 $\{x_0\} \cup \{z_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X - F$, 存在 $l \in \mathbb{N}$ 及 $P \in \mathscr{P}_l$, 使得 P 包含 $\{x_n\}$ 中无限个点且 $P \subset X - F$, 从而 $P \in \mathscr{Q}_l$. 然而对任一 $n \geqslant l$, $x_n \in X - \cup\mathscr{Q}_l$, 于是 $\cup\mathscr{Q}_l$ 只能包含 $\{x_n\}$ 中至多有限个点, 矛盾. 至此完成归纳.

由于每一 $\mathscr{F}_\alpha$ 是有限的, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和无限集 $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \omega_1$ 使得对任一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $\mathscr{F}_{\alpha_i} \subset \mathscr{P}_m$. 令 $E_i = \cup\mathscr{F}_{\alpha_i}(i \in \mathbb{N})$. 由于 $\mathscr{P}_m$ 是局部有限的, 所以 $\{X - \bigcup_{j\geqslant i} E_j : i \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的开覆盖, 从而覆盖 $f^{-1}(\infty)$. 由 f 是可数双商的, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $f(X - \bigcup_{j\geqslant i_0} E_j)$ 是点 ∞ 在 Y 中的邻域. 另一方面, 由 (i), 当 $j \geqslant i_0$, $n \geqslant n_{\alpha_j}$ 时, $f^{-1}(y_{\alpha_j,n}) \subset E_j$, 所以

$$y_{\alpha_j,n} \in Y - f(X - E_j) \subset Y - f\left(X - \bigcup_{j\geqslant i_0} E_j\right).$$

这与 $f(X - \bigcup_{j\geqslant i_0} E_j)$ 是点 ∞ 的邻域相矛盾. 因此 Y 不包含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 证完.

8.5 一些尚未解决的问题

本节将以上各章节提到的一些问题及作者在一些已发表的论文中提到的问题集中, 供有兴趣的读者研究. 本节中提到的映射都是连续的满映射.

关于覆盖性质方面的问题.

问题 8.5.1[135] 设 X 是 q 空间或 r 空间, Y 是可数紧空间, 投影映射 $p : X \times Y \to X$ 是否闭映射?

问题 8.5.2 (§ 5.2) 可数双商的闭映射是否保持仿紧性 (不加分离公理)?

问题 8.5.3[217, 230] (§ 6.1) 定理 6.1.2 (弱仿紧) 的 (ii) 及定理 6.1.4 (θ 加细) 的 (ii) 中的 "闭包保持" 能否代以 "垫状"?

问题 8.5.4[143, 367] (§ 6.1) $\delta\theta$ 加细空间是否弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细空间?

问题 8.5.5[40] (§ 6.2) 仿 Lindelöf 的集态正规空间是否仿紧空间?

问题 8.5.6 (§ 6.2) 在 T_2 或正则空间类中, 闭映射能否保持 meso 紧性?

问题 8.5.7[66, 369] (§ 6.2) 闭映射能否保持弱 θ 加细性?

问题 8.5.8[369] (§ 6.2) 闭映射或完备映射能否保持弱 $\overline{\theta}$ 加细性?

问题 8.5.9[66] (§ 6.2) 有限对一闭映射能否保持 ortho 紧性?

问题 8.5.10 (§ 6.2) Meso 紧空间关于闭 Lindelöf 映射的正则逆像是否 meso 紧空间?

问题 8.5.11 (§ 6.2)　弱 $\overline{\theta}$ 加细空间关于闭 Lindelöf 映射的 T_2 逆像是否弱 $\overline{\theta}$ 加细空间?

问题 8.5.12 (§ 6.2)　有限对一开映射能否保持弱 θ 加细性、弱 $\overline{\theta}$ 加细性、$\delta\theta$ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性、弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细性?

问题 8.5.13 (§ 6.5)　下列覆盖性质能否满足何种闭和定理: 弱 $\overline{\theta}$ 加细性、meta-Lindelöf 性、$\delta\theta$ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性及弱 $\overline{\delta\theta}$ 加细性?

问题 8.5.14[143](§ 6.6)　不可约空间能否为闭映射 (或完备映射) 所保持?

问题 8.5.15[143]　具有性质 B 的 (正则) 空间是否不可约?

问题 8.5.16[135]　设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 满足可数闭和定理;

(iii) $\mathscr{P}$ 具有闭遗传性.

若 θ 加细空间 X 具有由属性 $\mathscr{P}$ 的子空间组成的局部有限闭覆盖, 那么 X 是否 $\mathscr{P}$ 空间?

问题 8.5.17[135]　设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的;

(ii) $\mathscr{P}$ 关于有限对一的开映射保持的;

(iii) $\mathscr{P}$ 满足可数闭和定理;

(iv) $\mathscr{P}$ 具有闭遗传性和开遗传性.

若 X 是弱 $\overline{\theta}$ 加细的局部 $\mathscr{P}$ 空间, 那么 X 是否 $\mathscr{P}$ 空间?

关于广义度量空间方面的问题.

问题 8.5.18[134]　Σ 空间、$\Sigma^\sharp$ 空间、wσ 空间、β 空间是否关于可数积封闭?

问题 8.5.19[80](§ 7.4)　是否有 $M_2 \Rightarrow M_1$?

问题 8.5.20[141, 204]　遗传 M_1 空间类关于可数积封闭否? 两个遗传 M_1 空间的积空间是遗传 M_1 空间否?

问题 8.5.21[141]　分层具有性质 (*) 的空间类关于可数积封闭否?

问题 8.5.22[141]　闭映射保持 M_0 空间的完备像否?

问题 8.5.23[141]　闭映射保持层 μ 空间否?

问题 8.5.24[141]　闭映射保持具有 σ 几乎局部有限基的空间否?

问题 8.5.25[141]　$\mathscr{P}$ 类中的空间是否闭遗传性质? 是否关于闭映射封闭?

问题 8.5.26[427](§ 7.5)　设 $f: X \to Y$ 是闭映射, 其中 X, Y 都是 T_2 空间. 若 X 是 k 半层空间, Y 是否 k 半层空间?

问题 8.5.27[139, 264](§ 8.2)　具有 σ 垫状对 k 网的正则空间是否具有 σ 闭包保持 k 网?

问题 8.5.28[168, 249](§ 8.4) 每一具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间是否 $\aleph$ 空间在闭映射下的像?

习 题 8

8.1 [291] 试证明 T_2 空间 X 是度量空间在连续的紧覆盖映射下的像当且仅当 X 的每一紧子集是可度量化的.

8.2 空间 X 称为 q **空间** (q-space [283]), 如果对每一 $x \in X$, 存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: $x_n \in U_n(x) \Rightarrow \{x_n\}$ 有聚点. 空间 X 称为**点可数型的** (pointwise countable type [20]), 如果对每一 $x \in X$, 存在紧集 K 使 $x \in K$ 且 K 在 X 中具有可数开邻域基. 显然, 第一可数空间或局部紧空间都是 r 空间; r 空间是 q 空间.

试证明在正则且每一单点集是 G_δ 集的空间, r, q, 点可数型空间和第一可数空间是相互等价的 [287].

8.3 空间 X 称为强 **Fréchet 空间** (strongly Fréchet space [359]), 如果对 X 中的递减集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及点 $x \in \overline{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), 则存在 $x_n \in A_n$ 使 $\{x_n\}$ 收敛于 x (当所有 $A_n = A$ 时, 则成为 Fréchet 空间). 显然, 强 Fréchet 空间 $\Rightarrow$ Fréchet 空间 $\Rightarrow$ 序列型空间 (见定理 2.3.1 的注记).

试证明商映射保持序列型空间 [125]、连续的伪开映射保持 Fréchet 空间 [19, 125]、连续的可数双商映射保持强 Fréchet 空间 [359]. 从而证明上述三类空间可依次分别刻画为度量空间在商映射 [125]、连续的伪开映射 [19, 125]、连续的可数双商映射下的像 [359].

8.4 [137] 设 X 是正则且第一可数的 (或局部紧的) 空间, 证明下列论断等价:

(i) X 是 M_1 空间;

(ii) X 具有 σ 闭包保持 k 网 $\mathscr{F}$, 每一 $F \in \mathscr{F}$ 是正则闭集.

8.5 [358] 证明完备映射保持 $\aleph$ 空间.

8.6 证明具有 σ 局部可数 k 网的仿紧空间具有 σ 局部有限 k 网. 从而证明: 连续的闭 Lindelöf 映射保持仿紧 $\aleph$ 空间.

8.7 [284] 证明从空间 X 到 T_2, k 空间 Y 上的连续紧覆盖映射是商映射.

8.8 证明在正则空间中, 下列论断等价:

(i) X 是 cosmic 空间;

(ii) X 是 Lindelöf 的 σ 空间;

(iii) X 是遗传可分的 σ 空间.

8.9 [284] 证明:

(i) 设 X 是正则 Lindelöf 且局部 $\aleph_0$ 空间 (即每一点存在一开邻域是 $\aleph_0$ 空间), 则 X 是 $\aleph_0$ 空间;

(ii) 设空间 X 是可数个不相交的子空间 X_n 的拓扑和, 每一 X_n 具有可数伪基, 则 X 具有可数伪基.

8.10 [245] 证明具有点可数伪基的 T_2 空间具有可数伪基. 从而具有 σ 局部有限伪基的正则空间是 $\aleph_0$ 空间.

8.11 [328] 证明下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph_0$ 空间;

(ii) X 是 Lindelöf 的 $\aleph$ 空间;

(iii) X 是遗传可分的 $\aleph$ 空间.

8.12 证明局部可数且闭包保持闭集族关于有限交封闭. 举例说明上述集族如不是闭的, 则结论不成立.

8.13 设 $K \subset \mathscr{C}(X,Y)$ 是紧集. 证明对每一 $x \in X$, $\phi(x) = \{f(x) : f \in K\}$ 是 Y 中紧集.

8.14 证明闭 k 网是 cs^* 网.

8.15 设 $\mathscr{P}$ 是 T_2, k 空间 X 的遗传闭包保持集族, 证明 $\overline{\mathscr{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathscr{P}\}$ 也是遗传闭包保持集族.

8.16 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为**弱遗传闭包保持的** [73] (weakly hereditarily closure-preserving), 如果任取点 $x(P) \in P \in \mathscr{P}$, 集族 $\{\{x(P)\} : P \in \mathscr{P}\}$ 是闭包保持的; $\mathscr{P}$ 称为**可数弱遗传闭包保持的** (countably weakly hereditarily closure-preserving), 如果 $\mathscr{P}$ 的每一可数子族是弱遗传闭包保持的.

证明 [227] 在 Fréchet 空间中, 可数弱遗传闭包保持集族是遗传闭包保持集族.

8.17 证明具有 σ 弱遗传闭包保持网络的 T_1 可数紧空间是具有可数网络的紧空间.

8.18 [258] 证明正则的 k 半层空间在连续、开紧映射下的正则映像是 σ 空间 (提示: 利用 Chaber [83] 的结果: 正则的 σ 空间在连续、开紧映射下的正则映像是 σ 空间当且仅当此像是次仿紧的).

8.19 [263] 证明空间 X 是 Lašnev 空间当且仅当 X 是正则的 Fréchet 空间且具有 σ 紧有限 k 网.

8.20 设 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是空间 X 到空间 Y 内的全体连续函数所成集赋以紧开拓扑. 此函数空间的次基中的元形如 $W(C,U) = \{f \in \mathscr{C}(X,Y) : f(C) \subset U\}$, 这里 C 是 X 中的紧集, U 开于 Y.

证明当 X 是离散空间时, $\mathscr{C}(X,Y)$ 正好是积空间 $Y^{|X|} = \prod\{Y_x : x \in X\}$, 这里 $|X|$ 是 X 的势, 每一 $Y_x = Y$ $(x \in X)$.

8.21 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的基本开集是它的次基中的元 $W(C,U)$ 的有限交. 证明如下关系式: 对每一 $n \in \mathbb{N}$,

(i) $\bigcap_{i=1}^n W(C_i,U) = W(\bigcup_{i=1}^n C_i, U)$;

(ii) $\bigcap_{i=1}^n W(C,U_i) = W(C, \bigcap_{i=1}^n U_i)$;

(iii) $\bigcap_{i=1}^n W(C_i,U_i) = W(\bigcup_{i=1}^n C_i, \bigcup_{i=1}^n U_i)$.

8.22 证明 $\overline{W(C,U)}^{\mathscr{C}} \subset W(C,\overline{U})$, 这里 "$-\mathscr{C}$" 表示紧开拓扑下的闭包.

8.23 对每一 $y_0 \in Y$, 令 $c_{y_0} : X \to Y$ 是常值映射, 定义为每一 $c_{y_0}(x) = y_0$, $x \in X$. 证明由 $y \mapsto c_y$ 给出的 $Y \to \mathscr{C}(X,Y)$ 的映射是 Y 到 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的某子空间上的同胚映射. 从而 Y 同胚于 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的某子空间.

8.24 [12] 证明 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 T_2 空间当且仅当 Y 是 T_2 空间.

8.25 映射 $f : X \to Y$ 称为**弱序列覆盖映射** [144] (weak sequence-covering mapping) 或**序列商映射** (sequentially quotient mapping [53]), 如果对空间 Y 的每一序列 $\{y_n\}$ 及所收敛的

点 y, 存在 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_k}\}$ 及 $x_k \in f^{-1}(y_{n_k})$ $(k \in \mathbb{N})$, $x \in f^{-1}(y)$ 使 $\{x_k\}$ 收敛于 x. 显然, 序列覆盖映射 (定义 8.4.2) 是弱序列覆盖映射. 证明:

(i) 连续的弱序列覆盖映射保持 cs^* 网 (熟知, 连续的紧覆盖映射保持 k 网, 连续的序列覆盖映射保持 cs 网);

(ii) 定义在强 Fréchet 空间 (或正则且每一单点集是 G_δ 集的空间) 上的连续闭映射是弱序列覆盖映射;

(iii) Y 是序列型空间、Fréchet 空间、强 Fréchet 空间当且仅当每一 (由 X) 到 Y 上的连续的弱序列覆盖映射分别是商映射、伪开映射、可数双商映射;

(iv) 存在以紧度量空间为定义域和值域的连续的弱序列覆盖映射而不是序列覆盖映射.

参考文献①

[1] Alexander C C. Semi-developable spaces and quotient images of metric spaces. Pacific J Math, 1971, 37: 277–293.

[2] Alexandroff P S. Sur les ensembles de la premiére classe et les ensembles abstraits. C R Acad Paris, 1924, 178: 185–187.

[3] Alexandroff P S. On bicompact extensions of topological spaces (in Russian). Mat Sb N S, 1939, 5: 403–423.

[4] Alexandroff P S. Some results in the theory of topological spaces, obtained within the last twenty-five years. Russian Math Surveys, 1960, 15: 23–83

[5] Alexandroff P S. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings. In: Proc 1st Topological Symp, Prague, 1961. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra I. New York: Academic Press, 1962. 41–54.

[6] Alexandroff P S, Hopf H. Topologie I. Berlin, 1935.

[7] Alexandroff P S, Niemytzki V V. The condition of metrizability of topological spaces and the axiom of symmetry (in Russian). Math Sb, 1938, 3: 663–672.

[8] Alexandroff P S, Urysohn P. Sur les espaces topologiques compacts. Bull Intern Acad Pol Sci Ser A, 1923: 5–8.

[9] Alexandroff P S, Urysohn P. Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh Akad Wetensch, 1929, 14: 1–96.

[10] Alster K, Burke D K, Davis S. The wΔ-space problem. Topology Appl, 1988, 30: 175–181.

[11] Aguaro G. Point countable open covering in countably compact spaces. In: Proc 2nd Prague Topological Symp, Prague, 1966. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, 1967. 39–41.

[12] Arens R F. A topology for spaces of transformations. Ann Math, 1946, 47: 480–495.

[13] Arens R, Dugundji J. Remark on the concept of compactness. Portug Math, 1950, 9: 141–143.

[14] Arhangel'skiĭ A V. An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1959, 126(2): 239–241.

[15] Arhangel'skiĭ A V. New criteria for the paracompactness and metrizability of an arbitrary T_1-spaces. (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1961, 141(2): 13–15.

① 修订者注: 第一版列有文献 320 篇, 高国士老师的校正补充文献 28 篇, 第二版补充文献 102 篇, 共列文献 450 篇. 第一版中的 69 篇文献在正文中未见引用, 为保持文献的完整性, 第二版仍保留这些文献.

[16] Arhangel'skiĭ A V. On mappings of metric spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 145: 245–247.

[17] Arhangel'skiĭ A V. On open and almost open mappings of topological spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 147: 999–1002.

[18] Arhangel'skiĭ A V. On a class of spaces containing all metric and all locally compact spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1963, 151: 751–754.

[19] Arhangel'skiĭ A V. Some types of factor mappings and the relations between classes of topological spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1963, 153: 743–746.

[20] Arhangel'skiĭ A V. Bicompact sets and the topology of spaces. Trans Mosc Math Soc, 1965, 13: 1–62.

[21] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces (in Russian). Uspechi Mat Nauk, 1966, 21(4): 133–184.

[22] Arhangel'skiĭ A V. The intersection of topologies, and pseudo-open bicompact mappings (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1976, 226: 745–748

[23] Arhangel'skiĭ A V. The star method, new classes of spaces and countable compactness. Soviet Math Dokl, 1980, 22: 550–554.

[24] Arhangel'skiĭ A V. General Topology III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 51. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[25] Arhangel'skiĭ A V, Ponomarev V I. Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises (in Russian). Moscow: Hayka, 1974 (英译本: Jain V K 译. Mathematics and its Applications, 13. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984).

[26] Arya S P, Singal M K. More sum theorems for topological spaces. Pacific J Math, 1975, 59: 1–7.

[27] Arya S P, Singal M K. On locally countable sum theorem. Pacific J Math, 1980, 90: 1–10.

[28] Aull C E. A note on countably paracompact spaces and metrization. Proc Amer Math Soc, 1965, 16: 1316–1317.

[29] Aull C E. Paracompact subsets. In: Proc 2nd Prague Topological Symp, Prague, 1966. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, 1967. 45–51.

[30] Aull C E. A generalization of a theorem of Aquaro. Bull Austral Math Soc, 1973, 9: 105–108.

[31] Aull C E. Quasi-developments and $\delta\theta$-bases. J London Math Soc, 1974, 9: 197–204.

[32] Aull C E. A survey paper on some base axioms. Topology Proc, 1978, 3: 1–36.

[33] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[34] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[35] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, 3. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[36] Bacon P. The compactness of countably compact spaces. Pacific J Math, 1970, 32: 587–592.

[37] Bagley R W, Connell E H, McKnight J D. On properties characterizing pseudo-compact spaces. Proc Amer Math Soc, 1958, 9: 500–506.

[38] Baire R. Sur la représentation des fonctions discontinues (deuxiéme partie). Acta Math, 1909, 32: 97–176.

[39] Balachandran V K. A mapping theorem for metric spaces. Duke Math J, 1955, 22: 461–464.

[40] Balogh Z. Dowker spaces and paracompactness questions. Topology Appl, 2001, 114: 49–60.

[41] Bennett H R. Quasi-developable spaces. Proc Arizona State Univ Top Conf, 1967. 314–317.

[42] Bennett H R. On Arhangel'skiĭ's class MOBI. Proc Amer Math Soc, 1970, 26: 178–180.

[43] Bennett H R. On quasi-developable spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 253–262.

[44] Bennett H R, Chaber J. Weak covering properties and the class MOBI. Fund Math, 1990, 134: 171–182.

[45] Bennett H R, Lutzer D J. A note on weak θ-refinability. General Topology Appl, 1972, 2: 49–54.

[46] Bing R H. Metrization of topological spaces. Canad J Math, 1951, 3: 175–186.

[47] Birkhoff G. A note on topological groups. Comp Math, 1936, 3: 427–430.

[48] Boone J R. Some characterizations of paracompactness in k-spaces. Fund Math, 1971, 72: 145–153.

[49] Boone J R. A characterization of metacompactness in the class of θ-refinable spaces. General Topology Appl, 1973, 3: 253–264.

[50] Boone J R. On k-quotient mappings. Pacific J Math, 1974, 51: 369–377.

[51] Boone J R. On irreducible spaces. Bull Austral Math Soc, 1975, 12: 143–148.

[52] Boone J R. On irreducible spaces II. Pacific J Math, 1976, 62: 351–357.

[53] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. Czech Math J, 1976, 26: 174–182.

[54] Borges C R. On stratifiable spaces. Pacific J Math, 1966, 17: 1–16.

[55] Borges C R. On metrizability of topological spaces. Canad J Math, 1968, 20: 795–804.

[56] Borges C R, Lutzer D J. Characterizations and mappings of M_i-spaces. In: Topology Conference (Virginia Polytech Inst and State Univ, Blacksburg, 1973). Lecture Notes in Math, 375. Berlin: Springer-Verlag, 1974. 34–40.

[57] Bourbaki N. Topologie Générale ch. I et II (second ed.). Paris, 1951.

[58] Buhagiar D. Invariance of strong paracompactness under closed-and-open maps. Proc Japan Acad, 1998, 74A(6): 90–92.

[59] Buhagiar D, Lin Shou (林寿). A note on subparacompact spaces. Matematicki Vesnik,

2000, 52(3–4): 119–123.
[60] Burke D K. On subparacompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1969, 23: 655–663.
[61] Burke D K. Subparacompact spaces. Proc Washington State Univ Top Conf, 1970. 39–48.
[62] Burke D K. On p-spaces and wΔ-spaces. Pacific J Math, 1970, 35: 285–296.
[63] Burke D K. Spaces with G_δ-diagonal. In: TOPO 72–general topology and its applications. Proc 2nd Pittsburgh Internat Conf, Pittsburgh, 1972. Lecture Notes in Math, 378. Berlin: Springer-Verlag, 1974. 95–100.
[64] Burke D K. Preservation of certain base axioms under a perfect mapping. Topology Appl, 1976, 1: 269–279.
[65] Burke D K. Orthocompactness and pefect mappings. Proc Amer Math Soc, 1980, 78: 484–486.
[66] Burke D K. Closed mappings. In: Reed G M ed. Surveys in General Topology. New York: Academic Press, 1980. 1–32.
[67] Burke D K. Paralindelöf spaces and closed mappings. Topology Proc, 1980, 5: 47–57.
[68] Burke D K. Spaces with a primitive base and perfect mappings. Fund Math, 1983, 116: 157–163.
[69] Burke D K. Covering properties. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984. 347–422.
[70] Burke D K. Perfect images of spaces with a $\delta\theta$-bases and weakly $\delta\theta$-refinable spaces. Topology Appl, 1984, 18: 81–87.
[71] Burke D K. Generalized metric spaces, Part II. In: Hart K P, Nagata J, Vaughan J E eds. Encyclopedia of General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2004. 276–280.
[72] Burke D K, Davis S W. Pseudo-compact paralindelöf spaces are compact. Abstracts Amer Math Soc, 1982, 3: 213–213.
[73] Burke D K, Engelking R, Lutzer D J. Hereditarily closure-preserving collections and metrization. Proc Amer Math Soc, 1975, 51: 483–488.
[74] Burke D K, Lutzer D J. Recent advances in the theory of generalized metric spaces. In: Topology: Proc 9th Ann Spring Top Conf, Memphis State Univ, 1975. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 24. New York: Marcel Dekker Inc, 1976. 1–70.
[75] Burke D K, Michael E. On a theorem of V. V. Filippov. Israel J Math, 1972, 11: 394–397.
[76] Burke D K, Michael E. On certain point-countable covers. Pacific J Math, 1976, 64: 79–92.
[77] Burke D K, Stoltenberg R A. A note on p-spaces and Moore spaces. Pacific J Math, 1969, 30: 601–608.
[78] de Caux P. A collectionwise normal weakly θ-refinable Dowker space which is neither

irreducible nor real compact. Topology Proc, 1976, 1: 67–77.
[79] Čech E. On bicompact spaces. Ann Math, 1937, 38: 823–844.
[80] Ceder J G. Some generalizations of metric spaces. Pacific J Math, 1961, 11: 105–125.
[81] Chaber J. Conditions which imply compactness in countably compact spaces. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1976, 24: 993–998.
[82] Chaber J. Metacompactness and the class MOBI. Fund Math, 1976, 91: 211-217.
[83] Chaber J. Primitive generalizations of σ-spaces. In: Császár Á ed. Topology. Colloq Math Soc János Bolyai, 23, Budapest (Hungary), 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980. 259–268.
[84] Chaber J. Perfect images of p-spaces. Proc Amer Math Soc, 1982, 85: 609–614.
[85] Chaber J. Perfect preimages of Moore spaces. Bull Pol Acad Sci, Math, 1983, 31: 31–34.
[86] Chaber J. Generalizations of Lašnev's theorem. Fund Math, 1983, 119: 85–91.
[87] Chaber J. On the class MOBI. In: Frolíc Z ed. Proc 6th Prague Top Symp, Prague, 1986. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI. Berlin: Heldermann Verlag, 1988. 77–82.
[88] Chaber J, Junnila H J K. On θ-refinability of strict p-spaces. General Topology Appl, 1979, 10: 233–238.
[89] 陈必胜. 关于在连续闭映射下的原象. 数学研究与评论, 1985, 5(4): 121–122.
[90] 陈必胜. 具有 σ- 几乎局部有限基的空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1985, 1(2): 25–30.
[91] Chen Bisheng (陈必胜), Wu Lisheng (吴利生). On strongly M_1-spaces. 苏州大学学报 (自然科学版), 1994, 10: 75–80.
[92] Christain U J. A note on the ralation between Lindelöf and $\aleph_1$-compact spaces. Comment Math Prace Math, 1972, 16: 215–217.
[93] Christain U J. Concerning certain minimal cover refinable spaces. Fund Math, 1972, 76: 213–222.
[94] Cohen D E. Spaces with weak topology. Quart J Math Oxford, Ser (2), 1954, 5: 77–80.
[95] Collins P J. Monotone normality. Topology Appl, 1996, 74(1–3): 179–198.
[96] Comfort W W. A short proof of Marczewski's separability theorem. Amer Math Monthly, 1969, 76: 1041–1042.
[97] Corson H, Michael E. Metrizability of certain countable unions. Illinois J Math, 1964, 8: 351–360.
[98] Creede G D. Semi-stratifiable spaces. In: Proc Arizona State Univ Top Conf, 1967. 318–323.
[99] Creede G D. Concerning semi-stratifiable spaces. Pacific J Math, 1970, 32: 47–54.
[100] 戴牧民. σ 按点族正规、σ 亚紧性和 σ 点有限基. 数学学报, 1981, 24: 656–667.
[101] 戴牧民. 一类包含 Lindelöf 空间和可分空间的拓扑空间. 数学年刊 (A 辑), 1983, 4: 571–575.
[102] Davis S W. A cushioning type weak covering property. Pacific J Math, 1979, 80:

359–370.

[103] Davis S W. A nondevelopable Čech-complete space with a point-countable base. Proc Amer Math Soc, 1980, 78: 139–142.

[104] Davis S W. The strict p-spaces problem. Topology Proc, 1985, 10: 277–292.

[105] Davis S W, Smith J C. The paracompactness of preparacompact spaces. Topology Proc, 1979, 4: 345–360.

[106] Dieudonné J. Une généralisation des espaces compacts. J Math Pures Appl, 1944, 23: 65–76.

[107] van Douwen E K, Wicke H H. A real, weird topology on reals. Houston J Math, 1977, 3: 141–152.

[108] Dowker C H. An imbedding theorem for paracompact metric spaces. Duke Math J, 1947, 14: 639–645.

[109] Dowker C H. Mapping theorems for non-compact spaces. Amer J Math, 1947, 69: 200–242.

[110] Dowker C H. On countably paracompact spaces. Canad J Math, 1951, 3: 219–224.

[111] Dowker C H. Inductive dimension of completely normal spaces. Quar J Math, Oxford Ser (2), 1953, 4: 267–281.

[112] Dugundji J. Topology. Boston: Allyn and Bacon Inc, 1966.

[113] Eckertson F W, Garcia-Ferreira S, Sanchis M, Watson S. An isocompact Tychonoff space whose square is not isocompact. Topology Proc, 1997, 22: 181–190.

[114] Engelking R. General Topology (revised and completed edition). Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[115] Filippov V V. Preservation of the order of a base under a perfect mapping (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1968, 181: 1077–1079.

[116] Filippov V V. Quotient spaces and multiplicity of a base (in Russian). Mat Sb, 1969, 80(4): 521–532.

[117] Fitzpatrick B Jr. Some topologically complete spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 101–103.

[118] Fleissner W G, Reed G M. Para-Lindelöf spaces and spaces with a σ-locally countable base. Topology Proc, 1977, 2: 89–110.

[119] Fletcher P, Lindgren W F. Orthocompactness and strong Čech completeness in Moore spaces. Duke Math J, 1972, 39: 753–766.

[120] Foged L. Characterizations of $\aleph$-spaces. Pacific J Math, 1984, 110: 59–63.

[121] Foged L. Sequential coreflections of stratifiable spaces. Proc Amer Math Soc, 1984, 92: 470–472.

[122] Foged L. A characterization of closed images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1985, 95: 487–490.

[123] Foged L. Normality in k-and $\aleph$-spaces. Topology Appl, 1986, 22: 223–240.

[124] Fox R H. On topologies for function spaces. Bull Amer Math Soc, 1945, 51: 429–432.

[125] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice. Fund Math, 1965, 57: 107–115.

[126] Frink A H. Distance functions and the metrization problem. Bull Amer Math Soc, 1937, 43: 133–142.

[127] Frolík Z. On the topological product of paracompact spaces. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1960, 8: 747–750.

[128] Gale D. Compact sets of functions and function rings. Proc Amer Math Soc, 1950, 1: 303–308.

[129] 高国士. 弱于紧性的性质. 江苏师院学报 (自然科学版), 1979, (1): 1–9.

[130] 高国士. 关于仿紧性的承继性. 江苏师院学报 (自然科学版), 1979, (1): 10–13.

[131] 高国士. 关于仿紧、列仿紧空间的和. 江苏师院学报 (自然科学版), 1979, (1): 14–19.

[132] 高国士. 仿紧性与完备映象. 数学学报, 1980, 23: 794–796 (简报形式, 全文载: 江苏师院学报 (自然科学版), 1980, (1): 1–9).

[133] Gao Guoshi (Kao Kuo-shih, 高国士). A note on M_1-spaces. Pacific J Math, 1983, 108: 121–128.

[134] 高国士. σ- 空间、Σ- 空间及 Heath-Hodel 映象. 数学研究与评论, 1984, 4(1): 137–142; 1986, 6(4): 155–163.

[135] 高国士. 拓扑空间理论中的一般性定理. 苏州大学学报 (自然科学版), 1984, (1): 1–7.

[136] Gao Guoshi. Mapping theorems on paracompact spaces. 苏州大学学报 (自然科学版), 1985, 1(1): 1–3.

[137] 高国士. 关于 M_1- 空间的又一注记. 数学研究与评论, 1985, 5(4): 47–48.

[138] 高国士. 关于闭包保持和定理. 数学学报, 1986, 29: 58–62.

[139] 高国士. 关于 k- 网和基. 苏州大学学报 (自然科学版), 1986, 2: 107–111.

[140] 高国士. 两个映射定理. 数学年刊 A 辑, 1986, 7: 666–669.

[141] 高国士. 关于 M_1- 空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1988, 4: 289–300.

[142] 高国士等. 仿紧性与广义度量空间. 南京: 江苏科学技术出版社, 1988.

[143] 高国士. 关于不可约空间. 数学进展, 1989, 18: 143–149.

[144] Gao Guoshi. Weak sequence-covering mapping and cs^*-network. 苏州大学学报 (自然科学版), 1993, 9: 105–111.

[145] 高国士. 关于不可约空间 II. 数学进展, 1995, 24: 423–426.

[146] 高国士. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 2000.

[147] Gao Guoshi (Kao Kuo-shih), Wu Lisheng. Mapping theorems on mesocompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1983, 89: 355–357.

[148] 高智民. K- 半分层空间的某些结果. 西北大学学报 (自然科学版), 1985, (3): 12–16.

[149] Gao Zhimin (高智民). On g-function separation. Questions Answers in General Topology, 1986, 4: 47–57.

[150] Gao Zhimin. $\aleph$-spaces is invariant under perfect mappings. Questions Answers in General Topology, 1987, 5: 271–279.

[151] Gao Zhimin. The closed images of metric spaces and Fréchet $\aleph$-spaces. Questions Answers in General Topology, 1987, 5: 281–291.

[152] Gao Zhimin, Hattori Y. A characterization of closed s-images of metric spaces. Questions Answers in General Topology, 1986/87, 4: 147–151.

[153] 葛英. 可数仿紧性的闭映象. 南京大学学报 (自然科学版), 1992, 28: 368–371.

[154] Ge Ying (葛英). Closed Lindelöf mappings inversely preserve property b_1. Questions Answers in General Topology, 1993, 11: 81–85.

[155] 葛英. 具有性质 B 的空间的闭映象. 苏州大学学报 (自然科学版), 1994, 10: 205–210.

[156] 葛英. 关于弱 $\bar{\theta}$- 加细空间的闭 L 原象. 数学研究与评论, 1994, 14: 426–428.

[157] 葛英. F_σ 子集不保持 T_1 仿紧性. 苏州大学学报 (自然科学版), 1997, 13: 8–9.

[158] 葛英. 关于狭义拟仿紧空间的两个问题. 南京大学学报 (自然科学版), 1998, 34: 16–20.

[159] Ge Ying. On closed inverse images of mesocompact spaces. Fasciculi Math, 2005, 36: 27–32.

[160] 葛英, 张爱武. 关于弱 $\bar{\theta}$- 加细性的遗传性. 苏州丝绸工学院学报, 1998, 18: 62–64.

[161] Gittings R F. Some results on weak covering conditions. Canad J Math, 1974, 26: 1152–1156.

[162] Gittings R F. Open mapping theory. In: Reed G M ed. Set-theoretic Topology (Papers, Inst Medicine and Math, Ohio Univ, Athens, 1975–1976). New York: Academic Press, 1977. 141–191.

[163] Gruenhage G. Stratifiable spaces are M_2. Topology Proc, 1976, 1: 221–225.

[164] Gruenhage G. On closed images of orthocompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1979, 77: 389–394.

[165] Gruenhage G. On the $M_3 \Rightarrow M_1$ question. Topology Proc, 1980, 5: 77–104.

[166] Gruenhage G. Generalized metric spaces. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984. 423–501.

[167] Gruenhage G. On a Corson compact space of Todorčević. Fund Math, 1986, 126: 261–268.

[168] Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrization. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Papers from the Prague Top Symp, Prague, 1991. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1992. 239–274.

[169] Gruenhage G. Irreducible restrictions of closed mappings. Topology Appl, 1998, 85: 127–135.

[170] Gruenhage G. Are stratifiable spaces M_1? In: Pearl E ed. Open Problems in Topology II. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2007. 143–150.

[171] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. Pacific J Math, 1984, 113: 303–332.

[172] 关肇直. 拓扑空间概论. 北京: 科学出版社, 1958.

[173] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 105–110.

[174] Guthrie J A. Mapping spaces and cs-networks. Pacific J Math, 1973, 47: 465–471.

[175] Halfar E. Compact mappings. Proc Amer Math Soc, 1957, 8: 828–830.

[176] Hanai S. On closed mappings II. Proc Japan Acad, 1956, 32: 388–391.
[177] Hanai S. On open mappings II. Proc Japan Acad, 1961, 37: 233–238.
[178] Hanai S. Inverse images of closed mappings I. Proc Japan Acad, 1961, 37: 298–301.
[179] Harley P W III, Stephenson R M Jr. Symmetrizable and related spaces. Trans Amer Math Soc, 1976, 219: 89–111.
[180] Hart K P, Nagata J, Vaughan J E. Encyclopedia of General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2004.
[181] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
[182] Hausdorff F. Mengenlehre. Berlin, 1935.
[183] Heath R W. Arc-wise connectedness in semi-metric spaces. Pacific J Math, 1962, 12: 1301–1319.
[184] Heath R W. Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces. Canad J Math, 1964, 16: 763–770.
[185] Heath R W. A paracompact semi-metric space which is not an M_3-space. Proc Amer Math Soc, 1966, 17: 868–870.
[186] Heath R W. Stratifiable spaces are σ-spaces. Notices Amer Math Soc, 1969, 17: 761–761.
[187] Heath R W, Hodel R E. Characterizations of σ-spaces. Fund Math, 1973, 77: 271–275.
[188] Heath R W, Junnila H J K. Stratifiable spaces as subspaces and continuous images of M_1-spaces. Proc Amer Math Soc, 1981, 83: 146–148.
[189] Heath R W, Lutzer D J, Zenor P L. Monotonically normal spaces. Trans Amer Math Soc, 1973, 178: 481–493.
[190] Henriksen M, Isbell J R. Some properties of compactifications. Duke Math J, 1958, 25: 83–105.
[191] Henry M. Stratifiable spaces, semi-stratifiable spaces, and their relation through mappings. Pacific J Math, 1971, 37: 697–700.
[192] Hewitt E. On two problems of Urysohn. Ann Math, 1946, 47: 503–509.
[193] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions I. Trans Amer Math Soc, 1948, 64: 54–99.
[194] Hodel R E. Sum theorems for topological spaces. Pacific J Math, 1969, 30: 59–65.
[195] Hodel R E. A note on subparacompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1970, 25: 842–845.
[196] Hodel R E. Moore spaces and $w\Delta$-spaces. Pacific J Math, 1971, 38: 641–652.
[197] Hodel R E. Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences has cluster points. Duke Math J, 1972, 39: 253–263.
[198] House V D. Countable products of generalized countably compact spaces. Pacific J Math, 1975, 57: 183–197.
[199] Hurewicz W. Ueber stetige bilder von punktmengen. Proc Akad Amsterdam, 1926, 29: 1014–1017.

[200] Ishii T. On closed mappings and M-spaces I, II. Proc Japan Acad, 1967, 43: 752–761.
[201] Ishii T, Shiraki T. Some properties of wM-spaces. Proc Japan Acad, 1971, 47: 167–172.
[202] Ishikawa F. On countably paracompact spaces. Proc Japan Acad, 1955, 31: 686–687.
[203] Isiwata T. The product of M-spaces need not be an M-space. Proc Japan Acad, 1969, 45: 154–156.
[204] Itō M. The closed image of a hereditarily M_1-space is M_1. Pacific J Math, 1984, 113: 85–91.
[205] Itō M. M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1. Topology Appl, 1985, 19: 65–69.
[206] Itō M, Tamano K. Spaces whose closed images are M_1. Proc Amer Math Soc, 1983, 87: 159–163.
[207] 蒋继光. 关于仿紧性与拓扑空间的可度量性. 数学学报, 1986, 29: 679–701.
[208] 蒋继光. 仿紧性的一个刻画. 四川大学学报 (自然科学版), 1987, 24: 256–261.
[209] Jiang Jiguang (蒋继光). A characterization of submetacompactness. Chin Ann Math Ser B, 1988, 9: 151–155.
[210] 蒋继光. 仿紧性与性质 b_1. 数学学报, 1989, 32: 351–355.
[211] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲. 成都: 四川教育出版社, 1991.
[212] 蒋继光, 张树果. 拟仿紧性与乘积空间. 数学年刊 (A 辑), 2005, 26: 771–776.
[213] Jiang Shouli (江守礼). Every strict p-space is θ-refinable. Topology Proc, 1986, 11: 309–316.
[214] Jiang Shouli. On a Junnila's problem. Questions Answers in General Topology, 1988, 6: 43–47.
[215] Jones F B. Concerning normal and completely normal spaces. Bull Amer Math Soc, 1937, 43: 671–677.
[216] Junnila H J K. Neighbornets. Pacific J Math, 1978, 76: 83–108.
[217] Junnila H J K. On submetacompactness. Topology Proc, 1978, 3: 375–405.
[218] Junnila H J K. Covering properties and quasi-uniformities of topological spaces. Ph D Thesis, Virginia Polytech Inst and State Univ, 1978.
[219] Junnila H J K. Paracompactness, metacompactness and semi-open covers. Proc Amer Math Soc, 1979, 73: 244–248.
[220] Junnila H J K. Metacompactness, paracompactness and interior-preserving open covers. Trans Amer Math Soc, 1979, 249: 373–385.
[221] Junnila H J K. Three covering properties. In: Reed G M ed. Surveys in General Topology. New York: Academic Press, 1980. 195–245.
[222] Junnila H J K. Covering properties. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Papers from the Prague Top Symp, Prague, 1991. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1992. 444–452.
[223] Junnila H J K, Mizokami T. Characterizations of straitifiable μ-spaces. Topology

Appl, 1985, 21: 51–58.

[224] Junnila H J K, Smith J C and Telgársky R. Closure-preserving covers by small sets. Topology Appl, 1986, 23: 237–362.

[225] Junnila H J K, Yun Ziqiu (恽自求). ℵ-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network. Topology Appl, 1992, 44: 209–215.

[226] Kakutani S. Über die Metrization der topologischen Gruppen. Proc Japan Acad, 1936, 12: 82–84.

[227] Kanatani Y, Sasaki N, Nagata J. New characterizations of some generalized metric spaces. Math Japonica, 1985, 30: 805–820.

[228] Katětov M. Measures in fully normal spaces. Fund Math, 1951, 38: 73–84.

[229] Katětov M. Extension of locally finite coverings (in Russian). Colloq Math, 1958, 6: 145–151.

[230] Katuta Y. Expandability and its generalizations. Fund Math, 1975, 87: 231–250.

[231] Kelley J L. The Tycholloff product theorem implies the axiom of choice. Fund Math, 1950, 37: 75–76.

[232] Kelley J L. General Topology. New York: van Nostrand, 1955 (Graduate Texts Math, 27. Berlin: Springer-Verlag, 1975. 北京: 世界图书出版公司, 2001 重印. 中译本: 吴从炘, 吴让泉译. 一般拓扑学. 北京: 科学出版社, 1982).

[233] 儿玉之宏 (Kodama Y), 永见启应 (Nagami K). 位相空间论 (日文). 东京: 岩波书店, 1974 (中译本: 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984).

[234] Kofner J. Open compact mappings, Moore spaces and orthocompactness. Rocky Mountain J Math, 1982, 12(1): 107–112.

[235] Kramer T R. A note on countably subparacompact spaces. Pacific J Math, 1973, 46: 209–213.

[236] Kullman D E. Developable spaces and p-spaces. Proc Amer Math Soc, 1971, 27: 154–160.

[237] Kuratowski K. Sur les espaces complets. Fund Math, 1930, 15: 301–309.

[238] Kuratowski K. Evaluation de la classe borélienne d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques. Fund Math, 1931, 17: 249–272.

[239] Kuratowski K. Topologie I (second ed). Warszawa, 1948.

[240] Lašnev N. On continuous decompositions and closed mappings of metric spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1965, 165: 756–758.

[241] Lašnev N. Closed images of metric spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1966, 170: 505–507.

[242] 李招文. 关于拟完备映射的注记. 长沙水电师院自然科学学报, 1993, 8: 24–29.

[243] 林寿. K- 半分层空间的注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1988, 4: 357–363.

[244] 林寿. 闭映射不能保持 T_1 仿紧性及紧式仿紧性. 苏州大学学报 (自然科学版), 1988, 4: 184–187.

[245] Lin Shou. A study of pseudobases. Questions Answers in General Topology, 1988, 6:

81–97.
[246] Lin Shou. Mapping theorems on ℵ-spaces. Topology Appl, 1988, 30: 159–164.
[247] Lin Shou. On a problem of K. Tamano. Questions Answers in General Topology, 1988, 6: 99–102.
[248] 林寿. 关于映射与空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1989, 5: 313–326.
[249] Lin Shou. A survey of the theory of ℵ-spaces. Questions Answers in General Topology, 1990, 8: 405–419.
[250] 林寿. 关于一般性定理的注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1990, 6: 453–456.
[251] 林寿. 关于 Lašnev 空间. 数学学报, 1991, 34: 222–225.
[252] 林寿. Lašnev 空间的可数积. 数学进展, 1991, 20: 192–194.
[253] 林寿. σ- 空间的控制和定理. 数学年刊 A 辑, 1991, 12: 188–190.
[254] 林寿. 遗传闭包保持集族的若干研究方向. 山西大学学报 (自然科学版), 1992, 6(2): 17–23.
[255] 林寿. 关于 Arhangel'skiĭ 的 "映射与空间". 苏州大学学报 (自然科学版), 1992, 8: 393–400.
[256] Lin Shou. Spaces with σ-hereditarily closure-preserving k-networks. Math Japonica, 1992, 37: 17–21.
[257] 林寿. 关于 Arhangel'skiĭ 的 "映射与空间" (续). 苏州大学学报 (自然科学版), 1993, 9: 11–19.
[258] Lin Shou. Mapping theorems on k-semistratifiable spaces. Tsukuba J Math, 1997, 21: 809–815.
[259] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射. 北京: 科学出版社, 2002.
[260] 林寿. 关于开紧映射与 Arhangel'skiĭ 的问题. 数学年刊 (A 辑), 2006, 27: 719–722.
[261] 林寿. 广义度量空间与映射 (第 2 版). 北京: 科学出版社, 2007.
[262] Lin Shou, Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps, and related results. Topology Appl, 1994, 59: 79–86.
[263] Liu Chuan (刘川). Spaces with a σ-compact finite k-network. Questions Answers in General Topology, 1992, 10: 81–87.
[264] Liu Chuan, Tanaka Y. Spaces and mappings: special networks. In: Pearl E ed. Open Problems in Topology II. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V. 2007. 23–34.
[265] 刘应明. 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间. 数学学报, 1977, 20: 212–214.
[266] 刘应明. σ- 集体正规与集体正规. 四川大学学报 (自然科学版), 1978, 1: 11–17.
[267] 刘应明. 一般拓扑学. 自然科学年鉴, 1982. 2.1–2.3.
[268] 刘应明, 蒋继光. 点集拓扑学. 自然科学年鉴, 1989. 3.20–3.24.
[269] 龙冰. 几个覆盖性质与分离性. 数学学报, 1986, 29: 666–669.
[270] Lutzer D J. Semimetrizable and stratifiable spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 43–48.
[271] Mack J. Directed covers and paracompact spaces. Canad J Math, 1967, 19: 649–654.
[272] Mancuso V J. Mesocompactness and related properties. Pacific J Math, 1970, 33:

345–355.

[273] Mancuso V J. Inverse images and first countability. General Topology Appl, 1972, 2: 29–44.

[274] Mansfield M J. Some generalizations of full normality. Trans Amer Math Soc, 1957, 86: 489–505.

[275] Mansfield M J. On countably paracompact normal spaces. Canad J Math, 1957, 9: 443–449.

[276] Marczewski E. Séparabilité et multiplication Cartésienne des espaces topologiques. Fund Math, 1947, 34: 127–143.

[277] Mashburn J D. A note on irreducibility and weak covering properties. Topology Proc, 1984, 9: 339–352.

[278] Michael E A. A note on paracompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1953, 4: 831–838.

[279] Michael E A. Point-finite and locally finite coverings. Canad J Math, 1955, 7: 275–279.

[280] Michael E A. Another note on paracompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1957, 8: 822–828.

[281] Michael E A. Yet another note on paracompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1959, 10: 309–314.

[282] Michael E A. The product of a normal space and a metric space need not be normal. Bull Amer Math Soc, 1963, 69: 375–376.

[283] Michael E A. A note on closed maps and compact sets. Israel J Math, 1964, 2: 173–176.

[284] Michael E A. $\aleph_0$-spaces. J Math Mech, 1966, 15: 983–1002.

[285] Michael E A. Bi-quotient maps and Cartesian products of quotient maps. Ann Inst Fourier Grenoble, 1968, 18: 287–302.

[286] Michael E A. On Nagami's Σ-spaces and some related matters. Proc Washington State Univ Top Conf, 1970. 13–19.

[287] Michael E A. A quintuple quotient quest. General Topology Appl, 1972, 2: 91–138.

[288] Michael E A. On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$. Pacific J Math, 1973, 47: 487–498.

[289] Michael E A. Review of Guthrie's mapping spaces and cs-networks. Math Rev, 1975, 49: 696–697.

[290] Michael E A. σ-locally finite maps. Proc Amer Math Soc, 1977, 65: 159–164.

[291] Michael E A, Nagami K. Compact-covering images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1973, 37: 260–266.

[292] van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1990.

[293] Miller E S. Closed preimages of certain isocompactness properties. Topology Proc, 1988, 13: 107–123.

[294] Miščenko A. Spaces with a pointwise denumerable basis (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 144: 985–988.

[295] Mizokami T. On the dimension of general metric spaces. Ph D Dissertation, Univ of Tsukuba, 1982.
[296] Mizokami T. On a certain class of M_1-spaces. Proc Amer Math Soc, 1983, 87: 357–362.
[297] Mizokami T. On M-structures. Topology Appl, 1984, 17: 63–89.
[298] Mizokami T. On closed subsets of M_1-spaces. Topology Appl, 2004, 141: 197–206.
[299] Moore R L. On the foundations of plane analysis situs. Trans Amer Math Soc, 1916, 17(2): 131–164.
[300] Moore R L. A set of axioms for plane analysis situs. Fund Math, 1935, 25: 13–28.
[301] Morita K. Star-finite coverings and the star-finite property. Math Japonicae, 1948, 1: 60–68.
[302] Morita K. On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. Proc Japan Acad, 1953, 29: 537–543.
[303] Morita K. On closed mappings. Proc Japan Acad, 1956, 32: 539–543.
[304] Morita K. Paracompactness and product spaces. Fund Math, 1961/62, 50: 223–236.
[305] Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. Math Ann, 1964, 154: 365–382.
[306] Morita K. Some properties of M-spaces. Proc Japan Acad, 1967, 43: 869–872.
[307] Morita K. Some problems on normality of products of spaces. In: Proc 4th Prague Top Symp, Prague, 1976. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Part B, 1977. 296–297.
[308] Morita K, Hanai S. Closed mappings and metric spaces. Proc Japan Acad, 1956, 32: 10–14.
[309] Morita K, Nagata J. Topics in General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989.
[310] Mrówka S. Compactness and product spaces. Coll Math, 1959, 7: 19–22.
[311] Mysior A. A regular space which is not completely regular. Proc Amer Math Soc, 1981, 81: 652–653.
[312] Nagami K. Σ-spaces. Fund Math, 1969, 65: 169–192.
[313] Nagami K. Normality of products. Actes Congres Internat Math, 1970, 2: 33–37.
[314] Nagami K. Minimal class generated by open compact and perfect mappings. Fund Math, 1973, 78: 227–264.
[315] Nagata J. On a necessary and sufficient condition of metrizability. J Inst Polytech Osaka City Univ Ser A Math, 1950, 1: 93–100.
[316] Nagata J. A contribution to the theory of metrization. J Inst Polytech Osaka City Univ Ser A, 1957, 8: 185–192.
[317] Nagata J. Mappings and M-spaces. Proc Japan Acad, 1969, 45: 140–144.
[318] Nagata J. A survey of the theory of generalized metric spaces. In: Proc 3th Prague Top Symp, Prague, 1971. General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III, 1972. 321–331.

[319] Nagata J. Modern General Topology (2nd rev ed). North-Holland Math Library, 33. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1985.

[320] Nagata J. Generalized metric spaces I. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. North-Holland Math Library, 41. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989. 315–366.

[321] Novàk J. On the Cartesian product of two compact spaces. Fund Math, 1953, 40: 106–112.

[322] Ohta H. Well behaved subclasses of M_1-spaces. Topology Appl, 1989, 32: 279–288.

[323] Okuyama A. On metrizability of M-spaces. Proc Japan Acad, 1964, 40: 176–179.

[324] Okuyama A. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku, 1968, A9: 236–254.

[325] Okuyama A. σ-spaces and closed mappings, I, II. Proc Japan Acad, 1968, 44: 472–481.

[326] Okuyama A. A survey of the theory of σ-spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 57–63.

[327] Okuyama A. On a generalization of Σ-spaces. Pacific J Math, 1972, 42: 485–495.

[328] O'Meara P. A new class of topological spaces. University of Alberta Dissertation, 1966.

[329] O'Meara P. A metrization theorem. Math Nachr, 1970, 45: 69–72.

[330] O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact-open topology. Proc Amer Math Soc, 1971, 29: 183–189.

[331] Patsei I P. The σ-product of strong $\Sigma^{\sharp}$-spaces (in Russian). Vestnik Moskov Univ Mat, 1986, 39(2): 87–89.

[332] Pearl E. Open problems in topology, seventh status report. Topology Appl, 2001, 114: 333–352.

[333] Pearl E. Open Problems in Topology 2. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2007.

[334] Pondiczery E S. Power problems in abstract spaces. Duke Math J, 1944, 11: 835–837.

[335] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings (in Russian). Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1960, 8: 127–134.

[336] Ponomarev V I. Proof of the invariance of the star finite property under open perfect mappings. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1962, 10: 425–428.

[337] Popov V. A perfect map need not preserved a G_δ-diagonal. General Topology Appl, 1977, 7: 31–33.

[338] Pospíšil B. Remark on bicompact spaces. Ann Math, 1937, 38: 845–846.

[339] Potoczny H B. A nonparacompact space which admits a closure-preserving cover of compact sets. Proc Amer Math Soc, 1972, 32: 309–311.

[340] Potoczny H B. Closure-preserving families of compact sets. General Topology Appl, 1973, 3: 243–248.

[341] Potoczny H B, Junnila H J K. Closure-preserving families and metacompactness. Proc

Amer Math Soc, 1975, 53: 523–529.
[342] 蒲保民, 蒋继光, 胡淑礼. 拓扑学. 北京: 高等教育出版社, 1985.
[343] Ross K A, Stone A H. Products of separable spaces. Amer Math Monthly, 1964, 71: 398–403.
[344] Rudin M E. A normal space X for which $X \times I$ is not normal. Fund Math, 1971/72, 73: 179–186.
[345] Rudin M E. The normality of products with one compact factor. General Topology Appl, 1975, 5: 45–59.
[346] Rudin M E. Some conjectures. In: van Mill J, Reed G M ed. Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. 183–193.
[347] Sakai M. A new class of isocompact spaces and related results. Pacific J Math, 1986, 122: 211–221.
[348] Scott B M. Toward a product theory for orthocompactness. Studies in Topology (Proc Conf, Univ North Carolina, Charlotte, N C, 1974; dedicated to Math Sect Polish Acad Sci). New York: Academic Press, 1975. 517–537.
[349] Scott B M. Orthocompactness is nomality in finite products of locally compact LOTS's. In: Reed G M ed. Set-theoretic Topology (Papers, Inst Medicine and Math, Ohio Univ, Athens, 1975–1976). New York: Academic Press, 1977. 339–348.
[350] Scott B M. Pseudocompact, metacompact spaces are compact. Topology Proc, 1979, 4: 577–587.
[351] Scott B M. More about orthocompactness. Topology Proc, 1980, 5: 155–184.
[352] Šedivà V. On collectionwise normal and strongly paracompact spaces (in Russian). Czech Math J, 1959, 9: 50–62.
[353] Shiraki T. M-spaces, their generalization and metrization theorems. Sci Rep Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A, 1971, 11: 57–67.
[354] Sierpiński W. General Topology. Warsaw, 1952.
[355] Singal M K, Arya S P. Two sum theorems for topological spaces. Israel J Math, 1970, 8: 155–158.
[356] Singal M K, Arya S P. On the closure-preserving sum theorem. Proc Amer Math Soc, 1975, 53: 518–522.
[357] Singal M K, Arya S P. Weak topology sum theorems. In: Császár Á ed. Topology, II. Colloq Math Soc János Bolyai, 23, Budapest (Hungary), 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980. 1095–1109.
[358] Singal M K, Jain P. A note on $\aleph$-spaces. Kyungpook Math J, 1973, 13: 203–210.
[359] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings. General Topology Appl, 1971, 1: 143–154.
[360] Siwiec F. On defining a space by a weak base. Pacific J Math, 1974, 52: 233–245.
[361] Siwiec F, Mancuso V J. Relations among certain mappings and conditions for their equivalence. Topology Appl, 1971, 1: 33–41.

[362] Siwiec F, Nagata J. A note on nets and metrization. Proc Japan Acad., 1968, 44: 623–627.
[363] Slaughter F G Jr. The closed image of a metrizable space is M_1. Proc Amer Math Soc, 1973, 37: 309–314.
[364] Smirnov Yu M. On the metrization of topological spaces (in Russian). Uspechi Mat Nauk, 1951, 6(6): 100–111.
[365] Smirnov Yu M. On strongly paracompact spaces (in Russian). Izv Akad Nauk SSSR, Ser Math, 1956, 20: 253–274.
[366] Smith J C. Properties of weak $\overline{\theta}$-refinable spaces. Proc Amer Math Soc, 1975, 53: 511–517.
[367] Smith J C. A remark on irreducible spaces. Proc Amer Math Soc, 1976, 57: 133–139.
[368] Smith J C. New characterizations for collectionwise normal spaces. Glasnik Math, 1977, 12(32): 327–338.
[369] Smith J C. Irreducible spaces and property b_1. Topology Proc, 1980, 5: 187–200.
[370] Šneĭder V E. Continuous images of Suslin and Borel sets, metrization theorems (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1945, 50: 77–79.
[371] Sorgenfrey R H. On the topological product of paracompact spaces. Bull Amer Math Soc, 1947, 53: 631–632.
[372] Steen L A, Seebach J A Jr. Counterexamples in Topology (Second Edition). New York: Springer-Verlag, 1978 (New York: Dover Publications Inc, 1995).
[373] Stoltenberg R A. A note on stratifiable spaces. Proc Amer Math Soc, 1969, 23: 294–297.
[374] Stone A H. Paracompactness and product spaces. Bull Amer Math Soc, 1948, 54: 977–982.
[375] Stone A H. Metrizability of decomposition spaces. Proc Amer Math Soc, 1956, 7: 690–700.
[376] Stone A H. Metrisability of union of spaces. Proc Amer Math Soc, 1959, 10: 361–366.
[377] Stone A H. Hereditarily compact spaces. Amer J math, 1960, 82: 900–916.
[378] Stone A H. Sequences of coverings. Pacific J Math, 1960, 10: 689–691.
[379] Stone M H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans Amer Math Soc, 1937, 41: 375–481.
[380] Sun Shuhao (孙叔豪). The class of $\aleph$-spaces is invariant of closed mappings with Lindelöf fibres. Comment Math Univ Carolina, 1988, 29: 351–354.
[381] Suzuki J. On a theorem for M-spaces. Proc Japan Acad, 1967, 43: 610–614.
[382] Suzuki J. On pre-σ-spaces. Bull Tokyo Gakugei Univ IV Ser, 1976, 28: 22–32.
[383] Tamano H. On paracompactness. Pacific J Math, 1960, 10: 1043–1047.
[384] Tamano H. On compactifications. J Math Kyoto Univ, 1961/62, 1: 161–193.
[385] Tamano H. A characterization of paracompactness. Fund Math, 1971, 72: 189–201.
[386] Tamano K. Stratifiable spaces defined by pair collections. Topology Appl, 1983, 16:

287–301.

[387] Tamano K. μ-spaces, stratifiable spaces and mosaical collections. Math Japonica, 1989, 34: 483–496.

[388] Tamano K. Generalized metric spaces II. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. North-Holland Math Library, 41. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989. 367–409.

[389] Tamano K. A cosmic space which is not a μ-space. Topology Appl, 2001, 115: 259–263.

[390] Tanaka Y. Metrizability of certain quotient spaces. Fund Math, 1983, 119: 157–168.

[391] Tanaka Y. Point-countable covers and k-networks. Topology Proc, 1987, 12: 327–349.

[392] Tanaka Y. Metrization II. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. North-Holland Math Library, 41. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1989. 275–314.

[393] Teng Hui (滕辉). A note on B-property. Math Japonica, 1990, 35: 105–109.

[394] Teng Hui. On σ-product spaces I. Math Japonica, 1991, 36: 515–522.

[395] Teng Hui. On countable σ-product spaces. Chin Ann Math Ser B, 1993, 14: 113–116.

[396] 滕辉, 夏省祥, 林寿. 某些广义可数紧空间的闭映象. 数学年刊 (A 辑), 1989, 10: 554–558.

[397] Tietze H. Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Math Ann, 1923, 88: 290–312.

[398] Tukey J W. Convergence and Uniformity in Topology. Ann Math Studies, 2. Princeton: Princeton Univ Press, 1940.

[399] Tychonoff A. Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn. Math Ann, 1925, 95: 139–142.

[400] Tychonoff A. Über die topologische Erweiterung von Räumen. Math Ann, 1930, 102: 544–561.

[401] Tychonoff A. Ein Fixpunktsatz. Math Ann, 1935, 111: 767–776.

[402] Urysohn P. Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume. Math Ann, 1924, 92: 275–293.

[403] Urysohn P. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. Math Ann, 1925, 94: 262–295.

[404] Urysohn P. Zum Metrisationsproblem. Math Ann, 1925, 94: 309–315.

[405] Vaĭnšteĭn I A. On closed mappings of metric spaces (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1947, 57: 319–321.

[406] Ward L E Jr. A weak Tychonoff theorem and the axiom of choice. Proc Amer Math Soc, 1962, 13: 757–758.

[407] Watson W S. Pseudocompact metacompact spaces are compact. Proc Amer Math Soc, 1981, 81: 151–152.

[408] Watson W S. A pseusocompact meta-Lindelöf space which is not compact. Topology Proc, 1985, 20: 237–243.

[409] Weil A. Sur les espaces à stucture uniforme et sur la topologie générale. Paris, 1938.

[410] Wicke H H, Worrell J M Jr. Point-countability and compactness. Proc Amer Math

Soc, 1976, 55: 427–431.
[411] Willard S. General Topology. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1970.
[412] Wilson W A. On semi-metric spaces. Amer J Math, 1931, 53: 361–373.
[413] Worrell J M Jr. A characterization of metacompact spaces. Portugal Math, 1966, 25: 171–174.
[414] Worrell J M Jr. The closed continuous images of metacompact topological spaces. Portug Math, 1966, 25: 175–179.
[415] Worrell J M Jr. Some properties of full normatity and their relations to Čech completeness. Notices Amer Math Soc, 1967, 14: 555.
[416] Worrell J M Jr, Wicke H H. Characterizations of developable topological spaces. Canad J Math, 1965, 17: 820–830.
[417] Worrell J M Jr, Wicke H H. A covering property which implies isocompactness, I. Proc Amer Math Soc, 1980, 79: 331–334.
[418] 吴利生. 关于紧式仿紧空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1981, (1): 6–10.
[419] 吴利生. 关于 K- 半分层空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1983, (1): 1–4.
[420] Wu Lisheng. A note on covering property which implies isocompactness. 数学研究与评论, 1984, (4): 1–2.
[421] 吴利生. 关于有限到一伪开映射的一点注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1984, (1): 8–12.
[422] Wu Lisheng. On range decomposition theorem. 苏州大学学报 (自然科学版), 1990, 6: 119–122.
[423] Xia Shengxiang (夏省祥). Mapping theorems on some generalized metric spaces. Questions Answers in General Topology, 1988, 6: 107–115.
[424] Xia Shengxiang. On irreducible closed images of M_1-spaces. Questions Answers in General Topology, 1990, 8: 503–508.
[425] 燕鹏飞, 涂振坤. 遗传中紧空间与散射分解. 数学杂志, 2005, 25: 107–110.
[426] Yasui Y. Note on the characterizations of a B-property. Questions Answers in General Topology, 1987, 5: 195–201.
[427] Yoshioka I. Closed images of spaces having g-functions. Topology Appl, 2007, 154: 1980–1992.
[428] 恽自求. 关于仿紧、次仿紧空间的遗传性. 苏州大学学报 (自然科学版), 1981(2): 13–15.
[429] Yun Ziqiu. On point-countable closed k-network. Questions Answers in General Topology, 1989, 7: 139–140.
[430] Yun Ziqiu. Metrizable spaces, Lašnev spaces and $\aleph$-spaces. Ph D Dissetation, Univ Helsinki, 1990.
[431] Yun Ziqiu. A new characterization of $\aleph$-spaces. Topology Proc, 1991, 16: 253–256.
[432] Zenor P L. On countable paracompactness and normality. Prace Mat, 1969, 13: 23–32.
[433] Zenor P L. A class of countably paracompact spaces. Proc Amer Math Soc, 1970, 24: 258–262.

[434] Zenor P L. Countable paracompactness of F_σ-sets. Proc Amer Math Soc, 1976, 55: 201–202.

[435] 张建平. 关于 ortho- 紧空间. 苏州大学学报 (自然科学版), 1983, (1): 60–66.

[436] Zhong N (钟宁). Generalized metric spaces and products. Ph D thesis, Univ of Wisconsin, Madison, 1990.

[437] Zhong N. Products with an M_3-factor. Topology Appl, 1992, 45: 131–144.

[438] 周浩旋. 关于第一可数公理的推广与 Arhangel'skiĭ 问题. 数学学报, 1982, 25: 129–135.

[439] Zhou Haoxuan (周浩旋). On the small diagonals. Topology Appl, 1982, 13: 283–293.

[440] 周金元. 关于 ortho- 紧性的一些注记. 数学年刊 (A 辑), 1987, 8: 632–634.

[441] Zhou Jingyuan (周金元). Normal spaces whose Stone-Čech remainders have countable tightness. Proc Amer Math Soc, 1993, 117: 1193–1194.

[442] 周友成. 关于 θ- 加细性. 数学研究与评论, 1983, 3: 27–30.

[443] Zhu Jianping (朱建平). The generalizations of first countable spaces. Tsukuba J Math, 1991, 15: 167–173.

[444] Zhu Jianping. On indecomposable subcontinua of $\beta[0,\infty) - [0,\infty)$. Topology Appl, 1992, 45: 261–274.

[445] 朱俊. 关于 M_1- 空间映象的一个注记. 苏州大学学报 (自然科学版), 1983, (1): 67–70.

[446] 朱俊. 拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质. 数学研究与评论, 1984, 4(1): 9–13.

[447] 朱俊. 关于 Y. Yajima 的几个问题. 数学年刊 (A 辑), 1988, 9: 160–164.

[448] Zhu Jun (朱俊). On collectionwise subnormal spaces. Chin Ann Math Ser B, 1988, 9: 216–220.

[449] 朱俊. 不可约空间的一些性质. 数学学报, 1991, 34: 309–315.

[450] 朱培勇. 遗传次亚紧空间. 数学进展, 1996, 25: 299–304.

索　引

（一）

(二)

A

B

C

D